УДК 519.622.2 Научная статья

Численная реализация математической модели (SEIRD) на основе данных распространения пятой волны COVID-19 в России и регионах

А. Ф. Цахоева Д. Д. Шигин

Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова,
362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 44-46, Россия
E-mail: shigin.d1@yandex.ru

В данной работе представлены результаты моделирования пятой волны пандемии COVID-19, при помощи SEIRD модели, при построении которой использовалась система дифференциальных уравнений дробного порядка. Приведены графические иллюстрации численных решений и параметры модели. В модели учитываются следующие группы людей: восприимчивые к заболеванию (S); инфицированные без симптомов (E); инфицированные с симптомами (I); выздоровевшие (R); умершие (D). За основу взяты публичные данные по заболеваемости в России и в следующих субъектах: Москва, Санкт-Петербург и Камчатский край.

Ключевые слова: Производная дробного порядка, COVID-19, SEIRD модель.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-103-118

Поступила в редакцию: 10.06.2022 В окончательном варианте: 23.08.2022

Для цитирования. Цахоева А. Ф., Шигин Д. Д. Численная реализация математической модели (SEIRD) на основе данных распространения пятой волны COVID-19 в России и регионах // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 39. № 2. С. 103-118. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-103-118

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

© Цахоева А. Ф., Шигин Д. Д., 2022

Введение

Коронавирус представляет собой широкую категорию вирусов, связанных с различными заболеваниями: от типичной простуды до чрезвычайно серьезных состояний, включая ближневосточный респираторный синдром (MERS), а также тяжелый острый респираторный синдром (SARS). В 2019 году новый коронавирус был

Финансирование. Работа выполнена без финансовой поддержки

обнаружен в Ухане, Китай. Он представлял собой новый коронавирус, который никогда не встречался среди людей. Меры по борьбе с COVID-19, принимаемые государствами, не смогли сдержать распространение эпидемии. В результате 11 марта 2020 года Всемирная организация здравоохранения объявила эту вспышку пандемией. COVID-19 радикально повлиял на повседневную жизнь во всем мире.

Коронавирус способен передаваться от человека к человеку разными путями. По текущим данным, вирус передается в основном между людьми, которые находятся в тесном контакте друг с другом. Люди могут заразиться при контакте вируса с глазами, носом или ртом, также при контакте с предметами, пораженными вирусом. Различные штаммы SARS-CoV-2 имеют различные свойства. Один из последних, Омикрон, распространяется быстрее, чем предыдущие, а также способен заражать переболевших и вакцинированных [1]-[3].

Математические модели широкого применяются для изучения и описания различных процессов во многих областях: экономика, финансы, климат, медицина [4], [5]. Использование математических моделей для прогнозирования распространения эпидемий, особенно важно для понимания их природы и разработки эффективных методов борьбы. SI, SIS, SIR, SEIR, SIRD и SEIRD – известные и наиболее часто используемые модели распространения болезней, они строятся использованием обыкновенных дифференциальных уравнений. Неизвестные функции в данных моделях описывают количество людей в определенных группах [6]-[8]. Для моделирования и исследования пандемии COVID-19 уже было представлено множество моделей [9]-[14].

Метод исследования с использованием производных дробного порядка широко распространен в практически во всех областях науки, включая математику, физику и машиностроение. Различные методы использовались для изучения дробного исчисления и уравнений дробного порядка в течение предыдущих трех десятилетий, в том числе в исследованиях применяются оператор Эрдейи–Кобера, оператор Римана–Лиувилля, оператор Капуто, оператор Вейля–Рисса и оператор Грюнвальда–Летникова [15]-[19].

При построении математических моделей, описывающих распространение эпидемий, также применяют производные дробного порядка [20]. В данной работе представлены результаты моделирования пятой волны пандемии COVID-19, вызванной в том числе штаммом омикрон, с помощью модели, которую называют SEIRD. Приведены графические иллюстрации численных решений и параметры модели. Как отмечалось в [21], дробные производные обладают свойствами памяти, следовательно, они лучше подходят для моделирования эпидемии. Кроме того, в дробной модели порядок производных дает большую свободу при подборе данных.

SEIRD модель дробного порядка

Среди всех определений дробной производной в реальных приложениях наиболее часто используется производная Капуто. Она определяется следующим обра-

зом [22]:

$$\partial^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^n(\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

где $n = [\alpha]$ – первое целое число, превышающее α, Γ — гамма-функция, $f \in C^n$.

