Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 40. №3. C. 101-110. ISSN 2079-6641

УДК 519.85 Научная статья

Полная система условий ненакопления автотранспортных средств перед светофором на симметричном двухполосном перекрестке

В. Ч. Кудаев, А. К. Буздов

Институт информатики и проблем регионального управления - филиал ФГБНУ «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», 360000, КБР, г. Нальчик, ул. И. Арманд, 37-а

E-mail: abuzdov@rambler.ru, vchkudaev@mail.ru

Проблема оптимизации транспортной системы городов до сих пор не решена. Одной из актуальных практических задач является задача о режиме работы светофора на перекрестках городов. В основе представленной статьи лежит теоретически доказанное М. Лайтхиллом и Дж. Уиземом и теперь широко известное условие ненакопления автотранспортных средств перед светофором перекрестка, работающем в двух режимах (горит красный, горит зеленый) по каждой из трасс перекрестка. Хотя со времени доказательства условия Лайтхилла-Уизема прошло более 70 лет, это условие не используется на практике, к нему относятся как к чисто теоретическому результату. Однако условию Лайтхилла-Уизема достаточно просто придать практическую интерпретацию и получить на основе измерений величин потоков по трассам перекрестка их усредненные значения. В работе на основе условия Лайтхилла-Уизема доказано общее условие (необходимое и достаточное) ненакопления автотранспортных средств перед светофором на перекрестке в целом и достаточное условие блокировки перекрестка, что позволяет выделять в городе симметричные двухполосные по каждой из трасс перекрестки, близкие к блокировке. Представлено решение задачи о светофоре на основе коммутационного соотношения, связывающего предельные времена горения зеленого цвета светофора по каждой из трасс перекрестка. В работе рассматривался именно симметричный двухполостный перекресток по той причине, что такие перекрестки составляют достаточно большую часть городских перекрестков.

Ключевые слова: симметричный перекресток, задача о светофоре, условия ненакопления автотранспортных средств.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-101-110

Поступила в редакцию: 05.10.2022 В окончательном варианте: 29.10.2022

Для цитирования. Кудаев В. Ч., Буздов А. К. Полная система условий ненакопления автотранспортных средств перед светофором на симметричном двухполосном перекрестке // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 40. № 3. C. 101-110. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-101-110

Финансирование. Статья выполнена без финансовой поддержки фондов

Введение

В предисловии к известной книге [1] выделены пять главных задач математического моделирования потоков автотранспортных средств (АТС):

- эволюция затора,
- задача о светофоре,
- задача о выборе оптимальной топологии транспортной сети,
- расчет матрицы корреспонденций и распределения потоков,
- задача о надежности графа транспортной сети.

Несмотря на то, что со времени издания книги прошло 12 лет, задача о светофоре остается одной из главных задач.

В 1955 г. М. Лайтхиллом и Дж. Уиземом было теоретически получено [2, 3] условие ненакопления АТС перед перекрестком с течением времени. Укажем также на работу [4]. Краткое изложение подхода Лайтхилла-Уизема было представлено в [1]. В [1] также отмечается, что основной проблемой при моделировании транспортных потоков является не ограничения по вычислительным мощностям и ресурсам памяти, а большая чувствительность описываемой реальной транспортной системы к входным данным (характеристики источников и стоков автомобилей) и невозможность собрать достаточно полную информацию о входных данных.

Одним из возможных выходов из этого положения является рассмотрение усредненных показателей транспортной системы – например, в смысле систем массового обслуживания.

В настоящее время на сложных перекрестках городских дорог для оценки альтернативных сценариев (схем) работы светофора используется индивидуальный подход и имитационное моделирование [5, 6], программы светофорного регулирования [7], адаптация моделей регулируемого пересечения [8], моделирование и оптимизация потоков на перекрестке [9, 10].

Цель светофорного управления перекрестком - построение такого периодического режима работы светофоров (время горения красного, зеленого цветов), обеспечивающего наименьшее суммарное время прохода перекрестка всеми АТС, вошедшими в перекресток, при условии ненакопления АТС перед перекрестком с течением времени.

Условие Лайтхилла-Уизема ненакопления АТС перед перекрестком с течением времени.

