УДК 517.27.2 Научная статья

Решение смешанной краевой задачи для уравнения с производными дробного порядка с различными началами

Л. М. Энеева

Институт прикладной математики и автоматизации, Кабардино-Балкарский научный центр РАН, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: eneeva72@list.ru

Построено решение смешанной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка. Главная часть уравнения представляет собой композицию лево- и правосторонних операторов дробного дифференцирования Римана-Лиувилля и Капуто. Найдено представление решения исследуемой задачи, а также получена оценка для собственных значений.

Ключевые слова: уравнение с дробными производными с различными началами, смешанная краевая задача, производная Римана-Лиувилля, производная Капуто.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-64-71

Поступила в редакцию: 26.10.2022 В окончательном варианте: 23.11.2022

Для цитирования. Энеева Л. М. Решение смешанной краевой задачи для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 40. № 3. С. 64-71. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-64-71

Введение

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)-\lambda u(x)=f(x) \qquad (0<x<1), \tag{1}$$

где $\alpha\in]0,1[$, $\lambda\in\mathbb{C}$ и $f(x)$ — заданная в интервале $]0,1[$ функция. Через D_{0x}^{α} и ∂_{1x}^{α} обозначены дробные производные порядка α по переменной x, в смысле Римана-Лиувилля с началом в точке $x=0$, и в смысле Капуто с началом в точке $x=1$, которые определяются, соответственно, равенствами [1]:

$$D_{0x}^{\alpha}u(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)(x-t)^{-\alpha}dt,$$

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания (номер госрегистрации № 122041800015-8)

и

$$\partial_{1x}^{\alpha}u(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^1 (t-x)^{-\alpha}\frac{d}{dt}u(t)dt.$$

Хорошо известно [1], что дифференциальные уравнения дробного порядка играют важную роль при математическом моделировании различных физических и геофизических процессов.

Уравнение (1) содержит композицию лево- и правосторонних дробных производных с различными началами. К необходимости исследовать такие уравнения приводит, в частности, использование понятия эффективной скорости изменения различных параметров моделируемых систем [2], [3]. Связи с этим, уравнения такого вида в последние годы активно исследуются [4]–[15]. Обзор работ, посвященных изучению уравнений, содержащих лево- и правосторонние производные с различными началами, можно найти в работе [16].

В работе [16], в частности, для уравнения

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) - q(x)u(x) = f(x),$$

было получено достаточное условие однозначной разрешимости смешанной краевой задачи. Здесь мы рассматриваем случай, когда коэффициент $q(x)$ является постоянной величиной. Мы строим представление решения, а также находим оценку для собственных значений смешанной краевой задачи.

Постановка задачи

Регулярным решением уравнения (1) будем называть функцию $u(x)$ такую, что

$$u(x) \in AC[0,1], \qquad D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) \in AC[0,1],$$

и удовлетворяющую уравнению (1) для всех $x \in]0,1[$.

Здесь, как обычно, $AC[0,1]$ обозначает пространство функций абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$.

Рассмотрим следующую задачу: *найти регулярное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) = a \tag{2}$$

и

$$u(1) = b. \tag{3}$$

Отметим, что условие (2) при $\alpha = 1$ принимает вид $u'(0) = -u_0$.

Вспомогательные утверждения

Рассмотрим функцию [16]

$$K(x,t) = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_{\max\{x,t\}}^1 (s-x)^{\alpha-1}(s-t)^{\alpha-1}ds.$$

Заметим, что
$$K(x,t)=K(t,x), \tag{4}$$
а также
$$K(x,t)\in C\left([0,1]\times[0,1]\right)$$
при условии $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$.

