Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 40. №3. C. 28-41. ISSN 2079-6641

УДК 512.745 Научная статья

Эквивалентность путей в некоторой неевклидовой геометрии

Р. А. Гаффоров[1], К. К. Муминов[2]

[1] Ферганский государственный университет, 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19, Республика Узбекистан
[2] Национальный университет Узбекистана, 100174, г. Ташкент, ул. Мирзо Улугбека, Республика Узбекистан
E-mail: gafforov.rahmatjon@mail.ru

Пусть G – подгруппа в группе всех обратимых линейных преобразований конечномерного действительного пространства R^n. Одной из задач дифференциальной геометрии является нахождение легко проверяемых необходимых и достаточных условий, обеспечивающих G – эквивалентность путей, лежащих в R^n. В статье установлены необходимые и достаточные условия эквивалентности путей в некоторой неевклидовой геометрии.

Ключевые слова: псевдогаллилеево пространство, группа движений, регулярный путь.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-28-41

Поступила в редакцию: 22.09.2022 В окончательном варианте: 22.10.2022

Для цитирования. Гаффоров Р. А., Муминов К. К. Эквивалентность путей в некоторой неевклидовой геометрии // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 40. № 3. C. 28-41. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-28-41

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)
© Гаффоров Р. А., Муминов К. К., 2022

Введение

В наше время теория инвариантов переживает третью молодость. Первый этап ее развития характеризовался интересом к формально-алгебраическим проблемам и их приложениям к геометрии, второй – проникновением в эту теорию методов теории групп Ли и их представлений, третий – влиянием теории алгебраических групп и алгебраической геометрии.

Одной из важных задач дифференциальной геометрии является нахождение условий, обеспечивающих эквивалентность кривых и путей относительно действия

Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

той или иной алгебраической группы. При решении этой задачи, в последние годы, активно используются методы теории инвариантов.

Одним из содержательных примеров неевклидовых геометрий, как известно, является псевдогалилеева геометрия, [3, глава 5, §4]. Группу $S\Gamma O(n,p)$ всех обратимых линейных преобразований пространства R^n , сохраняющих метрику псевдогалилеевого пространства называют специальной псевдогалилевой группой. Соответствующая группа движений псевдогалилеевого пространства есть полупрямое произведение $R^n \triangleleft S\Gamma O(n,p)$ групп R^n и $S\Gamma O(n,p)$.

Предварительные сведения

Пусть N множество всех натуральных чисел $n \in N$. Рассмотрим n-мерное линейное пространство R^n над полем действительных чисел R. $GL(n,R)$ - группа всех обратимых линейных преобразований в R^n. Отождествляя элементы из R^n с n-мерными вектор - столбцами $x = \left\{x_j\right\}_{j=1}^n$, а преобразования $g \in GL(n,R)$ - с $n \times n$ - матрицами $\left(g_{ij}\right)_{i,j=1}^n$, действие $g \in GL(n,R)$ в R^n реализуется как умножение матрицы g на вектор-столбец x (gx).

Зафиксируем натуральное число $p \in \{1,...,n-1\}$ и рассмотрим в R^n билинейную форму

$$[x,y] = x_1y_1 + ... + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - ... - x_ny_n.$$

Обозначим через $I_n^{(p)}$ матрицу $(I_{ij}^{(p)})_{i,j=1}^n$ из $GL(n,R)$, у которой

$$\begin{cases} I_{jj}^{(p)} = 1, & \text{при } \ j = 1,...,p, \\ I_{jj}^{(p)} = -1, & \text{при } \ j = (p+1),...,n, \\ I_{ij}^{(p)} = 0, & \text{при } \ i \neq j, \ i,j = 1,...,n. \end{cases}$$

Ясно, что для любых $x = \left\{x_j\right\}_{j=1}^n$, $y = \left\{y_j\right\}_{j=1}^n \in R^n$ верно равенство $[x,y] = x^T I_n^{(p)} y$, где x^T- вектор-строка, транспонированная к вектор-столбцу x.

Псевдоортогональная подгруппа в группе $GL(n,R)$ определяется равенствами:

$$O(n,p) = \{g \in GL(n,R) : g^T I_n^{(p)} g = I_n^{(p)}\} =$$
$$\{g \in GL(n,R) : [gx,gy] = [x,y] \text{ для любых } x,y \in R^n\},$$

где g^T- транспонированная матрица от g матрицы.

Через

$$SO(n,p) = \{g \in O(n,p) : \det g = 1\}$$

обозначается специальная псевдоортогональная подгруппа в $GL(n,R)$.

Путем в R^n называют вектор-функцию $x(t) = \left\{x_j(t)\right\}_{j=1}^n : (0,1) \to R^n$, у которой все координатные функции $x_j : (0,1) \to R$ являются бесконечно дифференцируемыми. Производная r-го порядка от пути $x(t) = \left\{x_j(t)\right\}_{j=1}^n$ есть вектор-функция $x^{(r)}(t) = \left\{x_j^{(r)}(t)\right\}_{j=1}^n$, где $x_j^{(r)}(t)$ - r-я производная координатной функции $x_j(t)$, $t \in$

$(0,1)$, $j=1,2,...,n$, $r=1,2,...$. Ясно, что вектор-функция $x^{(r)}(t)$ также является путем в R^n при каждом $r=1,2,...$.

Для произвольного пути $x(t)=\{x_j(t)\}_{j=1}^n$ через $M(x)(t)$ обозначим $n\times n$-матрицу, где j-й столбец имеет координаты $x_i^{(j-1)}(t), x_i^{(0)}(t)=x_i(t)$, $i,j=1,...,n$, а через $M^{(1)}(x)(t)$ обозначим матрицу $\left(x_i^{(j)}(t)\right)_{i,j=1}^n$.

Путь $x(t)$ называется сильно регулярной, если $\det M(x(t))\neq 0$ при всех $t\in(0,1)$.

Пусть G - подгруппа группы $GL(n,R)$. Два пути $x(t)$ и $y(t)$ называются G-эквивалентными, если существует такой элемент $g\in G$, что $y(t)=gx(t)$ для всех $t\in(0,1)$. В этом случае $y^{(j)}(t)=gx^{(j)}(t)$, $j=1,2,...$, и поэтому G-эквивалентность путей $x(t)$ и $y(t)$ равносильна выполнению равенства $M(y(t))=gM(x(t))$ при всех $t\in(0,1)$.