В 1955 г. в работах [2, 3] М. Лайтхиллом и Дж. Уиземом была поставлена и решена следующая

Задача. *Найти такое число $k > 0$, что перед светофором (работающем в двух режимах: зеленый, красный) не будет скапливаться очередь с течением времени, если*

$$\frac{T_{зел}}{T_{кр}} \geq k$$

Считать, что транспортный поток вдали от светофора имеет плотность $\overline{\rho} \le \rho_m$, где ρ - плотность потока $\overline{q}$, ρ_m - плотность, при которой значение потока максимально.

Решение М. Лайтхилла и Дж. Уизема таково:

$$k = \frac{\overline{q}}{q_m - \overline{q}}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{T_{\text{зел}}}{T_{\text{кр}}} \ge \frac{\overline{q}}{q_m - \overline{q}}, \tag{1}$$

где q_m – максимальный возможный поток через перекресток по трассе, соответствующий максимальной плотности; $\overline{q}$ – поток по трассе соответствующий плотности $\overline{\rho}$ потока.

Практическая интерпретация условия Лайтхилла-Уизема.

В [1] представлен подход к решению задачи ненакопления АТС перед перекрестком, основанный на работах [2, 3].

Мы здесь представим практическую интерпретацию условия М. Лайтхилла и Дж. Уизема.

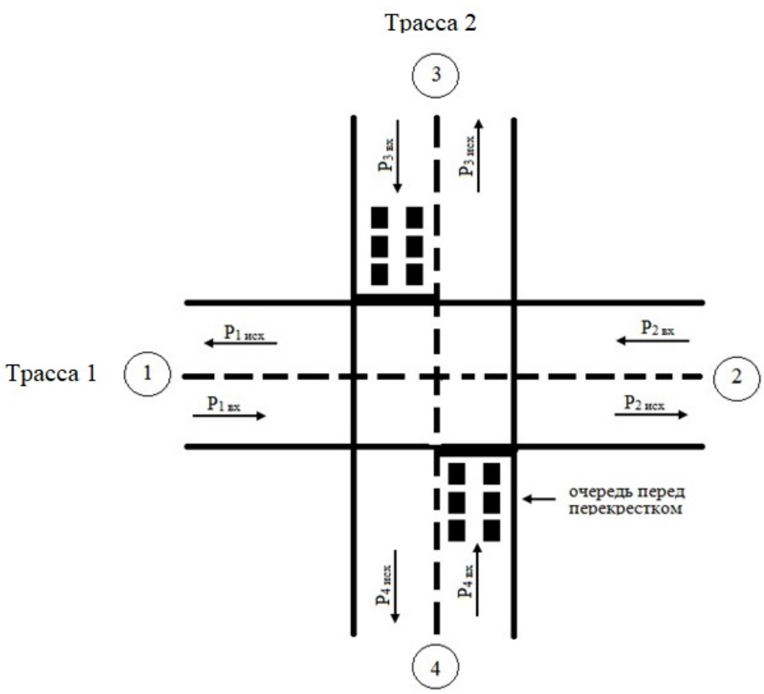

Рис. 1. По трассам 1 (1-2) и 2 (3-4) горят, соответственно, зеленый и красный цвета светофора.
[Figure 1. On routes 1 (1-2) and 2 (3-4), green and red traffic lights are on, respectively.]