Введем в рассмотрение функцию
$$\mathscr{E}_\lambda(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n p_n(x,t), \tag{5}$$
где последовательность функций $p_n(x,t)$, определяется равенствами
$$p_{n+1}(x,t)=D_{1x}^{-\alpha}D_{0x}^{-\alpha}p_n(x,t) \quad (n\in\mathbb{N}), \qquad p_0(x,t)=K(x,t). \tag{6}$$
Легко заметить, что
$$D_{1x}^{-\alpha}D_{0x}^{-\alpha}p_n(x,t)=\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_x^1(\xi-x)^{\alpha-1}\int_0^{\xi}(\xi-\eta)^{\alpha-1}p_n(\eta,t)\,d\eta\,d\xi=$$
$$=\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^1 p_n(\eta,t)\int_{\max\{x,\eta\}}^1(\xi-x)^{\alpha-1}(\xi-\eta)^{\alpha-1}\,d\xi\,d\eta.$$
Следовательно
$$D_{1x}^{-\alpha}D_{0x}^{-\alpha}p_n(x,t)=\int_0^1 K(x,\eta)\,p_n(\eta,t)\,d\eta. \tag{7}$$
Из (7), в частности, следует, что
$$p_{n+1}(x,t)=\int_0^1 p_{n-m}(x,\eta)\,p_m(\eta,t)\,d\eta \qquad (m=\overline{0,n}). \tag{8}$$
С помощью (4) и (8) нетрудно показать, что
$$p_n(x,t)=p_n(t,x). \tag{9}$$

Из (6) и (7) также следует соотношения
$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}\,p_{n+1}(x,t)=p_n(x,t), \qquad D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}\,p_0(x,t)=0 \tag{10}$$
и
$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}\int_0^1 K(x,\eta)\,f(\eta)\,d\eta=f(x) \qquad (f(x)\in L[0,1]). \tag{11}$$

Кроме того, очевидно, что
$$\int_0^1 K(x,\eta)d\eta=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\int_x^1(s-x)^{\alpha-1}s^{\alpha}ds.$$
Отсюда получаем
$$\frac{(1-x)^{\alpha}}{2\Gamma^2(\alpha+1)}\le\int_0^1 K(x,\eta)d\eta\le\frac{(1-x)^{\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)}.$$

С учетом неравенства

$$K(x,t) \leq \frac{1}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \qquad (1/2<\alpha<1),$$

имеем

$$p_n(x,t) \leq \frac{[\Gamma(\alpha+1)]^{-2n}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}. \tag{12}$$

Лемма 1. *Пусть* $\alpha \in]1/2,1[$. *Тогда*

1) ряд (5) *сходится в круге*

$$|\lambda| < \Gamma^2(\alpha+1)$$

равномерно относительно $(x,t) \in [0,1]\times[0,1]$*;*

2) функция (5) *удовлетворят соотношениям*

$$\mathscr{E}_\lambda(x,t) = \mathscr{E}_\lambda(t,x), \tag{13}$$

$$\mathscr{E}_\lambda(x,t) = K(x,t) + \lambda \int_0^1 K(x,s)\mathscr{E}_\lambda(s,t)\,ds \tag{14}$$

$$\mathscr{E}_\lambda(x,t) = K(x,t) + \lambda \int_0^1 K(s,t)\mathscr{E}_\lambda(x,s)\,ds, \tag{15}$$

и

$$D^\alpha_{0x}\partial^\alpha_{1x}\mathscr{E}_\lambda(x,t) = \lambda\mathscr{E}_\lambda(x,t); \tag{16}$$

3) для функции $f(x) \in L[0,1]$ *справедливо равенство*

$$D^\alpha_{0x}\partial^\alpha_{1x}\int_0^1 f(s)\mathscr{E}_\lambda(x,s)\,ds = f(x) + \lambda f(s)\mathscr{E}_\lambda(x,s)\,ds. \tag{17}$$

Доказательство. Утверждение 1) леммы следует из оценки (12). Соотношение (13) является следствием (9). Формулы (14) и (15) доказываются с помощью (5), (6) и (7). Равенства (16) и (17) получаются непосредственным применением формул (10) и (11). □

Представление решения

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in]1/2,1[$, $f(x) \in L[0,1]$ *и* $|\lambda| < \Gamma^2(\alpha+1)$. *Тогда задача* (1), (2) *и* (3), *имеет единственное решение, которое представимо в виде*

$$u(x) = a\mathscr{E}_\lambda(x,0) + b\left[D^{\alpha-1}_{0t}\partial^\alpha_{1t}\mathscr{E}_\lambda(x,t)\right]_{t=1} + \int_0^1 \mathscr{E}_\lambda(x,t)f(t)dt. \tag{18}$$

