УДК 517.951 Научная статья

О представлении решения уравнения диффузии с операторами Джрбашяна-Нерсесяна

Ф. Т. Богатырева

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А, Россия

E-mail: fatima_bogatyreva@bk.ru

В работе исследуется параболическое уравнение в частных производных с дробным дифференцированием по одной из двух независимых переменных, ассоциируемой со временем. Такие уравнения принято относить к классу уравнений дробной диффузии. Оператор дробного дифференцирования представляет собой линейную комбинацию двух операторов Джрбашяна-Нерсесяна. Основным результатом работы является теорема об общем представлении регулярных решений исследуемого уравнения в бесконечной полосе. В терминах функции Райта построено фундаментальное решение и изучены его основные свойства. В частности, доказаны формулы дробного дифференцирования, исследовано асимптотическое поведение и получены оценки для фундаментального решения и его производных при больших и малых значениях автомодельной переменной, доказана его положительность. Для построения общего решения использован метод функции Грина, адаптированный к уравнениям, содержащим операторы Джрбашяна-Нерсесяна. К частным случаям рассматриваемого уравнения относятся уравнения с производными Римана-Лиувилля и Герасимова-Капуто. Поэтому полученные результаты остаются справедливыми и для уравнений с этими операторами дробного дифференцирования и их комбинациями.

Ключевые слова: уравнение дробной диффузии, операторы Джрбашяна-Нерсесяна, дробная производная, функция Райта.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-16-27

Поступила в редакцию: 16.10.2022 В окончательном варианте: 25.11.2022

Для цитирования. Богатырева Ф. Т. О представлении решения уравнения диффузии с операторами Джрбашяна-Нерсесяна // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 40. № 3. С. 16-27. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-16-27

В области $\Omega = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv aD_{0y}^{\{\alpha,\beta\}}u(x,y) + bD_{0y}^{\{\gamma,\delta\}}u(x,y) - u_{xx}(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

где $D_{0y}^{\{\alpha,\beta\}}, D_{0y}^{\{\gamma,\delta\}}$ – операторы дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна, ассоциированные с упорядоченными парами $\{\alpha,\beta\}$ и $\{\gamma,\delta\}$ порядков $\mu = \alpha+\beta-1>0$, $\nu=\gamma+\delta-1>0$ соответственно, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in(0,1]$, $\mu>\nu$, $a,b>0$, $f(x,y)$ – заданная действительная функция.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна – Нерсесяна, ассоциированный с упорядоченной парой $\{\xi,\eta\}$, порядка $\sigma=\xi+\eta-1$, $\xi,\eta\in(0,1]$, определяется соотношением [1]

$$\frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma} = D_{0y}^{\{\xi,\eta\}} = D_{0y}^{\eta-1} D_{0y}^{\xi}, \tag{2}$$

где $D_{0y}^{\eta-1}$ и D_{0y}^{ξ} – дробный интеграл и дробная производная Римана – Лиувилля, соответственно [2].

Уравнения дробной диффузии и диффузионно-волновые уравнения привлекают к себе большой интерес в связи с широким применением в физике и моделировании. Приведем лишь малую часть работ, в которых исследованы краевые и начально-краевые задачи для таких уравнений с операторами Римана – Лиувилля и Капуто в ограниченных и неограниченных областях [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14].

Исследованию уравнения дробной диффузии с операторами Джрбашяна – Нерсесяна посвящены работы [15, 16, 17].

В данной работе получено общее представление решения уравнения дробной диффузии с операторами Джрбашяна – Нерсесяна (1).

Предварительные сведения

Рассмотрим функцию

$$G_n^{\xi}(x,y) = G_n^{\xi}(x,y;\mu,\nu;a,b) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_0^\infty t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) w_\xi(t,y)dt, \tag{3}$$

где [17]

$$w_\xi(t,y) = y^{\xi_1-1} e_{1,\mu}^{1,\xi_1}\left(-a\frac{t}{y^\mu}\right) * y^{\xi_2-1} e_{1,\nu}^{1,\xi_2}\left(-b\frac{t}{y^\nu}\right),\ \xi=\xi_1+\xi_2,\ w(t,y)=w_0(t,y), \tag{4}$$

$e_{1,\alpha}^{1,\beta}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta-\alpha n)}$ – функция Райта [6], $(h*g)(y) = \int\limits_0^y h(y-t)g(t)dt$ – свертка Лапласа функций $h(y)$ и $g(y)$. Далее, в терминах функции (3) будет выражено фундаментальное решения уравнения (1).