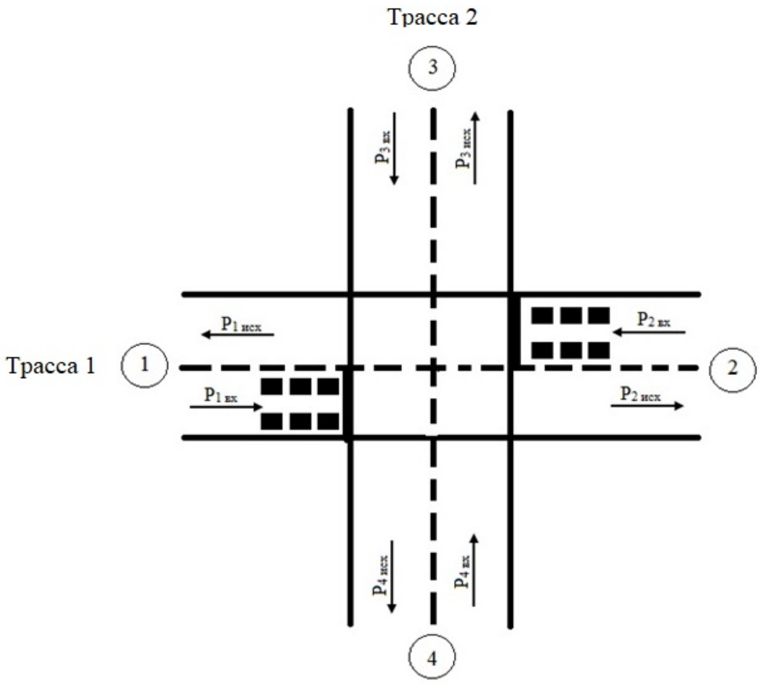

Рис. 2. По трассам 1 (1-2) и 2 (3-4) горят, соответственно, красный и зеленый цвета светофора.
[Figure 2. On routes 1 (1-2) and 2 (3-4), the red and green colors of the traffic light are on, respectively.]

У перекрестка за время горения красного цвета светофора по трассе перед перекрестком (см. рис. 1, рис. 2) накопится $T_{кр}\overline{q}$АТС. Перекресток должен за время горения зеленого пропустить не только это накопленное количество АТС, но и все АТС, приблизившиеся к перекрестку за время горения зеленого, т.е. всего $(T_{кр}\overline{q}+T_{зел}\overline{q})$ АТС. В таком случае пропускная способность перекрестка, т.е. максимально возможное количество АТС, которое он может пропустить за время горения зеленого - $T_{зел}q_m$ АТС, должна удовлетворять неравенству

$$T_{зел}q_m \geq T_{кр}\overline{q}+T_{зел}\overline{q} \Rightarrow \frac{T_{зел}}{T_{кр}} \geq \frac{\overline{q}}{q_m-\overline{q}},$$

что совпадает с (1).

Условие ненакопления АТС на обеих трассах перекрестка.

Рассмотрим случай, когда потоки (входящие, исходящие) стабильны в течение нескольких часов на исследуемом перекрестке. Именно эта ситуация является практически актуальной. Рассмотрим симметричный двухполосный перекресток при горении зеленого и красного цветов светофора по пересекающимся трассам: рис. 1, рис. 2 (внутренние потоки перекрестка на рисунках не показаны). Исходными данными являются потоки перекрестка, полученные по временам суток.

Нижняя оценка неблокировки трассы перекрестка (условие Лайтхилла-Уизема)

$$\frac{T_{зел}}{T_{кр}} \geq \frac{\overline{q}}{q_m - \overline{q}},$$

при согласованном рассмотрении обеих трасс с учетом того, что во время горения зеленого по одной из трасс, по другой горит красный цвет светофора, т.е.:

$$T^1_{кр} = T^2_{зел},\ T^2_{кр} = T^1_{зел} \tag{2}$$

приводит к неравенствам:

$$\frac{T^1_{зел}}{T^1_{кр}} = \frac{T^1_{зел}}{T^2_{зел}} \geq \frac{\overline{q_1}}{q_m - \overline{q_1}}, \tag{3}$$

$$\frac{T^2_{зел}}{T^2_{кр}} = \frac{T^2_{зел}}{T^1_{зел}} \geq \frac{\overline{q_2}}{q_m - \overline{q_2}}, \tag{4}$$

из (4) следует

$$\frac{T^1_{зел}}{T^2_{зел}} \leq \frac{q_m - \overline{q_2}}{\overline{q_2}}, \tag{5}$$

Из (3) и (5) получим **общее условие ненакопления очередей на обеих трассах перекрестка** при $\overline{q_1} \geq \overline{q_2}$ $\overline{q_1} < q_m$:

$$\frac{\overline{q_1}}{q_m - \overline{q_1}} \leq \frac{T^1_{зел}}{T^2_{зел}} \leq \frac{q_m - \overline{q_2}}{\overline{q_2}}. \tag{6}$$

Определим теперь согласованные значения $(\overline{q_1}, \overline{q_2})$, для которых имеет место неравенство

$$\frac{\overline{q_1}}{q_m - \overline{q_1}} \leq \frac{q_m - \overline{q_2}}{\overline{q_2}}$$

Получим:

$$\overline{q_1}\,\overline{q_2} \leq (q_m - \overline{q_1})(q_m - \overline{q_2}) = q_m^2 - q_m\overline{q_2} - q_m\overline{q_1} + \overline{q_1}\,\overline{q_2} \Rightarrow \overline{q_1} + \overline{q_2} \leq q_m \tag{7}$$

Неравенство (7) переходит в равенство при $\overline{q_1} + \overline{q_2} = q_m$.