Известны следующие необходимые и достаточные условия G - эквивалентности сильно регулярных путей $x(t)$ и $y(t)$, описываемые с помощью матриц $M(x(t))$ и $M(y(t))$, в случае, когда G есть одна из групп $O(n,p)$ в $SO(n,p)$ [1, гл.3,§3.2. теорема 3.2.1].

Теорема 1. (i). *Два сильно регулярных пути* $x(t)$ *и* $y(t)$ *являются* $O(n,p)$-*эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства*

$$M^{-1}(x(t))M^{(1)}(x(t))=M^{-1}(y(t))M^{(1)}(y(t)) \quad (1)$$

$$M^{T}(x)(t)I_n^{(p)}M(x)(t)=M^{T}(y)(t)I_n^{(p)}M(y)(t) \quad (2)$$

для всех $t\in(0,1)$.

(ii). *Два сильно регулярных пути* $x(t)$ *и* $y(t)$ $SO(n,p)$-*эквивалентны в том и только том случае, если выполнены равенства* (**1**), (**2**) *и*

$$\det M(x)(t)=\det M(y)(t)$$

для всех $t\in(0,1)$.

В следующей теореме приводится критерий $O(n,p)$- эквивалентности (соответственно, $SO(n,p)$- эквивалентности) путей, использующие билинейную форму $[x,y]$ [1, гл.3,§3.2. теорема 3.2.2-3.2.3], [8, теоремы 4 и 5].

Теорема 2. *Два сильно регулярных пути* $x(t)$ *и* $y(t)$ $O(n,p)$-*эквивалентны (соответственно,* $SO(n,p)$-*эквивалентны) тогда и только тогда, когда*

$$[x^{(k)}(t),x^{(k)}(t)]=[y^{(k)}(t),y^{(k)}(t)]$$

для всех $t\in(0,1)$, $k=0,...,n-1$ *(соответственно,*

$$[x^{(k)}(t),x^{(k)}(t)]=[y^{(k)}(t),y^{(k)}(t)]$$

и

$$\det M(x)(t)=\det M(y)(t)$$

для всех $t\in(0,1)$, $k=0,...,n-2$*).*

Обозначим через $Aff(R^n)$ группу всех аффинных преобразований пространства R^n. Каждое преобразование из $Aff(R^n)$ является суперпозицией линейного невырожденного преобразования $g \in GL(n,R)$ и сдвига, порожденного элементом $u = \{u_i\}_{i=1}^{n} \in R^n$, т.е. аффинное преобразование $(u,g) \in Aff(R^n)$ действует в R^n по правилу $(u,g)(x) = g(x) + u$, где $x, u \in R^n$, $g \in GL(n,R)$.

Операция умножения в группе $Aff(R^n)$ определяется равенством $(u,g)(v,h) = (u+gv, gh)$, где $u, v \in R^n$, $g, h \in GL(n,R)$, т.е. группа $Aff(R^n)$ есть полупрямое произведение групп R^n и $GL(n,R)$, что записывается в виде $Aff(R^n) = R^n \triangleleft GL(n,R)$. Если G – подгруппа в $GL(n,R)$, то множество $R^n \triangleleft G = \{(u,g) \in R^n \triangleleft GL(n,R) : g \in G\}$ является подгруппой в $R^n \triangleleft GL(n,R)$. Два пути $x(t)$ и $y(t)$, заданные в R^n, называются $R^n \triangleleft G$ – эквивалентными, если существует такое $(u,g) \in R^n \triangleleft G$, что $y(t) = gx(t) + u$ для всех $t \in (0,1)$.

Следующее утверждение сводит задачу о $R^n \triangleleft G$- эквивалентности путей $x(t)$ и $y(t)$ к задаче G-эквивалентности путей $x^{(1)}(t)$ и $y^{(1)}(t)$ [1, гл. 1, §1.6, утверждение 1.6.3].

Утверждение 1. Два пути $x(t)$ и $y(t)$, заданные в R^n, являются $R^n \triangleleft G$ - эквивалентными тогда и только тогда, когда пути $x^{(1)}(t)$ и $y^{(1)}(t)$ - G - эквивалентны.

Из утверждения 1 и теоремы 2 получим следующий полезный критерий $R^n \triangleleft G$ - эквивалентности путей $x(t)$ и $y(t)$, в случае, когда G есть одна из групп $O(n,p)$ и $SO(n,p)$.

Теорема 3. *Пусть* $x(t)$ *и* $y(t)$ *два пути в* R^n*, для которых пути* $x^{(1)}(t)$ *и* $y^{(1)}(t)$ *- сильно регулярны. Тогда* $x(t)$ *и* $y(t)$ *-* $R^n \triangleleft O(n,p)$ *- эквивалентны (соответственно,* $R^n \triangleleft SO(n,p)$ *- эквивалентны) тогда и только тогда, когда*

$$[x^k(t), x^k(t)] = [y^k(t), y^k(t)]$$

для всех $t \in (0,1)$ *и* $k = 1, ..., n$, *(соответственно,*

$$[x^k(t), x^k(t)] = [y^k(t), y^k(t)]$$

и

$$\det M^{(1)}(x(t)) = \det M^{(1)}(y(t))$$

для всех $t \in (0,1)$ *и* $k = 1, ..., n-1$*).*

Псевдогалилеево пространство

Определим в R^n псевдогалилееву метрику $d_p(x,y)$, равенствами

$$d_p^2(x,y) = \begin{cases} (x_1 - y_1)^2, \text{если } x_1 \neq y_1 \\ \sum\limits_{i=2}^{p} (x_j - y_j)^2 - \sum\limits_{j=p+1}^{n} (x_j - y_j)^2, \text{если } x_1 = y_1, \end{cases}$$

где $x = \{x_j\}_{j=1}^{n}$, $y = \{y_j\}_{j=1}^{n} \in R^n$.