Приведем некоторые свойства операторов дробного интегро-дифференцирования, функции Райта и функции $w_\xi(t,y)$, необходимые нам для дальнейшего изложения [6]:

1) формула дробного интегрирования по частям

$$\int_a^b h(y) D_{ay}^{-\alpha} g(y)\,dy = \int_a^b g(y) D_{by}^{-\alpha} h(y)\,dy, \quad \alpha > 0; \tag{5}$$

2) закон композиции

$$D_{ay}^{\delta} D_{ay}^{\varepsilon} h(y) = D_{ay}^{\delta+\varepsilon} h(y), \qquad (\delta \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \le 0);$$

3) обобщенная формула Ньютона-Лейбница

$$D_{0y}^{\varepsilon} D_{0y}^{\delta} h(y) = D_{0y}^{\varepsilon+\delta} h(y) - \sum_{j=1}^{p} \frac{y^{-\varepsilon-j}}{\Gamma(1-\varepsilon-j)} \left[D_{0y}^{\delta-j} h(y) \right]_{y=a}, \ \varepsilon \in \mathbb{R}, \delta \in (p-1, p], \ p \in \mathbb{N};$$

4) формула дифференцирования функции типа Райта

$$\frac{d}{dz} e_{1,\beta}^{1,\delta}(z) = e_{1,\beta}^{1,\delta-\beta}(z);$$

5) формула дробного интегро-дифференцирования функции Райта

$$D_{0y}^{\nu} y^{\delta-1} e_{1,\beta}^{1,\delta}\left(-cy^{-\beta}\right) = y^{\delta-\nu-1} e_{1,\beta}^{1,\delta-\nu}\left(-cy^{-\beta}\right), \quad c > 0, \ \delta \in \mathbb{R};$$

6) формула автотрансформации функции Райта

$$z e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = e_{\alpha,\beta}^{\mu-\alpha,\delta+\beta}(z) - \frac{1}{\Gamma(\mu-\alpha)\Gamma(\delta+\beta)}.$$

Для функции $w_\xi(t,y)$ справедливы следующие свойства:

1) если $\xi \ge 0, t > 0$ и $y > 0$, то $w_\xi(t,y) > 0$;

2) для произвольного $\xi \in \mathbb{R}$ и $y > 0$ справедливо

$$\lim_{x \to +0} w_\xi(t,y) = \frac{y^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)}; \tag{6}$$

3) для любых $\xi \in \mathbb{R}, \rho < (1-\mu)(a\mu^{\mu})^{\frac{1}{1-\mu}}, t > 0$ и $y > 0$, справедливы оценки

$$|w_\xi(t,y)| \le C y^{\xi-1} z^{-\theta} \exp\left(-\rho z^{\frac{1}{1-\mu}}\right), \qquad \theta \ge \begin{cases} 0, & (-\xi) \notin \mathbb{N}_0, \\ -1, & (-\xi) \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

где $z = ty^{-\mu}, C = C(\xi, a, \mu, \rho, \theta)$;
4) имеет место равенство

$$D_{0y}^{\eta} w_\xi(t,y) = w_{\xi-\eta}(t,y);$$

5) для любых $\xi \in \mathbb{R}$ и $\eta \ge 0$ выполняется равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a D_{0y}^{\mu} + b D_{0y}^{\gamma}\right) D_{0y}^{-\eta} w_\xi(t,y) = \frac{x^{\eta-1}}{\Gamma(\eta)} \frac{y^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)};$$

6) для любого $\xi \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\int_0^\infty \left(aD_{0y}^{\mu} + bD_{0y}^{\gamma}\right) w_\xi(t,y)dt = \frac{y^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)}.$$

Из доказанных в работе [16] лемм 2-4 следуют следующие:

Следствие 1. Пусть $x > 0, y > 0$. Справедливы соотношения:

$$G_n^{\varepsilon}(x,y) > 0, \;\; \varepsilon \geq 0;$$

$$D_{0y}^{\xi} G_1(x,y) = G_1^{-\xi}(x,y), \quad \xi \in \mathbb{R}; \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} G_1(x,y) = -2\pi x G_3(x,y); \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G_1(x,y) = -2\pi G_3(x,y) + 4\pi^2 x^2 G_5(x,y);$$

$$\left(aD_{0y}^{\{\alpha,\beta\}} + bD_{0y}^{\{\gamma,\delta\}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) G_1(x,y) = 0. \tag{9}$$