В данной работе использована SEIRD модель, представленная в [23], в которой учитываются 5 групп лиц: восприимчивые, бессимптомные инфицированные, инфицированные с симптомами, излечившиеся и умершие. Название модели происходит от первых букв английских эквивалентов названий групп. Уравнения модели имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \partial^q S = -S(r_1 E + r_2 I), \\ \partial^q E = S(r_1 E + r_2 I) - (a_1 + c_1) E, \\ \partial^q I = c_1 E - (a_2 + c_2) I, \\ \partial^q R = a_1 E + a_2 I, \\ \partial^q D = c_2 I, \end{cases} \tag{2}$$

где $0 < q < 1$.

Начальные условия:

$$\begin{aligned} S(0) &= S_0, \\ E(0) &= E_0, \\ I(0) &= I_0, \\ R(0) &= R_0, \\ D(0) &= D_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Модель (3) – (3) предполагает, что люди из группы бессимптомных (E) могут переместиться либо в группу выздоровевших (R), либо в группу заболевших (I). a_1 и c_2 – скорости перемещения заболевших из E в R и I соответственно. Кроме того, пациенты с симптомами (I) выздоравливают со скоростью a_2, или умирают со скоростью c_2, т.е. попадают в группы R и D. r_1 и r_2 – скорость заражения от бессимптомных больных и больных с симптомами соответственно. В [23] предполагается, что обнаруженные инфицированные индивидуумы изолируются, и, таким образом, мы предполагаем $r_2 = 0$. На первом этапе эпидемии все население считается восприимчивым к заболеванию $S(0) = N$. Однако за счет принудительного социального дистанцирования, вакцинации и прочих факторов, количество восприимчивых людей уменьшается, и, следовательно уменьшается также и значение, принятое для $S(0)$. Коэффициенты модели неотрицательны.

Обозначим $\tau_I = 5$ и $\tau_D = 11$ – среднее время инкубации и среднее время от первых симптомов до смерти. По аналогии с [23], рассмотрим суммы $\alpha_1 = a_1 + c_1$ и $\alpha_2 = a_2 + c_2$, которые который связаны с τ_I и τ_D следующим образом

$$\tau_I = \frac{1}{\alpha_1}, \quad \tau_D = \frac{1}{\alpha_2}.$$

Уровень смертности фиксируется константой, исходя из статистических данных, его связь с другими коэффициентами выражается формулой

$$m = \frac{c_1}{\alpha_1}\frac{c_2}{\alpha_2}.$$

Как и в классической модели параметры a_1, r_1, $S(0)$ и $E(0)$ задаются исходя из наилучшего соответствия результатов расчетов и реальных данных [11]. Следовательно, задавая параметры a_1, r_1, $S(0)$ и $E(0)$, мы можем вычислить оставшиеся параметры модели по следующим формулам:

$$c_1 = \alpha_1 - a_1, \quad c_2 = m\frac{\alpha_1\alpha_2}{c_1}, \quad a_2 = \alpha_2 - c_2.$$

Физический смысл связи α_1 и α_2 с τ_I и τ_D, а также с m рассматривается в приложении работы [23].

Пусть $R^5_+ = \left\{X \in R^5 : X \geq 0\right\}$ и $X(t) = (S(t), E(t), I(t), R(t), D(t))$.

Теорема 1. *Существует единственное неотрицательное решение для системы дробных дифференциальных уравнений* (3)*, и это решение принадлежит* R^5_+.

Доказательство. Существование и единственность решения уравнений (3) может быть доказано из ([21], теорема 3.1, и следствие 3.2). Согласно [20], мы должны показать, что область R^5_+ положительно инвариантна. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \partial^q S\big|_{S=0} &= 0, \\ \partial^q E\big|_{E=0} &= 0, \\ \partial^q I\big|_{I=0} &= c_1 E, \\ \partial^q R\big|_{R=0} &= a_1 E + a_2 I, \\ \partial^q D\big|_{D=0} &= c_2 I. \end{aligned} \tag{4}$$

Так как, все уравнения (4) ≥ 0, используя ([20], лемма 3.1 и следствие 3.2) мы можем сказать, что теорема 1 доказана и решение принадлежит R^5_+. □

Разностная схема

Пусть $[0, T]$ – отрезок времени, на котором производится моделирование. Через $\overline{\omega}_\tau$ обозначим равномерную сетку на отрезке $[0, T]$:

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{t_j = j\tau, j = 0, 1, \ldots, N, \tau N = T\right\}.$$

Задаче (3) поставим в соответствие разностную задачу (4)

$$\begin{cases} \Delta^q_{0,t_{j+1}} S = -S_j\left(r_1 E_j + r_2 I_j\right), \\ \Delta^q_{0,t_{j+1}} E = S_j\left(r_1 E_j + r_2 I_j\right) - (a_1 + c_1) E_j, \\ \Delta^q_{0,t_{j+1}} I = c_1 E_j - (a_2 + c_2) I_j, \\ \Delta^q_{0,t_{j+1}} R = a_1 E_j + a_2 I_j, \\ \Delta^q_{0,t_{j+1}} D = c_2 I_j, \end{cases} \tag{5}$$