Пару (R^n, d_p) называют псевдогалилеевым пространством [3, 2. глава 5, §4] и обозначают через ${}^p\Gamma_n$.

Пусть $e_i = (0,...,0,1,...,0)$ стандартный базис в R^n, где единица стоит на i - ом месте, $i = 1,...,n$. Положим

$$U_n = \{\alpha e_1 : \alpha \in R\}; V_n = Lin(\{e_i\}_{i=2}^n) = \{\sum_{i=2}^n \alpha_i e_i : \alpha_i \in R,\ i = 2,...,n\}$$

и рассмотрим в $GL(n,R)$ подгруппу $G_n = \{g \in GL(n,R) : gU_n = U_n gV_n = V_n\}$. Если $g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in G_n$, то $g(e_1) = \{y_1,0,...,0\} \in U_n$, и поэтому $g_{i1} = (ge_1,e_i) = 0$ при $i = 2,...,n$.

Рассмотрим множество $\Gamma O(n,p)$ тех $g \in G_n$, для которых $g_{11} = \pm 1$ и сужение ${}^g/_{V_n}$ преобразования g на подпространство V_n есть псевдоортогональное преобразование. Если $g \in \Gamma O(n,p)$ и $x = \{x_j\}_{j=1}^n, y = \{y_j\}_{j=1}^n \in R^n$, $x_1 = y_1 = 0$,то $gx = \{u_j\}_{j=n}^n$, $gy = \{v_j\}_{j=n}^n$ где $u_1 = v_1 = 0$. Взяв в V_n базис $e_2,...,e_n$ и отождествляя его V_n с пространством R^{n-1}, получим, что для любого $g \in \Gamma O(n,p)$ сужение ${}^g/_{V_n} = h = (h_{ij})_{i,j=2}^n$ преобразования g на V есть элемент группы $O(n-1,p)$, при этом $h_{ij} = (he_j,e_i) = (ge_j,e_i) = g_{ij}$ для всех $i,j = 2,...,n$.

Следовательно,

$$\Gamma O(n,p) = \{g = (g_{ij})_{i,j=1}^n \in GL(n,R) : g_{11} = \pm 1, g_{i1} = 0, i = 2,...,n,$$

$$gV_n = V_n, (g_{ij})_{i,j=2}^n \in O(n-1,p). \tag{3}$$

Группу $\Gamma O(n,p)$ будем называть *группой псевдогалилеевых преобразований* пространства ${}^p\Gamma_n$. Множество $S\Gamma O(n,p) = \{g \in \Gamma O(n,p) : \det g = 1\}$ является подгруппой в $\Gamma O(n,p)$, и эта подгруппа называется *специальной псевдогалилеевой группой.*

Рассмотрим произвольный путь $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$, $t \in (0,1)$, в псевдогалилевом пространстве ${}^p\Gamma_n$, и положим $M_{n-1}(x(t)) = (x_i^{(j-z)}(t))_{i,j=2}^n$. Будем говорить, что путь $x(t)$ является ΓO - регулярным, если $\det M_{n-1}(x(t)) \neq 0$ при всех $t \in (0,1)$.

Следующая теорема является вариантом теоремы 1 для групп $\Gamma O(n,p)$ и $S\Gamma O(n,p)$.

Теорема 4. ΓO - *регулярные пути* $x(t)$ *и* $y(t)$ *являются* $\Gamma O(n,p)$ - *эквивалентными (соответственно,* $S\Gamma O(n,p)$ - *эквивалентными) тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства*

$$y_1(t) = \pm x_1(t); \tag{4}$$

$$M_{n-1}^{-1}(x(t))M_{n-1}^{(1)}(x(t)) = M_{n-1}^{-1}(y(t))M_{n-1}^{(1)}(y(t)); \tag{5}$$

и

$$M_{n-1}^T(x(t))IM_{n-1}(x(t)) = M_{n-1}^T(y(t))IM_{n-1}(y(t)); \tag{6}$$

для всех $t \in (0,1)$ *(соответственно, выполнены равенства (5), (6) и равенства*

$$y_n(t) = x_n(t); \tag{7}$$

$$\det M_{n-1}(x(t)) = \det M_{n-1}(y(t)); \tag{8}$$

для всех $t \in (0,1)$.

С помощью теорем 2 и 4 получаем следующий критерии для $\Gamma O(n,p)$ - эквивалентности (соответственно $S\Gamma O(n,p)$ - эквивалентности) ГО - регулярных путей.

Теорема 5. ГО - *регулярные пути* $x(t)$ *и* $y(t)$ *являются* $\Gamma O(n,p)$ - *эквивалентными* ($S\Gamma O(n,p)$ - *эквивалентными) в том и только в том, случае, когда выполнены равенство (4) и равенства*

$$\sum_{i=2}^{p}(x_i^{(k)}(t))^2-\sum_{i=p+1}^{n}(x_i^{(k)}(t))^2=\sum_{i=2}^{p}(y_i^{(k)}(t))^2-\sum_{i=p+1}^{n}(y_i^{(k)}(t))^2 \tag{9}$$

для всех $t \in (0,1)$ *и* $k=0,1,2,...,n-2$, *(соответственно, выполнены равенства (7), (8) и равенство (9) для всех* $t \in (0,1)$ *и*
$k=0,1,2,...,n-3$.

Из утверждения 1 и теоремы 5 вытекают следующие необходимые и достаточные условия для $R^n \lhd \Gamma O(n,p)$ - эквивалентности ($R^n \lhd S\Gamma O(n,p)$ - эквивалентности) путей.

Теорема 6. *Пусть* $x(t)$ *и* $y(t)$ *такие пути в* R^n *, для которых пути* $x^{(1)}(t)$ *и* $y^{(1)}(t)$ - ГО - *регулярны. Тогда*

(i). *Пути* $x(t)$ *и* $y(t)$ *являются* $R^n \lhd \Gamma O(n,p)$ *эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства*

$$y_1^{(1)}(t)=\pm x_1^{(1)}(t); \tag{10}$$

$$\sum_{i=2}^{p}(x_i^{(k)}(t))^2-\sum_{i=p+1}^{n}(x_i^{(k)}(t))^2=\sum_{i=2}^{p}(y_i^{(k)}(t))^2-\sum_{i=p+1}^{n}(y_i^{(k)}(t))^2 \tag{11}$$

для всех $t \in (0,1)$ *и* $k=1,...,n-1$

(ii). *Пути* $x(t)$ *и* $y(t)$ *являются* $R^n \lhd S\Gamma O(n,p)$ - *эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства (10), (11) при* $k=1,...,n-2$, *и равенства*

$$y_1^{(1)}(t)=x_1^{(1)}(t),$$

$$\det M_{n-1}^{(1)}(x(t))=\det M_{n-1}^{(1)}(y(t))$$

при каждом $t \in (0,1)$.