Следствие 2. Для любых $\xi < (2-\mu)\left(\frac{a\mu^\mu}{4}\right)^{\frac{1}{2-\mu}}$, $|x| > 0$ и $y > 0$ справедливы неравенства:

$$|G_1(x,y)| \leq Cy^{\frac{\mu}{2}-1} \exp\left(-\xi z^{\frac{1}{2-\mu}}\right); \tag{10}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} G_1(x,y)\right| \leq C|x| y^{-\frac{\mu}{2}-1} \exp\left(-\xi z^{\frac{1}{2-\mu}}\right); \tag{11}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2} G_1(x,y)\right| \leq Cy^{-\frac{\mu}{2}-1} \exp\left(-\xi z^{\frac{1}{2-\mu}}\right),$$

где $z = x^2 y^{-\mu}, C = C(\mu, a, \xi)$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u(x,y)$ такую, что $u(x,y)$ в области Ω дважды непрерывно дифференцируема по переменной x; $y^{1-\varepsilon}u(x,y) \in C(\Omega_0)$, $\Omega_0 = \mathbb{R} \times [0,T)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, а функция $D_{0y}^{\sigma-1}u(x,y) \in C(\Omega_0)$, где $\sigma = \max\{\alpha,\gamma\}$, абсолютно непрерывна как функция переменной y в полуинтервале $[0,T)$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Общее представление решения

В работе доказана следующая теорема об общем представлении решения уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x,y) \in L(-R,R) \times (0,T)$, $\forall R > 0$, *и выполняются соотношения*

$$\lim_{|x|\to\infty} y^{1-\rho} u(x,y) \exp\left(-\theta |x|^{\frac{2}{2-\mu}}\right) = 0, \tag{12}$$

для некоторых положительных констант $\rho,\theta>0$, *и*

$$\lim_{|x|\to\infty} y^{1-\varepsilon}f(x,y)\exp\left(-\kappa|x|^{\frac{2}{2-\mu}}\right)=0,\quad \varepsilon>\sigma-\mu, \tag{13}$$

где $\kappa<(2-\mu)\left(\frac{\mu}{T}\right)^{\frac{2}{2-\mu}}\left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{2-\mu}}$. *Тогда функция*

$$u(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{y}f(s,t)G_1(x-s,y-t)dtds+$$

$$+a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)G_1^{1-\beta}(x-s,y)ds+b\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(s)G_1^{1-\delta}(x-s,y)ds \tag{14}$$

является регулярным решением уравнения (1). *Здесь* $\varphi(x)=\lim\limits_{y\to0}D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y)$, $\psi(x)=\lim\limits_{y\to0}D_{0y}^{\gamma-1}u(x,y)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\nu(x,y,s,t)\equiv G_1(x-s,y-t)h_\varepsilon(|x-s|)h^r(|x-s|), \tag{15}$$

где $\varepsilon>0, r>0$ и [16]

$$h_\varepsilon(t)=\begin{cases}1, & \text{если } t>\varepsilon,\\ 30\varepsilon^{-5}\int_0^t s^2(\varepsilon-s)^2ds, & \text{если } t\in[0,\varepsilon],\end{cases} \tag{16}$$

$$h^r(t)=\begin{cases}1, & \text{если } t<r,\\ 30\int_t^{r+1}(s-r)^2(r+1-s)^2ds, & \text{если } t\in[r,r+1],\\ 0, & \text{если } t>r+1,\end{cases} \tag{17}$$

$h_\varepsilon(t),h^r(t)\in C^2[0,\infty)$, $0\le h_\varepsilon(t),h^r(t)\le1$, $h_\varepsilon'(t)=h_\varepsilon''(t)=0$ при $t\ge\varepsilon$ и $h^{r\prime}(t)=h^{r\prime\prime}(t)=0$ если $t\notin(r,r+1)$.

