УДК 517.984.5 Научная статья

# Об одной нелокальной краевой задаче для модельного нелокального уравнения гиперболического типа

***А. Х. Аттаев***

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А, Россия

E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

В работе проводится исследование задачи с внутренне-краевым нехарактеристическим смещением для модельного существенно нагруженного уравнения гиперболического типа второго порядка с двумя независимыми переменными. Обращено внимание на то, что для нагруженных гиперболических уравнений, когда нагрузка является характеристической, основные начальные и краевые задачи ставятся также как для обычных уравнений. Но если нагрузка является нехарактеристической, то нужно правильно выбирать те многообразия, которые будут носителями начальных, краевых и смешанных данных. Приводится аналог теоремы о среднем и аналог формулы Даламбера. Для решения поставленной задачи применяется метод Даламбера.

*Ключевые слова: существенно нагруженное дифференциальное уравнение, внутренне-краевое смещение, нехарактеристическое смещение, теорема о среднем, метод Даламбера, функциональное уравнение, характеристики гиперболического уравнения.*

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-7-15

Поступила в редакцию: 16.10.2022 В окончательном варианте: 20.11.2022

**Для цитирования.** Аттаев А. Х. Об одной нелокальной краевой задаче для модельного нелокального уравнения гиперболического типа // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 40. № 3. С. 7-15. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-7-15



## Введение

Актуальность исследований в области нагруженных дифференциальных уравнений обусловлена многочисленными практическими задачами, при математическом моделировании которых они возникают [1], [2]. Главной особенностью нагруженных дифференциальных уравнений является их нелокальность. В связи с этим

**Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.**

в математической литературе посвященной нагруженным уравнениям стал применяться термин «эффект влияния нагрузки», который появился после опубликования работы [3] А.М. Нахушевым. В этой работе автор приводит пример нагруженного вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка, для которого нарушено известное условие Геллерстедта, но тем не менее вторая задача Дарбу является корректной. Факт некорректности второй задачи Дарбу для уравнения Лыкова А. М. Нахушев анонсировал в статье [4], вышедшей в 1970 году. Таким образом можно говорить о ряде задач, которые являются корректными для нагруженных дифференциальных уравнений, но не являются корректными для этих же дифференциальных уравнений без нагрузки. Например, задача с данными на параллельных характеристиках и задача Коши с данными на характеристическом многообразии [5], [6].

Эта работа является продолжением исследований в области выявления корректных задач для модельного нагруженного гиперболического уравнения второго порядка, начатые в работах [6] и [7].

## Аналог теоремы о среднем

В качестве модельного нагруженного уравнения гиперболического типа второго порядка с двумя независимыми переменными будем рассматривать уравнения вида

$$u_{xx} - u_{yy} = \lambda u_{yy}(x_0, y), \tag{1}$$

где $\lambda$, $x_0$ – произвольные действительные числа, причем $\lambda \neq -1$.

Относительно произвольности $x_0$ сделаем одно важное.

**Замечание 1.** Область, где рассматривается уравнение (1) должна обладать свойством, что отрезок $[x_0, y]$ для любого $y$ должен принадлежать этой области.

Хорошо известно следующая теорема о среднем или принцип Айсгейрссона для уравнения (1) при $\lambda = 0$.

Суммы значений решения $u(z) = u(x, y)$ уравнения (1) при $\lambda = 0$ в противоположных вершинах $z_1$, $z_3$ и $z_2$, $z_4$ характеристического четырехугольника $z_1z_2z_3z_4$ равны между собой, то есть

$$u(z_1) + u(z_3) = u(z_2) + u(z_4), \tag{2}$$

очевидно, имеет место и обратное утверждение. Само решение уравнения (1) при $\lambda = 0$ представимо в виде

$$u(x, y) = f(x - y) + g(x + y). \tag{3}$$

В зависимости от того, какие условия гладкости предполагаются относительно $f$ и $g$ решение $u(x, y)$ будет регулярным или обобщенным.

Пусть $\Omega$ означает односвязную область плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченную характеристиками уравнения (1) при $\lambda = 0$ и отрезками прямых $y = 0$ и $y = x_0$, причем $0 < x_0 < l$.

Регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega$ будем называть любую функцию $u(x,y)$, представимую в виде

$$u(x,y) = f(x-y) + g(x+y) - \frac{\lambda}{1+\lambda}\left[f(x_0-y) + g(x_0+y)\right], \tag{4}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Пусть $z_1$, $z_3$ и $z_2$, $z_4$ противоположные вершины характеристического четырехугольника $z_1z_2z_3z_4$, а $z_1'$, $z_2'$, $z_3'$, $z_4'$ проекции соответственно точек $z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$ вдоль направления, перпендикулярного прямой $x = x_0$. Тогда для уравнения (1) справедлива формула

$$u(z_1) + \lambda u(z_1') + u(z_3)\lambda u(z_3') = u(z_2) + \lambda u(z_2') + u(z_4) + \lambda u(z_4'). \tag{5}$$

Действительно, введем функцию $v(x,y)$ следующим образом

$$v(x,y) = u(x,y) + \lambda u(x_0,y).$$

Такая замена в уравнении (1) эквивалентным образом переводит его в уравнение

$$v_{xx} - v_{yy} = 0,$$

но для него справедлива соотношение (2). Применяя для $v(x,y)$ формулу (2), получим формулу (5).

## Задача с нехарактеристическим внутренне-краевым смещением

Не нарушая общности будем считать, что $0 < x_0 < \frac{l}{2}$. Действительно, если $\frac{l}{2} < x_0 < l$, то делая замену $u(x,y) = v(\bar{x},y)$, $\bar{x} = l - x$, получим уравнение

$$v_{\bar{x}\bar{x}} - v_{yy} = \lambda v_{yy}(l - x_0, y), 0 < l - x_0 < \frac{l}{2}.$$

**Задача D.** в области $\Omega$ найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{6}$$

$$u\left(\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right) + \beta u\left(x_0,\frac{x}{2}\right) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le 2_0, \tag{7}$$

$$u(x,x_0) = \psi(x), \quad x_0 \le x \le l - x_0, \tag{8}$$

где

$$\tau(x) \in C^2((0,l)) \cap C([x_0, l-x_0]),$$

$$\varphi(x) \in C^2((0,2x_0)) \cap C([0,2x_0]),$$

$$\psi(x) \in C^2((x_0, l-x_0)) \cap C([x_0, l-x_0]).$$

Пусть $\beta = \lambda$. Удовлетворяя (4) условиям (6)-(8), после несложных преобразований, получим

$$f(x) + g(x) = \tau(x) + \lambda\tau(x_0), \quad 0 \le x \le l, \tag{9}$$

$$f(0)+g(x)=\varphi(x), \quad 0\le x\le 2_0, \tag{10}$$

$$f(x-x_0)+g(x+x_0)=\psi(x)+\lambda\psi(x_0), \quad x_0\le x\le l-x_0. \tag{11}$$

Так как $x_0<\frac{l}{2}$, то, очевидно, что $l$ представимо в виде $l=2\pi x_0+r$, где $0\le r<2x_0$.

Для функций $f(x)$ и $g(x)$ из (4) в зависимости от их области определения введем следующие обозначения

$$f_i(x)=f(x), \quad g_i(x)=g(x),$$

если $2ix_0\le x\le 2(i+1)x_0$, $i=0,1,...,n-1$,

$$f_n(x)=f(x), \quad g_n(x)=g(x),$$

если $l-r\le x\le l$.