Итак, общее условие ненакопления очередей у перекрестка при $\overline{q_1} \geq \overline{q_2}$, $\overline{q_1} < q_m$ таково:

$$\frac{\overline{q_1}}{q_m - \overline{q_1}} \leq \frac{T^1_{зел}}{T^2_{зел}} \leq \frac{q_m - \overline{q_2}}{\overline{q_2}}. \tag{8}$$

При этом условие

$$\overline{q_1} + \overline{q_2} > q_m \tag{9}$$

есть **достаточное условие накопления очередей АТС на перекрестке**. Поэтому при близкой к q_m сумме $(\overline{q_1} + \overline{q_2})$ следует принимать меры – увеличить количество полос на трассах перекрестка либо ограничить входные потоки по его трассам, т.е. перенаправлять часть потоков от идущих от смежных четырех перекрестков к нему.

Решение задачи светофора

Целью светофорного управления перекрестком является построение такого периодического режима работы светофора (времен горения красного, зеленого цветов), обеспечивающего наименьшее суммарное время прохода перекрестка всеми АТС, вошедшими в перекресток при условии ненакопления АТС перед перекрестком с течением времени.

Вернемся непосредственно к условиям Лайтхилла-Уизема ненакопления очередей АТС перед перекрестком от цикла к циклу работы светофора (3), (4):

$$\frac{T^1_{зел}}{T^1_{кр}} = \frac{T^1_{зел}}{T^2_{зел}} \geq \frac{\overline{q_1}}{q_m - \overline{q_1}}, \quad \frac{T^2_{зел}}{T^2_{кр}} = \frac{T^2_{зел}}{T^1_{зел}} \geq \frac{\overline{q_2}}{q_m - \overline{q_2}}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{T^1_{зел}}{T^2_{зел}} \leq \frac{q_m - \overline{q_2}}{\overline{q_2}}.$$

Очевидно, что большему потоку из $(\overline{q_1}, \overline{q_2})$ должно соответствовать и большее время горения зеленого цвета светофора. Поэтому, соотнеся имеющиеся предельные значения зависимости времени горения зеленого по трассам 1 и 2, получим:

$$\left(\frac{T^1_{зел}}{T^2_{зел}}\right)^2 = \frac{\overline{q_1}(q_m - \overline{q_2})}{(q_m - \overline{q_1})\overline{q_2}}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{T^1_{зел}}{T^2_{зел}} = \left(\frac{\overline{q_1}(q_m - \overline{q_2})}{(q_m - \overline{q_1})\overline{q_2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

Поэтому при выполнении условий ненакопления очередей АТС перед перекрестком выберем в качестве оптимального следующее решение

$$\frac{T^1_{зел}}{T^2_{зел}}(\overline{q_1}, \overline{q_2}, q_m) = \left(\frac{\overline{q_1}(q_m - \overline{q_2})}{(q_m - \overline{q_1})\overline{q_2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

Эта функция не отдает преимущества ни одной из трасс перекрестка, т.е. средние времена прохода перекрестка по обеим трассам будут равными.

Иное истолкование состоит в том, что в качестве оптимального выбирается среднее геометрическое от крайних значений условия ненакопления очередей (8) на обеих трассах перекрестка.

Определение величины q_m перекрестка

Измерения проводятся во время пиковой нагрузки на перекресток. Значение величины q_m на симметричных двухполосных перекрестках города при двухфазной работе светофора (т.е. $T^1_{кр} = T^2_{зел}$, $T^2_{кр} = T^1_{зел}$) определяется осредненно:

1. Определяется время цикла работы светофора – часто это двухминутный цикл, т.е. 120 сек.

2. Определяется количество АТС на двух однонаправленных полосах трассы, накопившихся за время горения красного цвета светофора по трассе.

3. Засекаются и фиксируются последние в очереди из них по каждой полосе.

4. Характеризацией максимального по плотности потока является то, что эти АТС стоят плотно друг относительно друга на расстоянии около 2 м, и после включения зеленого цвета светофора по трассе эти АТС с интервалом примерно 1 с. начинают вдвигаться в перекресток увеличивая скорость так, что расстояние между i-м и $(i+1)$-м слоем АТС больше, чем между $(i+1)$-м и $(i+2)$-м. В случае нарушения этой характеризации переходим к следующему вычислительному эксперименту (т.е. исключаем данный эксперимент).