Пусть $u(x,y)$ – регулярное решение уравнения (1). Домножим уравнение (1) на функцию $\nu(x,y;s,t)$ и проинтегрируем по области Ω полученное соотношение. Получим

$$a\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{y}\nu(x,y;s,t)D_{0t}^{\{\alpha,\beta\}}u(s,t)dtds+b\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{y}\nu(x,y;s,t)D_{0t}^{\{\gamma,\delta\}}u(s,t)dtds-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{y}\nu(x,y;s,t)u_{ss}(s,t)dtds=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{y}\nu(x,y;s,t)f(s,t)dtds. \tag{18}$$

Применяя формулу дробного интегрирования по частям (5), проинтегрируем каждое слагаемое равенства (18) отдельно. Имеем

$$a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{y} v(x,y;s,t)D_{0t}^{\{\alpha,\beta\}}u(s,t)dtds = a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{y} u(s,t)D_{yt}^{\{\beta,\alpha\}}v(x,y;s,t)dtds - \\ - a\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)D_{0y}^{\beta-1}v(x,y;s,0)ds. \quad (19)$$

Аналогично,

$$b\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{y} v(x,y;s,t)D_{0t}^{\{\gamma,\delta\}}u(s,t)dtds = b\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{y} u(s,t)D_{yt}^{\{\delta,\gamma\}}v(x,y;s,t)dtds - \\ - b\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s)D_{0y}^{\delta-1}v(x,y;s,0)ds. \quad (20)$$

В случае третьего интеграла из (18), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{y} u_{ss}(s,t)v(x,y;s,t)dtds = \int_{0}^{y} u_s(s,t)v(x,y;s,t)dt\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{y} u_s(s,t)v_s(x,y;s,t)dtds = \\ = \int_{0}^{y} u_s(s,t)v(x,y;s,t)dt\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{0}^{y} u(s,t)v_s(x,y;s,t)dt\Big|_{-\infty}^{\infty} + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{y} u(s,t)v_{ss}(x,y;s,t)dtds. \quad (21)$$

Из формул (19)-(21), с учетом представлений (16), (17) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{y} u(s,t)L^{*}v(x,y;s,t)dtds - a\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)D_{0y}^{\beta-1}v(x,y;s,0)ds - \\ - b\int_{-\infty}^{\infty}\psi(s)D_{0y}^{\delta-1}v(x,y;s,0)ds = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{y} f(s,t)v(x,y;s,t)dtds, \quad (22)$$

где

$$L^{*}v(x,y;s,t) = aD_{0y}^{\{\beta,\alpha\}}v(x,y;s,t) + bD_{0y}^{\{\delta,\gamma\}}v(x,y;s,t) - v_{ss}(x,y;s,t) \quad (23)$$

Далее для удобства записи обозначим

$$h(x-s) = h_{\varepsilon}(|x-s|)h^{r}(|x-s|). \quad (24)$$

Преобразуем равенство (23) принимая во внимание соотношение (15). Тогда будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{y} u(s,t)L^*\nu(x,y;s,t)dtds = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{y} u(s,t)\left[aD_{yt}^{\{\beta,\alpha\}}G_1(x-s,y-t)h(x-s)+\right.$$
$$+bD_{yt}^{\{\delta,\gamma\}}G_1(x-s,y-t)h(x-s)-\frac{\partial^2}{\partial s^2}G_1(x-s,y-t)h(x-s)-$$
$$\left.-2\frac{\partial}{\partial s}G_1(x-s,y-t)h'(x-s)-G_1(x-s,y-t)h''(x-s)\right]dtds. \quad (25)$$

В силу равенства (9) верно выражение

$$aD_{yt}^{\{\beta,\alpha\}}G_1(x-s,y-t)h(x-s)+bD_{yt}^{\{\delta,\gamma\}}G_1(x-s,y-t)h(x-s)-$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial s^2}G_1(x-s,y-t)h(x-s)=0. \quad (26)$$

Перепишем равенство (25) с учетом обозначения (24), равенства (26) и свойств функций $h_\varepsilon(t)$ и $h^r(t)$. Получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{y} u(s,t)L^*\nu(x,y;s,t)dtds = -2\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\limits_{0}^{y} u(s,t)\frac{\partial}{\partial s}G_1(x-s,y-t)h_\varepsilon'(|x-s|)dtds-$$
$$-2\int\limits_{r}^{r+1}\int\limits_{0}^{y} u(s,t)\frac{\partial}{\partial s}G_1(x-s,y-t)h^{r\prime}(|x-s|)dtds-\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\limits_{0}^{y} u(s,t)G_1(x-s,y-t)h_\varepsilon''(|x-s|)dtds-$$
$$-\int\limits_{r}^{r+1}\int\limits_{0}^{y} u(s,t)G_1(x-s,y-t)h^{r\prime\prime}(|x-s|)dtds.$$