где $S_0 = S(0)$, $E_0 = E(0)$, $I_0 = I(0)$, $R_0 = R(0)$, $D_0 = D(0)$ – заданные начальные условия; $j = \overline{0,n}$; $\Delta^q_{0,t_{j+1}} = \frac{1}{\Gamma(2-q)} \sum_{s=0}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-q} - t_{j-s}^{1-q} \right) \frac{u_{s+1}-u_s}{\tau}$ – дискретный аналог дробной производной порядка $O(\tau^{2-q})$ [24]; $q \in (0,1)$.

Используя схему (4), на каждом шаге получим набор из пяти значений, соответствующих S_{j+1}, E_{j+1}, I_{j+1}, R_{j+1} и D_{j+1}.

Результаты

Для получения параметров модели мы использовали данные за период, совпадающий с началом пятой волны заболеваемости. Статистические данные получены на портале, созданном государством для информирования населения (стопкоронавирус.рф), содержащим оперативные данные о развитии ситуации как в стране, так и в регионах.

Результаты моделирования приведены для следующих субъектов:

- Россия;
- Москва;
- Санкт-Петербург;
- Камчатский край.

В таб. 1 и в таб. 2 приведены параметры модели, а также начальные условия для каждого субъекта.

На рис. 1, 2, 3, 4 приведены графики результатов расчетов для всей России и субъектов.

Таблица 1

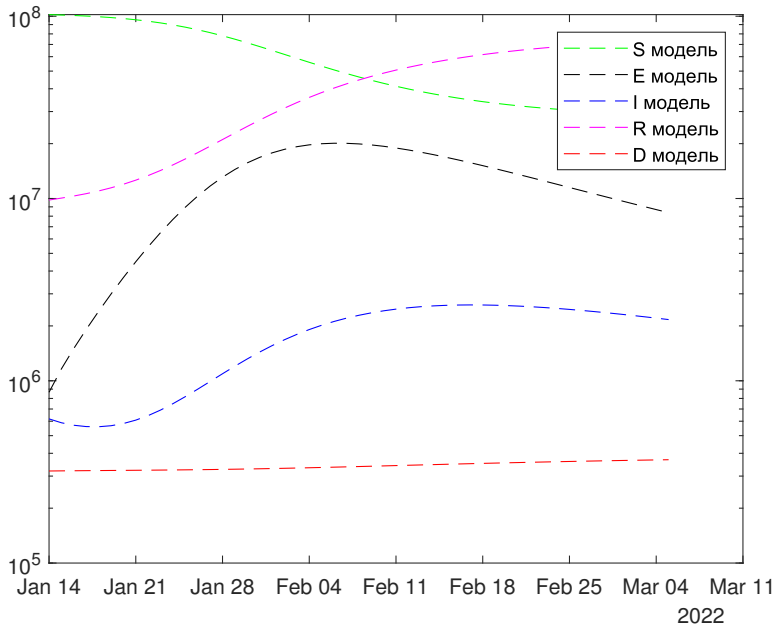
Параметры модели [Model parameters]

Субъект	q	m	r_1	a_1
Россия	$0,82$	$0,001$	$4,7 \times 10^{-9}$	$0,1815$
Москва	$0,95$	0.0005	5.5×10^{-8}	$0,17$
Санкт-Петербург	$0,92$	0.0014	1.32×10^{-7}	$0,155$
Камчатский край	$0,9$	$0,001$	$1,4 \times 10^{-6}$	$0,138$

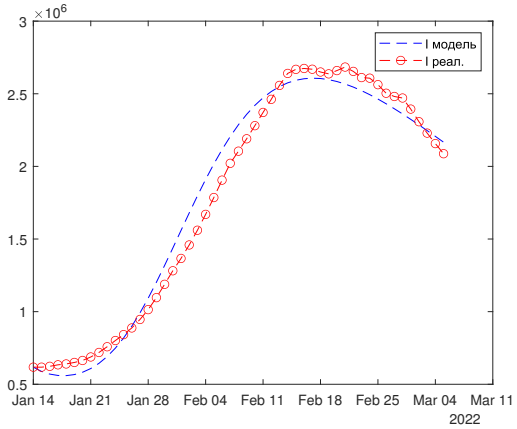
Таблица 2

Начальные условия [Initial conditions]