Эквивалентность путей в некоторой неевклидовой геометрии

Теперь в R^n рассмотрим метрику, определяемую равенством

$$d_p^2(x,y)=\begin{cases}(x_1-y_1)^2, \text{ если } x_1\neq y_1;\\ \\ (x_n-y_n)^2, \text{ если } x_1=y_1,\ x_n\neq y_n;\\ \sum\limits_{i=2}^{p}(x_j-y_j)^2-\sum\limits_{j=p+1}^{n-1}(x_j-y_j)^2, \text{ если } x_1=y_1, x_n=y_n.\end{cases}$$

Выбираем

$$U_n = \left\{\alpha \overrightarrow{e}_1 : \alpha \in R\right\}$$

$$V_n = \mathrm{Lin}\left(\left\{\overrightarrow{e}_i\right\}_{i=2}^{n-1}\right) = \left\{\sum_{i=2}^{n-1} \alpha_i \overrightarrow{e}_i : \alpha_i \in R, i = 2, ..., n-2\right\}$$

$$W_n = \left\{\alpha \overrightarrow{e}_n : \alpha \in R\right\}$$

и в группе $GL(n, R)$ рассмотрим подгруппу

$$G'_n = \{g \in GL(n, R) : gU_n = U_n, gV_n = V_n, gW_n = W_n\}.$$

Если $g = (g_{ij})_{i,j=1}^{n} \in G'_n$, то $g(e_1) = \{y_1, 0, ..., 0\} \in U_n$, $g(e_n) = \{0, 0, ..., y_n\} \in W_n$ и поэтому $g_{i1} = (ge_1, e_i) = 0$ при $i = 2, ..., n$, а $g_{in} = (ge_n, e_i) = 0$ если $i = 1, ..., n-1$.

Матрица $g \in G'_n$ имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n-1} & 0 \\ 0 & g_{21} & \cdots & g_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & g_{n-12} & \cdots & g_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & g_{n2} & \cdots & g_{nn-1} & g_{nn} \end{pmatrix}, \; g_{11} \neq 0, \; g_{nn} \neq 0. \tag{12}$$

Очевидно, что любого $g \in GL(n, R)$, имеющего вид (**12**), верно равенство $gU_n = U_n$, $gW_n = W_n$. Рассмотрим множество ${}^{p}R_nO(n, p)$ тех $g \in G'_n$, для которых $g_{11} = \pm 1$, $g_{nn} = \pm 1$ и сужение ${}^{g}/_{V_n}$ преобразования g на V_n есть псевдоортогональное преобразование. Базис $e_2, ..., e_{n-1} \in V_n$ и отождествив V_n с R^{n-2}, получим, что для любого $g \in^{p} R_nO(n, p)$ преобразование $h = (h_{ij})_{i,j=2}^{n-1} = {}^{g}/_{V_n}$ является элементом группы $O(n-2, p-1)$, при этом $h_{ij} = (he_j, e_i) = (ge_j, e_i)$ для всех $i, j = 2, ..., n-1$.

Следовательно,

$$\begin{gathered} {}^{p}R_nO(n, p) = \{g = (g_{ij})_{i,j=1}^{n} \in GL(n, R) : g_{11} = \pm 1, g_{i1} = 0, i = 2, ...n, \\ g_{nn} = \pm 1, g_{in} = 0, i = 1, ..., n-1, gV_n = V_n, (g_{ij})_{i,j=2}^{n-1} \in O(n-2, p-1)\}. \end{gathered} \tag{13}$$

Утверждение 2. Преобразование $g = (g_{ij})_{i,j=1}^{n} \in G'_n$ принадлежит множеству ${}^{p}R_nO(n, R)$ в том и только том случае, если $d_p^2(gx, gy) = d_p^2(x, y)$ для всех $x, y \in R^n$.

Доказательство. Если $g = (g_{ij})_{i,j=1}^{n} \in^{p} R_nO(n, R)$, $x = \{x_j\}_{j=1}^{n}$, $y = \{y_j\}_{j=1}^{n} \in R^n$, $x_i = y_i$ для всех $i = 2, ..., n-1$, то $g_{11} = \pm 1$, $g_{i1} = 0$ при $i = 2, ..., n$, и $g_{nn} = \pm 1$, $g_{in} = 0$ если $i = 1, ..., n-1$, $d_p^2(x, y) = (x_1 - y_1)^2$ и $d_p^2(x, y) = (x_n - y_n)^2$. Следовательно,

$$gx = \left\{\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_j\right\}_{i=1}^{n} = \left\{\pm x_1 + \sum_{j=2}^{n-1} g_{1j}x_j, \sum_{j=2}^{n-1} g_{2j}x_j, ..., \sum_{j=2}^{n-1} g_{n-1j}x_j, \pm x_n + \sum_{j=2}^{n-1} g_{nj}x_j\right\},$$

$$gy = \left\{\sum_{j=1}^{n} g_{ij}y_j\right\}_{i=1}^{n} = \left\{\pm y_1 + \sum_{j=2}^{n-1} g_{1j}y_j, \sum_{j=2}^{n-1} g_{2j}y_j, ..., \sum_{j=2}^{n-1} g_{n-1j}y_j, \pm y_n + \sum_{j=2}^{n-1} g_{nj}y_j\right\}$$

и поэтому $d_p^2(gx, gy) = (x_1 - y_1)^2 = d_p^2(x, y)$, $d_p^2(gx, gy) = (x_n - y_n)^2 = d_p^2(x, y)$.