После элементарных преобразований приходим к выражению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{y} u(s,t)L^*\nu(x,y;s,t)dtds = \int\limits_{r}^{r+1}\int\limits_{0}^{y} u(s,t)B(x-s,y-t)dtds+$$
$$+\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\limits_{0}^{y}[u(x,y)-u(x+s,y-t)]A(s,t)dtds-u(x,y)\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\limits_{0}^{y}A(s,t)dtds,$$

где

$$A(s,t)=2\frac{\partial}{\partial s}G_1(s,t)h_\varepsilon'(|s|)+G_1(s,t)h_\varepsilon''(|s|), \quad (27)$$
$$B(s,t)=-2\frac{\partial}{\partial s}G_1(s,t)h^{r\prime}(|s|)-G_1(x-s,y-t)h^{r\prime\prime}(|s|).$$

Из оценок (10), (11) и условия (12) следует, что для любой точки (x,y) области Ω справедливы соотношения

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{r}^{r+1}\int\limits_{0}^{y} u(s,t)B(x-s,y-t)dtds=0, \quad (28)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\limits_{\zeta}^{y}[u(x,y)-u(x+s,y-t)A(s,t)dtds=0,$$

и

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\limits_{0}^{\zeta}|A(s,t)|dtds<\infty,$$

где ζ – любое положительное, достаточно малое число. Поэтому

$$\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\limits_{0}^{y}[u(x+s,y-t)-u(x,y)]A(s,t)dtds\right|\le C\sup_{s<\varepsilon,t\in I^{\zeta}}|u(x+s,y-t)-u(x,y)|+O(\varepsilon).$$

В силу непрерывности функции $u(x,y)$ в окрестности точки (x,y) и произвольности выбора ζ получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\limits_{0}^{y}[u(x+s,y-t)-u(x,y)]A(s,t)dtds=0. \tag{29}$$

Рассмотрим далее интеграл

$$I(\varepsilon)=\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\limits_{0}^{y}A(s,t)dtds.$$

Принимая во внимание соотношения (7), (8) и (27) перепишем $I(\varepsilon)$ в следующем виде

$$I(\varepsilon)=\int\limits_{0}^{\varepsilon}[-4\pi sG_3^1(s,y)h_\varepsilon'(|s|)+G_1^1(s,y)h_\varepsilon''(|s|)]ds.$$

С учетом соотношений

$$h_\varepsilon'(\varepsilon|\zeta|)=\varepsilon^{-1}h_1'(|\zeta|),\ h_\varepsilon'(\varepsilon|\zeta|)=\varepsilon^{-2}h_1''(|\zeta|),$$

после замены $s=\varepsilon\zeta$, получаем

$$I(\varepsilon)=\int\limits_{-1}^{1}\left[-4\pi|\zeta|\varepsilon G_3^1(\varepsilon\zeta,y)h_1'(|\zeta|)+\varepsilon^{-1}G_1^1(\varepsilon\zeta,y)h_1''(|\zeta|)\right]d\zeta.$$

Из равенства (3), с учетом (6), следует

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}G_1^1(\varepsilon\zeta,y)=-\frac{|\zeta|}{2};\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon G_3^1(\varepsilon\zeta,y)=\frac{1}{4\pi|\zeta|}.$$

После простых преобразований, принимая во внимание равенство

$$\int\limits_{-1}^{1}g(|\zeta|)d\zeta=2\int\limits_{0}^{1}g(s)ds$$

получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = -\int_0^1 [sh_1''(s) + 2h_1'(s)]ds = -1. \tag{30}$$

Таким образом, в силу равенств (28), (29), (30) получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^y u(s,t)L^*\nu(x,y;s,t)dtds = u(x,y).$$

С учетом последнего, устремляя $\varepsilon \to 0$ и $r \to \infty$ из (22), получаем равенство (14). Теорема доказана. □

Представление (14) позволяет назвать функцию $G_1(x-s, y-t)$ фундаментальным решением уравнения (1).