Доказательство. Из результатов работы [16] следует, что всякое регулярное решение задачи (1), (2) и (3) является решением интегрального уравнения

$$u(x) - \lambda\int_0^1 K(x,t)u(t)dt = F(x), \tag{19}$$

где

$$F(x) = a\,K(x,0) + b + \int_0^1 K(x,t)f(t)dt.$$

Из леммы 1 следует, что решение интегрального уравнения (19) может быть записано в виде

$$u(x) = F(x) + \lambda \int_0^1 \mathscr{E}_\lambda(x,t)F(t)\,dt. \tag{20}$$

В силу (5), (14), (15) и (16) имеем

$$K(x,0) + \lambda \int_0^1 \mathscr{E}_\lambda(x,s)K(s,0)\,ds = \mathscr{E}_\lambda(x,0),$$

$$1 + \lambda \int_0^1 \mathscr{E}_\lambda(x,s)\,ds = \left[D_{0t}^{\alpha-1}\partial_{1t}^{\alpha}\mathscr{E}_\lambda(x,t)\right]_{t=1},$$

и

$$\int_0^1 K(x,t)f(t)dt + \lambda \int_0^1 \mathscr{E}_\lambda(x,s)\int_0^1 K(s,t)f(t)dt\,ds =$$

$$= \int_0^1 f(t)\left[K(x,t) + \lambda \int_0^1 \mathscr{E}_\lambda(x,s)K(s,t)ds\right]dt = \int_0^1 \mathscr{E}_\lambda(x,t)f(t)\,dt.$$

Преобразуя (20) с помощью последних трех равенств, приходим к (18). □

Замечание. Нетрудно заметить, что функция (5) является резольвентой интегрального уравнения (19). Как следует из теории интегральных уравнений Фредгольма [17], функция (5) может быть представлена в виде

$$\mathscr{E}_\lambda(x,t) = \frac{\mathscr{D}(x,t,\lambda)}{d(\lambda)},$$

где $\mathscr{D}(x,t,\lambda)$ и $d(\lambda)$ — целые функции λ. То есть, функция $\mathscr{E}_\lambda(x,t)$ может быть продолжена для всех комплексных λ, исключая нули функции $d(\lambda)$, которые будут собственными значениями задачи (1), (2) и (3), и которые, в силу симметричности и положительности ядра $K(x,t)$, будут вещественными и положительными.

Оценка для собственных значений

Из теоремы 1 следует утверждение.

Следствие. Пусть $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Тогда все λ, для которых существует отличное от тождественного нуля регулярное решение задачи

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) - \lambda u(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) = 0, \qquad u(1) = 0,$$

вещественны и удовлетворяют неравенству

$$\lambda \geq \Gamma^2(\alpha+1). \tag{21}$$

Доказательство. Как уже отмечено выше (см. замечание в конце предыдущего пункта), вещественность и положительность λ следует из симметричности и положительности ядра $K(x,t)$ интегрального уравнения (19). Если же допустить, что неравенство (21) нарушено, то в силу теоремы 1 получаем, что $u \equiv 0$. Последнее противоречит условиям теоремы. □

Заключение

В работе рассмотрено обыкновенное дифференциальное уравнение дробного порядка, в главной части которого находится композиция левосторонней производной Римана-Лиувилля и правосторонней производной Капуто. Для рассматриваемого уравнения построено представление решения смешанной краевой задачи и найдена оценка для собственных значений.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Рехвиашвили С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики, *Письма в ЖТФ*, 2004. Т. 30, № 2, С. 33–37.
3. Рехвиашвили С. Ш. К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования, *Нелинейный мир*, 2007. Т. 5, № 4, С. 194–197.
4. Энеева Л. М. Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 3, № 2(11), С. 39–44.
5. Энеева Л. М. Оценка первого собственного значения задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Известия КБНЦ РАН*, 2017. № 1(75), С. 34–40.
6. Энеева Л. М. О задаче Неймана для уравнения с дробными производными с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2018. № 4(24), С. 61–65.
7. Энеева Л. М. Неравенство Ляпунова для уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2019. № 3(28), С. 32–40.
8. Энеева Л. М. Априорная оценка для уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2019. № 4(29), С. 41–47.
9. Eneeva L. M., et.al. Lyapunov inequality for a fractional differential equation modelling damped vibrations of thin film MEMS, *Adv. in Intel. Sys. and Comp. ICCD2019 (paper ID: E19100).*
10. Rekhviashvili S. Sh., et.al. Modeling damped vibrations of thin film MEMS, *Adv. in Intel. Sys. and Comp. ICCD2019 (paper ID: E19101).*
11. Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives, *Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série,*, 2006. vol. 80(94), pp. 259–272.
12. Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives, *Frac. Calc. and Appl. Anal.*, 2007. vol. 10, no. 2, pp. 139–150.
13. Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum, *J. Appl. Math. and Comp. Mech.*, 2014. vol. 13, no. 1, pp. 125–142.
14. Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator, *Documenta Mathematica*, 2016. vol. 21, pp. 1503–1514.
15. Eneeva L., Pskhu A., Rekhviashvili S. Ordinary Differential Equation with Left and Right Fractional Derivatives and Modeling of Oscillatory Systems, *Mathematics*, 2020. vol. 8(12), pp. 2122.
16. Энеева Л. М. Смешанная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 36, № 3, С. 65–71.
17. Прёсдорф З. Линейные интегральные уравнения, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, 1988. Т. 27, С. 5–130.