5. Определяется за какое время t_{m_j} зафиксированных m_j машин при j-ом измерении прошли перекресток за время горения зеленого $T_{зел}$. Тогда

$$q_{m_j} = m_j \frac{T_{зел}}{t_{m_j}}$$

6. Эксперимент проводится несколько раз во время пиковой нагрузки, т.е. во время наибольшего потока $\overline{q}$ по каждой из трасс перекрестка по времени суток и усредняется, т.е.

$$q_m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} q_{m_j}$$

Заключение

В результате научных исследований по задаче о режиме работы светофора на симметричном двухполосном перекрестке города получены следующие результаты:

1. На основе условия Лайтхилла-Уизема о режиме работы светофора (зеленый, красный), обеспечивающем ненакопление АТС перед светофором по трассе перекрестка, доказано общее условие (необходимое и достаточное) ненакопления транспортных средств перед светофором на перекрестке в целом.

2. Доказано достаточное условие блокировки перекрестка АТС, что позволит выделять перегруженные АТС перекрестки и принимать меры по их разгрузке (например, переправлять потоки, увеличить количество полос трассы через перекресток и др.).

3. Представлено оптимальное решение задачи о светофоре на основе коммутационного соотношения связывающего предельные времена горения зеленого цвета светофора по каждой из трасс перекрестка.

Рассмотрение симметричных двухполостных перекрестков связано не только с тем, что для них условие ненакопления АТС является интервальным (закрытый интервал), но и с тем что такие перекрестки составляют значительную часть перекрестков городов.

Дальнейшие исследования, в первую очередь, будут связаны с создание программной системы обеспечивающей расчет усредненных значений потоков в часы пиковой нагрузки АТС на перекресток, а также с оптимизацией циклов работы смежных друг с другом перекрестков (сдвигов их циклов друг относительно друга).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Каждый из авторов участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы

1. Под редакцией Гасникова А. В. *Введение в математическое моделирование транспортных потоков.* М.: МФТИ, 2010. 417 с.
2. Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves: II Theory of traffic flow on long crowded roads, *Proc. R. Soc. London. Ser. A.*, 1955. Т. 229, С. 281–345.
3. Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны.* М.: Мир, 1977.
4. Richards P. I. Shock Waves on the Highway, *Oper. Res.*, 1956. Т. 4, С. 42–51.
5. Шец С. П., Справцева Е. В., Калмыков А. А. Применение имитационного моделирования при совершенствовании организации дорожного движения на перекрестке города Брянска, *Вестник Брянского государственного технического университета*, 2017. Т. 56, № 3, С. 67–72.
6. Долгушин Д.Ю., Мызников Т.А. Имитационное моделирование автотранспортных потоков для оценки альтернативных схем организации дорожного движения в городских условиях, *Вестник СибАДИ*, 2011. Т. 2(20), С. 47-52.
7. Новиков А. Н., Еремин С. В., Шевцова А. Г. Основные принципы расчета программы светофорного регулирования на основе управляемых сетей и потока насыщения, *Вестник СибАДИ*, 2019. Т. 16, № 6, С. 680–691.
8. Новиков И. А., Шевцова А. Г., Кравченко А. А., Бурлуцкая А. Г. Разработка методики адаптации модели регулируемого пересечения, *Вестник СибАДИ*, 2020. Т. 17, № 6, С. 726–735.
9. Глухарев К.К., Калинин И.Н. К оптимизации потока на перекрестке, *Труды 53-й научной конференции МФТИ "Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук Часть III. Аэрофизика и космические исследования.*, 2010. Т. 2, С. 72–74.
10. Калинин И.Н., Глухарев К.К. Исследование интегральных характеристик перекрестков при помощи микроскопических моделей транспортных потоков, *Компьютерные исследования и моделирование*, 2014. Т. 6, № 4, С. 523-534..

Кудаев Валерий Черимович – кандидат физико-математических наук, заведующий отделом Института информатики и проблем регионального управления КБНЦ РАН, республика Кабардино-Балкария, г. Нальчик, Россия, ORCID 0000-0002-8313-4199.

Буздов Аслан Каральбиевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института информатики и проблем регионального управления КБНЦ РАН, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, Россия, ORCID 0000-0001-9097-3348.

MSC 93-10 Research Article

A complete system of conditions for uncongested traffic of vehicles in front of a traffic light at a symmetrical two-lane intersection

V. Ch. Kudaev, A. K. Buzdov

Institute of Informatics and Regional Management Problems of the KBNTS RAS, Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, Russia.