Заключение

Таким образом, мы показали, что любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде (14). Однако, из доказанной теоремы, вообще говоря, не следует, что любая функция вида (14) будет решением уравнения (1). Для того, чтобы это имело место необходимо накладывать условия, связанные с характером гладкости функций φи ψ. Также в зависимости от распределения параметров α, β, γ и δ, некоторые из слагаемых в представлении (14) могут оказаться равны нулю. Поэтому, корректность тех или иных краевых задач для уравнения (1) будет зависеть от набора этих параметров, а различные пары $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\gamma, \delta\}$ порождают разные краевые задачи.

Более подробное изложение этих вопросов станет предметом дальнейших исследований.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы

1. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, *Изв. АН АрмССР. Матем.*, 1968. Т. 3, № 1, С. 3–28.
2. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
3. Псху А.В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка, *Дифференц. уравнения*, 2003. Т. 39, № 9, С. 1286–1289.
4. Псху А.В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина, *Дифференц. уравнения*, 2003. Т. 39, № 10, С. 1430–1433.
5. Eidelman S.D., Kochubei A.N. Cauchy problem for fractional diffusion equations, *J. Differential Equations*, 2004. vol. 199, pp. 211–255.
6. Псху А.В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с.
7. Псху А.В. Уравнение диффузии дробного порядка со многими временными переменными, *Матем. моделирование и краев. задачи*, 2006. Ч. 3, С. 187–190.

8. Luchko Yu. Boundary value problems for the generalized timefractional diffusion equation of distributed order, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2009. vol. 12, no. 4, pp. 409–422.
9. Luchko Yu. Initial-boundary-value problems for the generalized multiterm time-fractional diffusion equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 2011. vol. 374, no. 2 (2011), pp. 538–548.
10. Мамчуев М.О. *Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка.* Нальчик, 2013. 200 с.
11. Pskhu A.V. Green functions of the first boundary-value problem for a fractional diffusion-wave equation in multidimensional domains, *Mathematics*, 2020. no. 8(4), pp. 464.
12. Pskhu A.V. Stabilization of solutions to the Cauchy problem for fractional diffusion-wave equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2020. no. 250, pp. 800–810.
13. Pskhu A.V., Rekhviashvili S. Fractional diffusion-wave equation with application in electrodynamics, *Journal of Mathematical Sciences*, 2020. no. 8.
14. Pskhu A.V. Boundary value problem for fractional diffusion equation in a curvilinear angle domain, *Bulletin of the Karaganda university Mathematics series*, 2022. № 1(105)/2022, С. 83–95.
15. Псху А.В. Фундаментальное решение диффузионно- волнового уравнения дробного порядка, *Изв. РАН. Сер.матем.*, 2009. Т. 73, № 2, С. 141–182.
16. Псху А.В. Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования, *Сибирские электронные математические известия*, 2016. Т. 12, С. 1078–1098.
17. Богатырева Ф.Т. Краевые задачи для уравнения в частных производных первого порядка с операторами Джрбашяна – Нерсесяна, *Челябинский физико-математический журнал*, 2021. Т. 1, № 1, С. 78–88.

Богатырева Фатима Тахировна – младший научный сотрудник Отдела дробного исчисления Института прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия, ORCID 0000-0003-1765-066X.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2022. vol. 40. no. 3. pp. 16–27. ISSN 2079-6641

MSC 35R11, 35A08 Research Article

On representation of solution of the diffusion equation with Dzhrbashyan-Nersesyan operators

F. T. Bogatyreva

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 89 A, Shortanova str., 360000, Nalchik, Russia

E-mail: fatima_bogatyreva@bk.ru

The paper investigates a parabolic partial differential equation with fractional differentiation with respect to one of two independent variables associated with time. Such equations are usually referred to the class of fractional diffusion equations. The fractional differentiation operator is a linear combination of two Dzhrbashyan-Nersesyan operators. The main result of the work is a theorem on the general representation of regular solutions of the equation under study in an infinite strip. A fundamental solution is constructed in terms of the Wright function and its main properties are studied. In particular, formulas for fractional differentiation are proved, the asymptotic behavior is investigated, and estimates are obtained for the fundamental solution and its derivatives for large and small values of the self-similar variable, and its positiveness is proved. To construct a general solution, the Green's function method adapted to equations containing Dzhrbashyan-Nersesyan operators is used. Particular cases of the equation under consideration include equations with Riemann-Liouville and Gerasimov-Caputo derivatives. Therefore, the results obtained remain valid for equations with these fractional differentiation operators and their combinations.