Если же $x_1 = y_1$, $x_n = y_n$ то из включения $^g/_{V_n} \in O(n-2, p-1)$ также следует $d_p^2(gx, gy) = d_p^2(x, y)$.

Предположим теперь, что $g \in G'_n$ и $d_p^2(gx, gy) = d_p^2(x, y)$ для всех $x, y \in R^n$. Так как $g(U_n) = U_n$, то $g_{21} = g_{31} = ... = g_{n1} = 0$ и $g(W_n) = W_n$, то $g_{1n} = g_{1n} = ... = g_{n-1\,n} = 0$. Взяв $x = \{x_j\}_{j=1}^n$, $y = \{y_j\}_{j=1}^n \in R^n$, где $x_1 = 1$, $x_j = 0$, $j = 2, ..., n$, $y_j = 0$, $j = 1, ..., n$ получим, что $d_p^2(x, y) = (x_1 - y_1)^2 = 1$ и $d_p^2(gx, gy) = (g_{11}x_1 - g_{11}y_1) = g_{11}^2$, т.е.$g_{11} = \pm 1$, и $x_j = 0$, $j = 1, ..., n$, $y_n = 1$, $y_j = 0$, $j = 1, ..., n-1$, получим, что $d_p^2(x, y) = (x_n - y_n)^2 = 1$ и $d_p^2(gx, gy) = (g_{nn}x_1 - g_{nn}y_1)^2 = g_{nn}^2$, т.е.$g_{nn} = \pm 1$.

Если $x_1 = y_1 = 0$, $x_n = y_n = 0$, то $x, y \in V_n$ и поэтому $gx, gy \in V_n$. Следовательно, равенство $d_p^2(gx, gy) = d_p^2(x, y)$ влечет $[gx, gy] = [x, y]$. Это означает, что $^g/_{V_n} \in O(n-2, p-1)$, т.е. $g \in^p R_n O(n, R)$.

□

В следующем утверждении устанавливается, что $^pR_nO(n, p)$ является группой относительно алгебраической операции, индуцируемой из группы $GL(n, R)$.

Утверждение 3. $^pR_nO(n, p)$ есть подгруппа в $GL(n, R)$.

Доказательство. Пусть $g_1, g_2 \in^p R_nO(n, p)$, т.е.

$$g_i = \begin{pmatrix} \pm 1 & g_{12}^{(i)} & ... & g_{1n-1}^{(i)} & 0 \\ 0 & g_{22}^{(i)} & ... & g_{2n-1}^{(i)} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & g_{n-12}^{(i)} & ... & g_{n-1n-1}^{(i)} & 0 \\ 0 & g_{n2}^{(i)} & ... & g_{n-1n}^{(i)} & \pm 1 \end{pmatrix} \in^p R_nO(n, p)$$

где $\begin{pmatrix} g_{22}^{(i)} & ... & g_{2n-1}^{(i)} \\ ... & ... & ... \\ g_{n-12}^{(i)} & ... & g_{n-1n-1}^{(i)} \end{pmatrix} \in O(n-2, p-1)$, $i = 1, 2$ то $(g_1g_2)(V_n) = V_n$ и

$$g_1g_2 = \begin{pmatrix} \pm 1 & a_{12} & ... & a_{1n-1} & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n-1} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & a_{n-12} & ... & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & a_{n2} & ... & a_{nn-1} & \pm 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{pmatrix} a_{22} & ... & a_{2n-1} \\ ... & ... & ... \\ a_{n-12} & ... & a_{n-1n-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} g_{22}^{(1)} & ... & g_{2n-1}^{(1)} \\ ... & ... & ... \\ g_{n-12}^{(1)} & ... & g_{n-1n-1}^{(1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{22}^{(2)} & ... & g_{2n-1}^{(2)} \\ ... & ... & ... \\ g_{n-12}^{(2)} & ... & g_{n-1n-1}^{(2)} \end{pmatrix} \in O(n-2, p-1).$$

Следовательно, $g_1 \cdot g_2 \in^p R_nO(n, p)$.

Далее для любого $h = (h_{ij})_{i,j=1}^n \in^p R_nO(n, p)$ имеем

$$h^{-1} = (b_{ij})_{i,j=1}^n = \frac{1}{\det h}(a_{ij})_{i,j=1}^n,$$

где $a_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ji}$, здесь M_{ji} есть минор, получаемый при вычеркивании j-й строки и i-го столбца. Следовательно,

$$a_{1i} = (-1)^{i+1}\det \begin{pmatrix} 0 & h_{22} & ... & h_{2,i-1} & h_{2,i+1} & ... & h_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & h_{n2} & ... & h_{n,i-1} & h_{n,i+1} & ... & h_{n,n} \end{pmatrix} = 0, i = 2, ..., n,$$

и поэтому $b_{i1}=0$ при $i=2,...,n$ и

$$a_{ni}=(-1)^{i+1}\det\begin{pmatrix} h_{11} & \ldots & h_{1,i+1} & h_{1,i-1} & \ldots & h_{1,n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n-1,1} & \ldots & h_{n-1,i+1} & h_{n-1,i-1} & \ldots & h_{n-1,n-1} & 0 \end{pmatrix}=0, i=1,...,n-1,$$

$b_{ni}=0$ если $i=1,...,n-1$. Кроме того,

$$\det h=h_{11}M_{11}=h_{11}a_{11}=\pm a_{11},$$

т.е. $b_{11}=\pm 1$ и

$$\det h=h_{nn}M_{nn}=h_{nn}a_{nn}=\pm a_{nn}$$

т.е. $b_{nn}=\pm 1$. Поскольку h^{-1} есть биекция, то $h^{-1}(V_n)=V_n$, и включение ${}^{h}/_{V_n}\in O(n-2,p-1)$ влечет ${}^{h^{-1}}/_{V_n}\in O(n-2,p-1)$. Следовательно, $h^{-1}\in^p R_nO(n,p)$.