В соответствии с введенными обозначениями из (9) и (10) следует

$$g_0(x)=\varphi(x)-f(0), \tag{12}$$

$$f_0(x)=\tau(x)+\lambda\tau(x_0)-\varphi(x)+f(0). \tag{13}$$

Условия (11) и (9) позволяют вычислить все $f_i(x)$ и $g_i(x)$, $i=1,...,n$. Действительно, из (11) следует, что

$$g_1(x)=\psi(x-x_0)+\lambda\psi(x_0)-f_0(x-2x_0).$$

Подставляя в последнее выражение значение $f_0(x-2x_0)$, вычисленное из (13), получим

$$g_1(x)=\psi(x-x_0)+\lambda\psi(x_0)-\tau(x-2x_0)-\lambda\tau(x_0)+\varphi(x-2x_0)-f(0).$$

Значение для $f_1(x)$ получаем из (9):

$$f_1(x)=\tau(x)+\tau(x-2x_0)+2\lambda\tau(x_0)-\psi(x-x_0)-\lambda\psi(x_0)-\varphi(x-2x_0)+f(0).$$

В формулах для $f_1(x)$ и $g_1(x)$ $x\in[2x_0,4x_0]$.

Продолжая этот рекуррентный процесс легко получить формулы для нахождения $f_k(x)$ и $g_k(x)$

$$g_k(x)=\sum_{i=1}^{k}[\psi(x-(2i-1)x_0)-\tau(x-2ix_0)]+$$

$$+\varphi(x-2kx_0)+\lambda k[\psi(x_0)-\tau(x_0)]-f(0), \tag{14}$$

$$f_k(x)=\sum_{i=1}^{k}[\tau(x-2ix_0)-\psi(x-(2i-1)x_0)]+$$

$$+\tau(x)+\varphi(x-2kx_0)+\lambda k[\tau(x_0)-\psi(x_0)]+\lambda\tau(x_0)+f(0), \tag{15}$$

где $x\in[2ix_0,2(i+1)x_0]$ для $k=1,...,n-1$ и $x\in[l-r,l]$ для $k=n$.

В силу регулярности решения очевидны следующие требования:

$$g_k(2kx_0)=g_{k-1}(2kx_0),\ g'_k(2kx_0)=g'_{k-1}(2kx_0),\ g''_k(2kx_0)=g''_{k-1}(2kx_0),$$

$$f_k(2kx_0)=f_{k-1}(2kx_0),\ f'_k(2kx_0)=f'_{k-1}(2kx_0),\ f''_k(2kx_0)=f''_{k-1}(2kx_0),\ k=1,2,...,n,$$

которые выполняются при следующих условиях

$$\varphi(2x_0)=(1+\lambda)\psi(x_0), \tag{16}$$

$$\tau(0)+\lambda\tau(x_0)=\varphi(0), \tag{17}$$

$$\psi'(x_0)-\tau'(0)=\varphi'(0)-\varphi'(2x_0), \tag{18}$$

$$\psi''(x_0)-\tau''(0)=\varphi''(0)-\varphi''(2x_0). \tag{19}$$

Остается выписать искомое решение задачи. Для этого разобьем нашу область $\Omega$ на $2n+1$ областей

$$\Omega_{2i}=\{(x,y): 2x_0i\le x-y<2x_0(i+1), 2x_0i\le x+y<2x_0(i+1), 0<y<x_0\},$$

$i=0,1,...,n-1,$

$$\Omega_{2i+1}=\{(x,y): 2x_0i\le x-y\le 2x_0(i+1), 2x_0(i+1)<x+y<2x_0(i+2)\},$$

$i=0,1,...,n-2,$

$$\Omega_{2n-1}=\{(x,y): 2(n-1)x_0<x-y<2nx_0, 2nx_0<x+y<l, 0<y<x_0\},$$

$$\Omega_{2n}=\{(x,y): 2nx_0<x-y<l, 2nx_0<x+y<l, 0<y<\frac{r}{2}\}.$$

Формула (4) позволяет выписать решение в каждой из $2n+1$ областей

$$u(x,y)=\begin{cases} f_i(x-y)+g_i(x+y)-\frac{\lambda}{1+\lambda}[f_i(x_0-y)+g_i(x_0+y)], (x,y)\in\Omega_{2i}, i=\overline{0,n},\\ f_i(x-y)+g_{i+1}(x+y)-\frac{\lambda}{1+\lambda}[f_i(x_0-y)+g_{i+1}(x+y)], (x,y)\in\Omega_{2i+1}, i=\overline{0,n-1},\end{cases} \tag{20}$$

где $g_i, f_i$ вычисляются по формулам (14), (15) соответственно.