Key words: fractional diffusion equation, Dzhrbashyan-Nersesyan operators, fractional derivative, Wright function.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-16-27

Original article submitted: 16.10.2022 Revision submitted: 25.11.2022

For citation. Bogatyreva F. T. On representation of solution of the diffusion equation with Dzhrbashyan-Nersesyan operators. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **40**: 3, 16-27. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-16-27

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

References

[1] Dzrbashyan M. M., Nersesyan A. B. Drobnye proizvodnye i zadacha Koshi dlja differencial'nyh uravnenij drobnogo porjadka [Fractional derivatives and the Cauchy

The study was carried out without support from foundations.

problem for fractional differential equations]. Izv. AN ArmSSR. Matem. [Izv. Acad. Sci. Arm. SSR Mat.], 1968, 3, 3–28, (In Russian).

[2] Nakhushev A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional Calculus and Its Application]. Moscow, Fizmatlit, 2003, (In Russian).

[3] Pskhu A. V. Solution of the first boundary value problem for a fractional-order diffusion equation, Differential Equations, 2003, 39:9, 1359–1363, DOI:10.1023/B:DIEQ.0000012703.45373.aa

[4] Pskhu A. V. Solution of boundary value problems for the fractional diffusion equation by the Green function method, Differential Equations, 2003, 39:10, 1509–1513, DOI:10.1023/B:DIEQ.0000017925.68789.e9

[5] Eidelman S. D., Kochubei A. N. Cauchy problem for fractional diffusion equations, Journal of Differential Equations, 2004, 199:2, 211–255.

[6] Pskhu A. V. Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka [Fractional partial differential equations]. Moscow, Nauka, 2005, (In Russian).

[7] Pskhu A. V. Uravnenie diffuzii drobnogo porjadka so mnogimi vremennymi peremennymi [Fractional diffusion equation with many time variables], Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference (29–31 May 2006). Part 3, Matem. Mod. Kraev. Zadachi, Samara State Technical Univ., Samara, 2006, pp. 187–190, (In Russian).

[8] Luchko Yu. Boundary value problems for the generalized timefractional diffusion equation of distributed order, Fract. Calc. Appl. Anal., 2009, 12:4, 409–422.

[9] Luchko Yu. Initial-boundary-value problems for the generalized multiterm time-fractional diffusion equation, J. Math. Anal. Appl., 2011, 374:2, 538–548.

[10] Mamchuev M. O. Krayevyye zadachi dlya uravneniy i sistem uravneniy s chastnymi differentsialami drobnogo poryadka [Boundary value problems for equations and systems of equations with partial differentials of fractional order], Nalchik, 2013, 200 p.,(In Russian).

[11] Pskhu A. V. Green functions of the first boundary-value problem for a fractional diffusion-wave equation in multidimensional domains, Mathematics, 2020, 8(4), pp. 464.

[12] Pskhu A. V. Stabilization of solutions to the Cauchy problem for fractional diffusion-wave equation, Journal of Mathematical Sciences, 2020, 250, 800–810.

[13] Pskhu A. V., Rekhviashvili S. Fractional diffusion-wave equation with application in electrodynamics, Journal of Mathematical Sciences, 2020, 8.

[14] Pskhu A. V. Boundary value problem for fractional diffusion equation in a curvilinear angle domain, Bulletin of the Karaganda Univer. Mathematics series, 2022, 1(105)/2022, 83–95.

[15] Pskhu A. V. The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order, Izv. Math. 2009, 73:2, 351–392.

[16] Pskhu A. V. Fractional diffusion equation with discretely distributed differentiation operator, Sib. Elektron. Mat. Izv., 2016, 13, 1078–1098.

[17] Bogatyreva F. T. Boundary value problems for a first order partial differential equation with the Dzhrbashyan – Nersesyan operators, Chelyab. Fiz.-Mat. Zh., 2021, 6:4, 403–416, (In Russian).

Bogatyreva Fatima Takhirovna – Junior Researcher, Department of Fractional Calculus, Institute of Applied Mathematics and Automation, KBSC RAS, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0003-1765-066X.