□

Группу ${}^pR_nO(n,p)$ будем называть группой псевдоевклидовых преобразований пространства ${}^pR_n$. Множество $S^pR_nO(n,p)=\{g\in^p R_nO(n,p):\det g=1\}$ является подгруппой в ${}^pR_nO(n,p)$, которая называется *специальной псевдоевклидовой группой.*

Пусть $x(t)=\left\{x_j(t)\right\}_{j=1}^{n}$ произвольный путь в псевдогалилеевом пространстве ${}^pR_n$, и положим $M_{n-2}\left(\overrightarrow{x}(t)\right)=\left(x_j^{(i)}(t)\right)_{\substack{i=0,1,...,n-3\\ j=2,...,n-1}}$, $x_j^{(0)}(t)=x_j(t)$, $j=2,...,n-1$. Будем говорить, что путь $x(t)$ является ${}^pR_nO$- регулярным, если $M_{n-2}\left(\overrightarrow{x}(t)\right)\neq 0$ при всех $t\in(0,1)$.

Вариантом теоремы [1] для групп ${}^pR_nO(n,p)$ и $S^pR_nO(n,p)$ является

Теорема 7. ${}^pR_nO$ - *регулярные пути* $x(t)$ *и* $y(t)$ *являются* ${}^pR_nO(n,p)$ - *эквивалентными (соответственно* $S^pR_nO(n,p)$*-эквивалентными) тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства*

$$y_1(t)=\pm x_1(t),\, y_n(t)=\pm x_n(t) \tag{14}$$

$$M_{n-2}^{-1}(x(t))M_{n-2}^{'}(x(t))=M_{n-2}^{-1}(y(t))M_{n-2}^{'}(y(t)) \tag{15}$$

и

$$M_{n-2}^{T}(x(t))\cdot I_{n-2}^{(p)}\cdot M_{n-2}(x(t))=M_{n-2}^{T}(y(t))\cdot I_{n-2}^{(p)}\cdot M_{n-2}(y(t)) \tag{16}$$

для всех $t\in(0,1)$ *(соответственно, выполнены равенства* (**15**), (**16**) *и равенства*

$$y_1(t)=x_1(t),\, y_n(t)=x_n(t) \tag{17}$$

$$\det M_{n-2}(x(t))=\det M_{n-2}(x(t)) \tag{18}$$

для всех $t\in(0,1)$.

Доказательство. Если пути $x(t)$ и $y(t)$ ${}^pR_nO(n,p)$ - эквивалентны, то существует такое $g=(g_{ij})_{i,j=1}^{n}\in^p R_nO(n,p)$, что $y(t)=gx(t)$ для всех $t\in(0,1)$. Так как $g_{11}=\pm 1$, $g_{in}=0$ для всех $i=2,...,n$, и $g_{nn}=\pm 1$, $g_{in}=0$ для всех $i=1,...,n-1$,

$gV_n = V_n$ то $g\{x_1(t),0,...,0\} = \{\pm x_1(t),0,...,0\}$, $g\{0,...,0,x_n(t)\} = \{0,...,0,\pm x_n(t)\}$ и $g\{0,x_2(t),...,x_{n-1}(t),0\} = \{0,z_2(t),...,z_{n-1}(t),0\}$.

Поэтому

$$y(t) = \{y_1(t),y_2(t),...,y_n(t)\} = g\{x_1(t),y_2(t),...,x_n(t)\} =$$

$$g\{x_1(t),0,...,0\} + g\{0,x_2(t),...,x_{n-1}(t),0\} + g\{0,0,...,x_n(t)\} =$$

$$\{\pm x_1(t),0,...,0\} + \{0,z_2(t),...,z_{n-1}(t),0\} + \{0,0,...,\pm x_n(t)\} =$$

$$\{\pm x_1(t),z_2(t),...,z_{n-1}(t),\pm x_n(t)\}$$

т.е. $y_1(t) = \pm x_1(t), y_n(t) = \pm x_n(t)$ для всех $t \in (0,1)$ и $\{y_2(t),...,y_{n-1}(t)\} = h\{x_2(t),...,x_{n-1}(t)\}$, где $h = (g_{ij})_{i,j=2}^{n-1} \in O(n-2,p-1)$.

Используя теперь п.(**i**) теоремы [**1**], получим справедливость нужных нам равенств (**14**),(**15**).

Пусть теперь выполняются равенства (**14**)-(**16**). Из п.(**i**) теоремы [**1**] и из равенств (**15**),(**16**) вытекает существование преобразования
$h = \begin{pmatrix} g_{22} & \cdots & g_{22} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n-12} & \cdots & g_{n-1n-1} \end{pmatrix} \in O(n-2,p-1)$, для которого
$\{y_2(t),...,y_{n-1}(t)\} = h\{x_2(t),...,x_{n-1}(t)\}$. Если
$g = (g_{ij})_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & \cdots & g_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & g_{n-12} & \cdots & g_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ то $g \in O(n,p)$, при этом
$g(\{x_1(t),...,x_n(t)\}) = \{\sum\limits_{j=1}^{n} g_{ij}x_j(t)\}_{i=1}^{n} = \{g_{11}x_1(t), \sum\limits_{j=2}^{n-1} g_{2j}x_j(t),..., \sum\limits_{j=2}^{n-1} g_{n-1j}x_j(t), g_{nn}x_n(t)\} =$

$\{\pm x_1(t),y_2(t),...,y_{n-1}(t),\pm x_n(t)\}$.

Согласно равенству (**14**) имеем $y_1(t) = \pm x_1(t), y_n(t) = \pm x_n(t)$. В случае равенства $y_1(t) = -x_1(t)$, $y_n(t) = -x_n(t)$ полагаем $g_{11} = -1$, $g_{nn} = -1$ если же $y_1(t) = x_1(t)$, $y_n(t) = x_n(t)$ то берем $g_{11} = 1$, $g_{nn} = 1$. В обоих случаях получим $g \in^p R_n O(n,p)$ и $y(t) = gx(t)$ для всех $t \in (0,1)$. □

Доказательство теоремы [7] для группы $S^pR_nO(n,p)$ использует п. (**ii**) теоремы [**1**] и аналогично предыдущему доказательству.

С помощью теорем [**2**] и [4] получаем следующий критерий для ${}^pR_nO(n,p)$ -эквивалентности (соответственно, $S^pR_nO(n,p)$ -эквивалентности) S^pR_nO -регулярных путей.