**Теорема**. Пусть выполнены условия (16) - (19). Тогда задача D однозначно разрешима и ее решение выписывается по формуле (20).

**Замечание 1**. Если $l=2x_0$, то, очевидно, что

$$u(x,y)=\tau(x-y)+\lambda\tau\left(\frac{l}{2}\right)-\varphi(x-y)+\varphi(x+y)-$$

$$-\frac{\lambda}{1+\lambda}\left[\tau\left(\frac{l}{2}-y\right)+\lambda\tau\left(\frac{l}{2}\right)-\varphi\left(\frac{l}{2}-y\right)+\varphi\left(\frac{l}{2}+y\right)\right],$$

и оно определено в области $\Omega=\{(x,y): 0<x-y<l, 0<x+y<l, 0<y<l/2\}$.

**Замечание 2.** При $\beta = 0$ и $\beta \neq \lambda$ однозначная разрешимость задачи в области $\Omega_0$ эквивалентным образом редуцируется к разрешимости функционального уравнения с параметром, исследование которого автор провел в статье, сданной в печать.

**Замечание 3.** Следует отметить, что полученное решение исследуемой задачи невозможно продолжить за прямую $y = x_0$. Такая же ситуация была и при исследовании задачи Коши для уравнения (1). Можно предположить, что прямая $y = x_0$ играет роль характеристики для уравнения (1).

## Заключение

Постановка основных краевых задач для нагруженных гиперболических уравнений существенно зависит от вида нагрузки. Если след нагруженного слагаемого является характеристическим многообразием, то постановка основных краевых и начальных задач осуществляется также как для уравнений без нагрузки. Как правило разрешимость поставленной задачи эквивалентным образом редуцируется к интегральному, интегро-дифференциальному или функциональному уравнению относительно следа (нагрузки) решения. Для иллюстрации отметим несколько работ [8]-[11].

Если же след нагруженного слагаемого является нехарактеристическим, то, учитывая замечание 1, приходим к выводу, что область где ищется решение достаточно трансформируется и нужно правильно выбрать многообразия, которые будут носителями начальных, краевых или смешанных данных. В этой работе фактически показано, как правильно ставить задачу Дарбу для нагруженного гиперболического уравнения с нехарактеристической нагрузкой. Случай, когда $\beta = 0$.

**Конкурирующие интересы.** Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

**Авторский вклад и ответственность.** Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

## Список литературы

1. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применение.* М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Дженалиев М. Т., Ромазанов М. И. *Нагруженные уравнения как возмущение дифференциальных уравнений.* Аматы, 2010. 336 с.
3. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, *Дифференц. уравнения*, 1976. Т. 12, № 1, С. 103–108.
4. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для гиперболических уравнений, *Доклады АН СССР*, 1970. Т. 195, № 4, С. 776–779.
5. Аттаев А. Х. Задача с данными на параллельных характеристиках для нагруженного волнового уравнения, *Доклады АМАН*, 2008. Т. 10, № 2, С. 14–16.
6. Аттаев А. Х. Задача Коши для существенно нагруженного гиперболического уравнения, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2021. № 1(12), С. 5–12.
7. Аттаев А. Х. Задача граничного управления для нагруженного уравнения колебания струны, *Дифференц. уравнения*, 2020. № 56(5), С. 646–651.
8. Гогуноков З. Г. Задача Гурса для нагруженного гиперболического уравнения второго порядка, *Доклады АМАН*, 2000. № 5(1), С. 20–23.

9. Казиев В. М. Задача Гурса для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения, *Дифференц. уравнения*, 1981. № 2(17), С. 313–319.
10. Репин О.А., Тарасенко А.В. Задача Гурса и Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, *Математический журнал*, 2011. № 2(11), С. 64–72.
11. Огородников Е. Н. Некоторые характеристические задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений и их связь с нелокальными краевыми задачами, *Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, 2003. № 19, С. 22–28.