E-mail: abuzdov@rambler.ru, vchkudaev@mail.ru

The problem of optimizing the transport system of cities has not yet been solved. One of the urgent practical problems is the problem of the operation mode of traffic light at the city intersections. The present article is based on the theoretically proven by M. Lighthill and J. Whitham and now widely known condition of non-accumulation of vehicles in front of an intersection traffic light operating in two modes (red light on, green light on) along each of the intersection routes. Although more than 70 years have passed since the Lighthill-Whitham condition was proved, this condition is not used in practice, and is treated as a purely theoretical result. However, the Lighthill-Whitham condition may quite simply get a practical interpretation and average values of the traffic flow would be obtained, based on measurements of the intersection lanes' traffic. Based on the Lighthill-Whitham condition, the paper proves the general condition (necessary and sufficient) to avoid the congestion of vehicles in front of a traffic light at an intersection as a whole and a sufficient condition for blocking an intersection, which makes it possible to identify symmetrical two-lane intersections along each of the highways in the city, that are close to blocking. An optimal solution to the problem of a traffic light is presented based on a commutation relation that sets the limiting times for the green traffic light to be on along each of the intersection routes. It was a symmetrical two-lane intersection that was considered in the work, for the reason that such intersections make up a larger part of urban intersections.

Key words: symmetrical intersection, traffic light problem, non-congestion of vehicles conditions.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-101-110

Original article submitted: 05.10.2022 Revision submitted: 29.10.2022

For citation. Kudaev V. Ch., Buzdov A. K. A complete system of conditions for uncongested traffic of vehicles in front of a traffic light at a symmetrical two-lane intersection. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **40**: 3, 101-110. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-101-110

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Funding. The work was done without financial support from foundations

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

References

[1] Gasnikova A. V. Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnykh potokov. Moscow, MFTI, 2010, 417,(In Russian).

[2] Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves: II Theory of traffic flow on long crowded roads, Proc. R. Soc. London. Ser. A., 1955, 229, 281–345.

[3] Uizem Dzh. Lineynye i nelineynye volny. Moscow, Mir, 1977 (In Russian).

[4] Richards P.I. Shock Waves on the Highway. Oper. Res., 1956, 4, 42–51.

[5] Shets S. P., Spravtseva E. V., Kalmykov A. A. Primenenie imitatsionnogo modelirovaniya pri sovershenstvovanii organizatsii dorozhnogo dvizheniya na perekrestke goroda Bryanska, Vestnik Bryanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2017, 56:3, 67–72 (In Russian).

[6] Dolgushin D. Yu., Myznikov T. A. Imitatsionnoye modelirovaniye avtotransportnykh potokov dlya otsenki al'ternativnykh skhem organizatsii dorozhnogo dvizheniya v gorodskikh usloviyakh, Vestnik SibADI, 2(20), 2011, 47-52 (In Russian).

[7] Novikov A. N., Eremin S. V., Shevtsova A. G. Osnovnye printsipy rascheta programmy svetofornogo regulirovaniya na osnove upravlyaemykh setey i potoka nasyshcheniya, Vestnik SibADI, 2019, 16:6, 680–691 (In Russian).

[8] Novikov I. A., Shevtsova A. G., Kravchenko A. A., Burlutskaya A. G. Razrabotka metodiki adaptatsii modeli reguliruemogo peresecheniya, Vestnik SibADI, 2020, 17:6, 726–735 (In Russian).

[9] Glukharev K.K., Kalinin I.N. K optimizatsii potoka na perekrestke, Trudy 53-y nauchnoy konferentsii MFTI "Sovremennyye problemy fundamental'nykh i prikladnykh nauk Chast' III. Aerofizika i kosmicheskiye issledovaniya, 2010, 2, 72–74 (In Russian).

[10] Kalinin I. N., Glukharev K. K., Interchange integral characteristics study via microscopic traffic flowmodels, Computer Research and Modeling, 2014, 6:4, 523-534 (In Russian).

Kudaev Valery Cherimovich – Ph.D. (Phys. & Math.), Head of the Department of the Institute of Informatics and Regional Management Problems of the KBNTS RAS, Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0002-8313-4199.

Buzdov Aslan Karalbievich – Ph.D. (Phys. & Math.), Senior Researcher, Institute of Informatics and Problems of Regional Management, KBNTS RAS, Kabardino-Balkarian Republic, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0001-9097-3348.