MSC 26A33, 34B05 Research Article

Solution of a mixed boundary value problem for an equation with fractional derivatives with different origins

L. M. Eneeva

Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia
E-mail: eneeva72@list.ru

A solution of a mixed boundary value problem for an ordinary differential equation of fractional order is constructed. The main part of the equation is a composition of left- and right-hand Riemann-Liouville and Caputo fractional differentiation operators. A representation of the solution of the problem under study is found, and an estimate for the eigenvalues is also obtained.

Key words: fractional differential equation with different origins, mixed boundary value problem, Riemann-Liouville derivative, Caputo derivative.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-64-71

Original article submitted: 26.10.2022 Revision submitted: 23.11.2022

For citation. Eneeva L. M. Solution of a mixed boundary value problem for an equation with fractional derivatives with different origins. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **40**: 3, 64-71. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-64-71

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

References

[1] Nakhushev A. M. Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Fractional calculus and its application]. Mjscow, Fizmatlit, 2003. 272 (In Russian).
[2] Rekhviashvili S. Sh. Lagrange formalism with fractional derivative in problems of mechanics, Technical Physics Letters, 2004, 30:2, 33–37.
[3] Rekhviashvili S. Sh. Fractional derivative physical interpretation, Nonlinear world, 2007, 5:4, 194–197 (In Russian).

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment (state registration number No. 122041800015-8)

[4] Eneeva L. M. Boundary value problem for differential equation with fractional order derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2015, 2(11), 39–44,(In Russian).
[5] Eneeva L. M. An estimate for the first eigenvalue of the dirichlet problem for an ordinary differential equation with fractional derivatives with different origins, News Of The Kabardino-Balkarian Scientific Center Of RAS, 2017, 1(75), 34–40 (In Russian).
[6] Eneeva L. M. On Neumann problem for equation with fractional derivatives with different starting points, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2018, 4(24), 61–65 (In Russian).
[7] Eneeva L. M. Lyapunov inequality for an equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2019, 28:3, 32–40 (In Russian).
[8] Eneeva L. M. A priori estimate for an equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2019, 29:4, 41–47 (In Russian).
[9] Eneeva L. M., et. al. Lyapunov inequality for a fractional differential equation modelling damped vibrations of thin film MEMS, Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19100).
[10] Rekhviashvili S. Sh., et.al. Modeling damped vibrations of thin film MEMS, Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19101).
[11] Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives, Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série, 2006, 80(94), 259–272.
[12] Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives, Fractional Calculus and Applied Analysis, 2007, 10:2, 139–150.
[13] Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum, Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics, 2014, 13:1, 125–142.
[14] Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator, Documenta Mathematica, 2016. 21, 1503–1514.
[15] Eneeva L., Pskhu A., Rekhviashvili S. Ordinary Differential Equation with Left and Right Fractional Derivatives and Modeling of Oscillatory Systems. Mathematics, 2020. 8(12), 2122.
[16] Eneeva L. M. Mixed boundary value problem for an ordinary differential equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2021, vol. 36:3, 65–71.
[17] Prößdorf S. Linear integral equations, Analysis – 4, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 1988. 27, 5–130.

Eneeva Liana Magometovna✉ – Ph. D. (Phys. & Math.), Senior Researcher at the Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0003-2530-5022.

Энеева Лиана Магометовна✉ – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия, ORCID 0000-0003-2530-5022.