*Аттаев Анатолий Хусеевич* – кандидат физико-математических наук, заведующий отделом «Уравнения смешанного типа», Институт прикладной математики и автоматизации, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, Россия, ORCID 0000-0001-5864-6283.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2022. vol. 40. no. 3. pp. 7–15. ISSN 2079-6641

MSC 35L10 Research Article

# On a nonlocal boundary value problem for a model hyperbolic nonlocal equations

***A. Kh. Attaev***

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 89A, Shortanova St., Nalchik, 360000, Russia

E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

The paper studies the problem with internal-boundary non-characteristic displacement for a model heavily loaded second-order hyperbolic type equation with two independent variables. We emphasize that for loaded hyperbolic equations with the load being characteristic, the main initial and boundary value problems are formulated as well as for ordinary equations. But if we deal with a non-characteristic load, then the task is reduced to the correct choice among the manyfold inherent in the initial, boundary, and mixed data. An analogue of the mean value theorem and an analogue of the d0Alembert formula are given. To solve the problem, the d'Alembert method is used.

*Key words: heavily loaded differential equation, internal-boundary non-characteristic displacement, mean value theorem, d'Alembert's method, functional equation, characteristics of a hyperbolic equation.*

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-7-15

Original article submitted: 16.10.2022 Revision submitted: 20.11.2022

**For citation.** Attaev A. Kh. On a nonlocal boundary value problem for a model hyperbolic nonlocal equations. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **40**: 3, 7-15. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-7-15

**Competing interests.** The author declares that there are no conflicts of interest with respect to authorship and publication.

**Contribution and responsibility.** The author contributed to the writing of the article and is solely responsible for submitting the final version of the article to the press. The final version of the manuscript was approved by the author.



## References

[1] Nakhushev A. M. Nagruzhennyye uravneniya i ikh primeneniye [Loaded equations and their application]. Moscow, Nauka, 2012, p. 232 (In Russian).

**The study was carried out without support from foundations.**

[2] Dzhenaliyev M.T., Romazanov M.I. Nagruzhennyye uravneniya kak vozmushcheniye differentsial'nykh uravneniy [Loaded equations as a perturbation of differential equations]. Amaty, 2010, p. 336 (In Russian).

[3] Nakhushev A. M. The Darboux problem for a certain degenerate second order loaded integrodifferential equation, Differ. Uravn., 1976, 12:1, 103–108 (In Russian).

[4] Nakhushev A. M.The Darboux problem for hyperbolic equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1970, 195:4, 776–779 (In Russian).

[5] Attayev A. Kh. Zadacha s dannymi na parallel'nykh kharakteristikakh dlya nagruzhennogo volnovogo uravneniya, Doklady AMAN. 2008, 10:2, 14–16 (In Russian).

[6] Attaev A. Kh. Cauchy problem for a substantially loaded hyperbolic equation, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2021, 37: 4, 10-15. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-10-15.

[7] Attaev A. Kh. Boundary control problem for a loaded string vibration equation, Differential Equations. 2020, 56:5, 635-640. DOI: 10.1134/S0012266120050080.

[8] Gogunokov Z. G. Zadacha Gursa dlya nagruzhennogo giperbolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka, Doklady AMAN, 2000, 5(1), 20–23 (In Russian).

[9] Kaziyev V. M. Zadacha Gursa dlya odnogo nagruzhennogo integro-differentsial'nogo uravneniya, Differents. uravneniya, 1981, 2(17), 313–319 (In Russian).

[10] Repin O. A., Tarasenko A. V. Zadacha Gursa i Darbu dlya odnogo nagruzhennogo integro - differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka", Matematicheskiy zhurnal, 2011, 2(11), 64–72 (In Russian).

[11] Ogorodnikov Ye. N. Nekotoryye kharakteristicheskiye zadachi dlya sistem nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy i ikh svyaz' s nelokal'nymi krayevymi zadachami, Vestnik SamGTU. Seriya: Fiz.-mat.nauki, 2003, 19, 22–28 (In Russian).

*Attaev Anatoly Khuseievich* – Ph.D. (Phys. & Math.), Head of Department «Equations of Mixed Type», Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Republic, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0001-5864-6283.