Теорема 8. ${}^pR_nO$*-регулярные пути* $x(t)$ *и* $y(t)$ *являются* ${}^pR_nO(n,p)$ *эквивалентными (соответственно,* $S^pR_nO(n,p)$*-эквивалентными) в том и только том случае, если выполнены равенства (***14***) и*

$$\sum_{i=2}^{p}\left(x_i^{(k)}(t)\right)^2 - \sum_{i=p+1}^{n-1}\left(x_i^{(k)}(t)\right)^2 = \sum_{i=2}^{p}\left(y_i^{(k)}(t)\right)^2 - \sum_{i=p+1}^{n-1}\left(y_i^{(k)}(t)\right)^2 \qquad (19)$$

для всех $k=1,...,n-2$ *и* $t\in(0,1)$ *(соответственно, выполнены равенства* (**17**)*,* (**18**) *и равенство* (**19**) *для всех* $k=1,...,n-3$ *и* $t\in(0,1)$*).*

Доказательство. Если пути $x(t)$ и $y(t)$ ${}^pR_nO(n,p)$- эквивалентны, то найдется такое $(g_{ij})_{i,j=1}^{n}\in{}^pR_nO(n,p)$, что $y(t)=gx(t)$. Поскольку $h=(g_{ij})_{i,j=2}^{n-1}\in O(n-2,p-1)$ и $\{y_2(t),...,y_{n-1}(t)\}=h\{x_2(t),...,x_{n-1}(t)\}$, то в силу теоремы [**2**] верны равенства (**19**) для всех $k=1,...,n-2$ и $t\in(0,1)$. Кроме того, согласно теореме [**4**] справедливо (**14**).

Обратно, пусть верны равенства (**14**) и (**19**). В силу теоремы [**2**] существует такое $h=(g_{ij})_{i,j=2}^{n-1}\in O(n-2,p-1)$, что $\{y_2(t),...,y_{n-1}(t)\}=h\{x_2(t),...,x_{n-1}(t)\}$.

Для матрицы $g=(g_{ij})_{i,j=1}^{n}=\begin{pmatrix}\pm1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & h_{22} & \dots & h_{2n-1} & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & h_{n-12} & \dots & h_{n-1n-1} & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \pm1\end{pmatrix}\in{}^pR_nO(n,p)$ для всех $t\in(0,1)$, имеем $y(t)=gx(t)$. $\square$

Доказательство теоремы [**8**] для группы $S^pR_nO(n,p)$ повторяет предыдущее доказательство для группы ${}^pR_nO(n,p)$.

Из утверждения [**1**] и теоремы [**8**] вытекают следующие необходимые и достаточные условия для $R^n\lhd{}^pR_nO(n,p)$ - эквивалентности ($R^n\lhd S^pR_nO(n,p)$ - эквивалентности) путей.

Теорема 9. *Пусть* $x(t)$ *и* $y(t)$ *такие пути в* R^n*, для которых пути* $x^1(t)$ *и* $y^1(t)$ – ${}^pR_nO$ *- регулярны. Тогда*

(i). *Пути* $x(t)$ *и* $y(t)$ *являются* $R^n\lhd{}^pR_nO(n,p)$ *эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства*

$$y_1^1(t)=\pm x_1^1(t),\ \ y_n^1(t)=\pm x_n^1(t) \tag{20}$$

$$\sum_{i=2}^{p}\left(x_i^{(k)}(t)\right)^2-\sum_{i=p+1}^{n-1}\left(x_i^{(k)}(t)\right)^2=\sum_{i=2}^{p}\left(y_i^{(k)}(t)\right)^2-\sum_{i=p+1}^{n-1}\left(y_i^{(k)}(t)\right)^2 \tag{21}$$

для всех $t\in(0,1)$ *и* $k=2,...,n-1$.

(ii). *Пути* $x(t)$ *и* $y(t)$ *являются* $R^n\lhd S^pR_nO(n,p)$ *- эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены равенства* (**20**)*,* (**21**) *при* $k=2,...,n-2$*, и равенства*

$$y_1^1(t)=\pm x_1^1(t),\ \ y_n^1(t)=\pm x_n^1(t),$$
$$\det M_{n-2}'(x(t))=\det M_{n-2}'(y(t))$$

при каждом $t\in(0,1)$.

Заключение

Установлены необходимые и достаточные условия эквивалентности путей, лежащих в R^n, относительно действия специальной псевдоевклидовой группой.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы

1. Муминов К. К., Чилин В. И. *Эквивалентность кривых в конечномерных векторных пространствах.* Deutschland (Германия): LAMBERT Academic Publishing, 2015. 122 с.
2. Муминов К. К. Чилин В. И. Базисы трансцендентности в дифференциальном поле инвариантов псевдогалилеевой группы, *Известия ВУЗов, Математика*, 2019. №3, С. 19–31 DOI: 10.26907/0021-3446-2019-3-19-31.
3. Розенфельд Б. А. *Неевклидовы пространства.* М.: Наука, 1969. 549 с.
4. Александров П. С. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* М.: Наука, 1979. 512 с.
5. Муминов К. К. Эквивалентность путей относительно действия симплектической группы, *Известия ВУЗов, Математика*, 2002. №7, С. 27–38.
6. Муминов К. К. Эквивалентность путей и поверхностей для действия псевдоортогональной группы, *Узбекский математический журнал*, 2005. №2, С. 35–43.
7. Муминов К. К. Эквивлентность кривых относительно действия симплектической группы, *Известия ВУЗов, Математика*, 2009. №6, С. 31–36.
8. Муминов К. К., Гаффоров Р. А. Эквивалентнтность путей относительно действия специальной псевдоортогональной группы, *Узбекский математический журнал*, 2010. №4, С. 135–141.
9. Муминов К. К., Гаффоров Р. А. Эквивалентность конечных систем путей относительно действия специальной псевдоортогональной группы, *Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия Физико-математические науки*, 2011. Т. 24 (63), №1, С. 90–100.
10. Khadjiev Dj., Peksen O. On invariants of curves in centro – affine geometry, *J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ)*, 2004. vol. 44, no. 3, pp. 603–613 DOI: 10.1215/kjm/1250283086.
11. Khadjiev Dj., Peksen O. The complete system of global integral and differential invariants for equi-affin curves, *Differential Geometry and its Applications*, 2004. vol. 20, no. 2, pp. 167–175 DOI: 10.1016/j.difgeo.2003.10.005.
12. Чилин В. И., Муминов К. К. Полная система дифференциальных инвариантов кривой в псевдоевклидовом пространстве, *Динамические системы*, 2013. Т. 3(31), №1-2, С. 135–149.
13. Чилин В. И., Муминов К. К. Классификация путей в геометрии Галилея, *Таврический вестник информатики и математики*, 2017. №1, С. 95–111.
14. Чилин В. И., Муминов К. К. Эквивалентность путей в геометрии Галлилея, *Итоги науки и техники Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры*, 2018. №144, С. 3–16 DOI: 10.1007/s.10958-020-04691-7.
15. Kolchin E. R. *Differential Algebra and Algebraic Groups.* New York-London: Academic Press, 1973.
16. Хаджиев Дж. *Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых.* Ташкент: ФАН, 1998. 136 с.

Гаффоров Рахматжон Абдукаххорович – преподаватель, математики и информатики факультета Ферганский государственного университета, г. Фергана, Республика Узбекистан, ORCID 0000-0002-4589-5421.

Муминов Кобилжон Кодирович – доктор физико-математических наук, профессор, механико-математического факультета Национального университета Узбекистан, г. Ташкент, Республика Узбекистан, ORCID 0000-0002-2445-749X.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2022. vol. 40. no. 3. pp. 28–41. ISSN 2079-6641

MSC 53A15, 53A55, 53B30 Research Article

Equivalence of paths in some non-Euclidean geometry

***R. A. Gafforov*[1], *K. K. Muminov*[2]**

[1] Fergana State University, 150100, Fergana, st. Murabbiylar, 19, Republic of Uzbekistan

[2] National University of Uzbekistan, 100174, Tashkent, Mirzo Ulugbek str., Republic of Uzbekistan

E-mail: gafforov.rahmatjon@mail.ru

Let G be a subgroup of the group of all reversible linear transformations of a finite-dimensional real space R^n. One of the problems of differential geometry is to find easily verifiable necessary and sufficient conditions that ensure that G is the equivalence of paths lying in R^n. The article establishes the necessary and sufficient conditions for the equivalence of paths in some non-Euclidean geometry.

Key words: pseugo-Galilean space, group of movements, regular path.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-28-41

Original article submitted: 22.09.2022 Revision submitted: 22.10.2022

For citation. Gafforov R. A., Muminov K. K. Equivalence of paths in some non-Euclidean geometry. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **40**: 3, 28-41. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-28-41

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

© Gafforov R. A., Muminov K. K., 2022

References

[1] Muminov K. K., Chilin V. I. Ekvivalentnost' krivykh v konechnomernykh prostranstvakh [Equivalence of curves in finite-dimensional spaces]. LAMBERT Academic Publishing. Deutschland (In Russian)

[2] Muminov K. K., Chilin V. I. Basis of trancendense in differential field of invariants of pseugo-Galilean group, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), 2019, no. 3, pp. 19–31. DOI: 10.26907/0021-3446-2019-3-19-31(In Russian)

The study was carried out without support from foundations.

[3] Rosenfeld B. A. Neyevklidovy prostranstva [Non-Euclidean spaces]. Moscow, Nauka, 1969 (In Russian)
[4] Alexandrov P. S. Kurs analiticheskoy geometrii i lineynoy algebry [Course of analytic geometry and linear algebra]. Moscow, Nauka. 1979 (In Russian)
[5] Muminov K. K. Equivalence of paths with respect to the action symplectic group. Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), 2002, 7, 27–28 (In Russian)
[6] Muminov K. K. Equivalence of paths and surfaces with respect to the action of the pseudoorthogonal group, Uzbek Math. Journal, 2005, 7, 35–43 (In Russian)
[7] Muminov K. K. Equivalence of curves with respect to the action of the symplectic group, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), 2009, 6, 31–36 (In Russian)
[8] Muminov K. K., Gafforov R. A. Equivalence of paths with respect to the action group of special pseudoorthogonal group, Uzbek Math. Journal, 2010, no. 4. pp. 135–141 (In Russian)
[9] Muminov K. K., Gafforov R. A. Equivalence of finite path systems with respect to the action of a special pseudo-orthogonal group. Scientific notes of the Taurida National University. V. I. Vernadsky. Series Physical and mathematical sciences, 2011, 24(63):1, 90-100 (In Russian)
[10] Khadjiev Dj., Peksen O. On invariants of curves in centro-affine geometry, J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ), 2004, 44:3, 603–613. DOI: 10.1215/kjm/1250283086
[11] Khadjiev Dj., Peksen, O. The complete system of global integral and differential invariants for equi-affin curves, Differential Geometry and its Applications, 2004. vol. 20, no. 2. pp. 167–175. DOI: 10.1016/j.difgeo.2003.10.005
[12] Chilin V. I., Muminov K. K. The complete system of differential invariants of a curve in pseudo-euclidean space. Din. Sist., 2013, 3(31):1-2, 135–149.
[13] Chilin V. I., Muminov, K. K. The classification of paths in the Galilean geometry, Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics, 2017, 1. 95–111.
[14] Chilin V. I., Muminov K. K. Equivalence of Paths in Galilean Geometry, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., 2018, no. 144. pp. 3–16. DOI: 10.1007/s.10958-020-04691-7
[15] Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups. New York-London. Academic Press. 1973.
[16] Khadjiev D. J. Prilozheniye teorii invariantov k differentsial'noy geometrii krivykh [The application of theory invariants to differential geometry of curves]. Tashkent. FAN. 1998.

Gafforov Rahmatjon Abdukaxxorovich – Teacher of the Faculty of mathematics and informatics Fergana State University, Fergana, Republic of Uzbekistan, ORCID 0000-0002-4589-5421.

Muminov Kobiljon Kodirovich – D. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Faculty of Mechanics and Mathematics, National University of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan, ORCID 0000-0002-2445-749X.