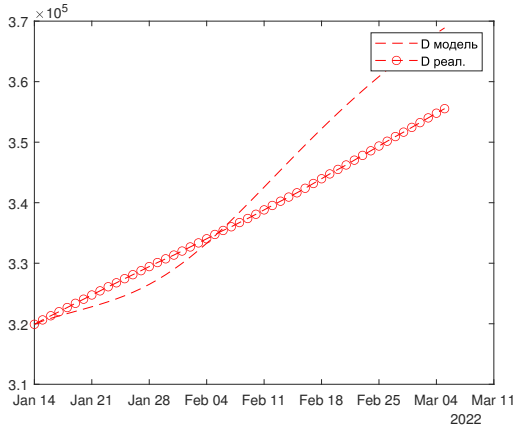
Субъект	S_0	E_0	I_0	R_0	D_0
Россия	$145,8 \times 10^6 \times 0,7$	$617914 \times 1,4$	617914	9809300	319911
Москва	$12632409 \times 0,7$	$135492 \times 1,4$	135492	1902438	37739
Санкт-Петербург	$5376672 \times 0,7$	$24795 \times 1,4$	24795	819567	28872
Камчатский край	$312337 \times 0,7$	$4629 \times 1,4$	4629	19912	527



а)



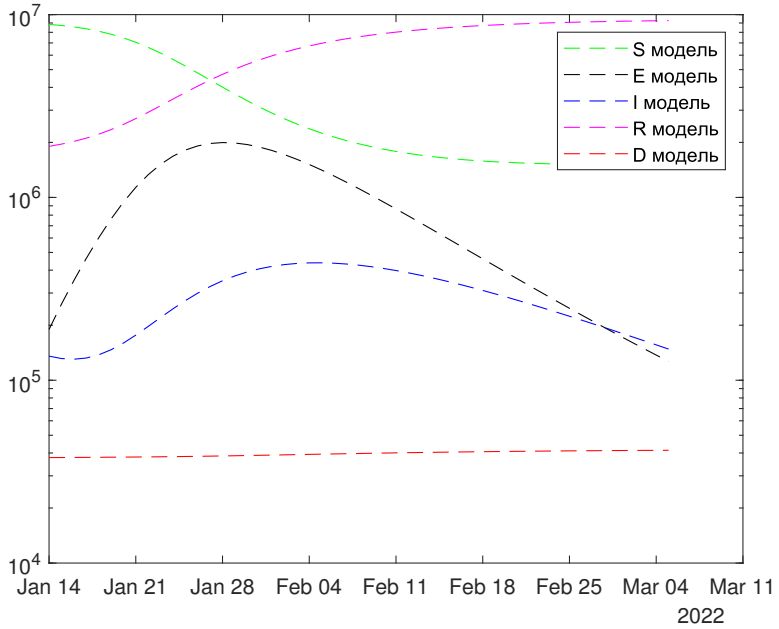
б)



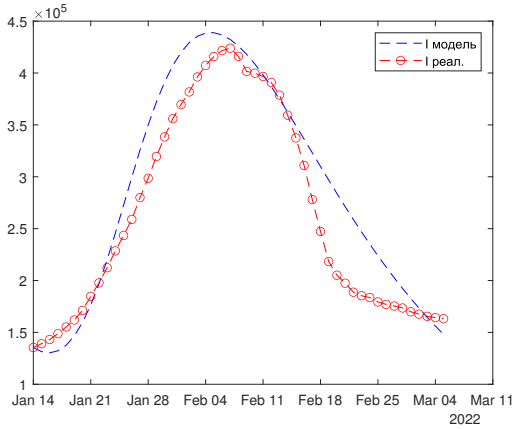
в)

Рис. 1. Результаты для России: а) Общий график в логарифмическом масштабе, б) зараженные с симптомами, в) умершие.

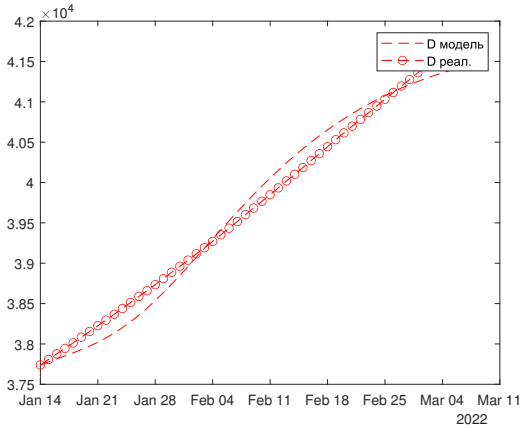
[Figure 1. Results for Russia: a) General graph on a logarithmic scale, b) infected with symptoms, c) deceased]



а)



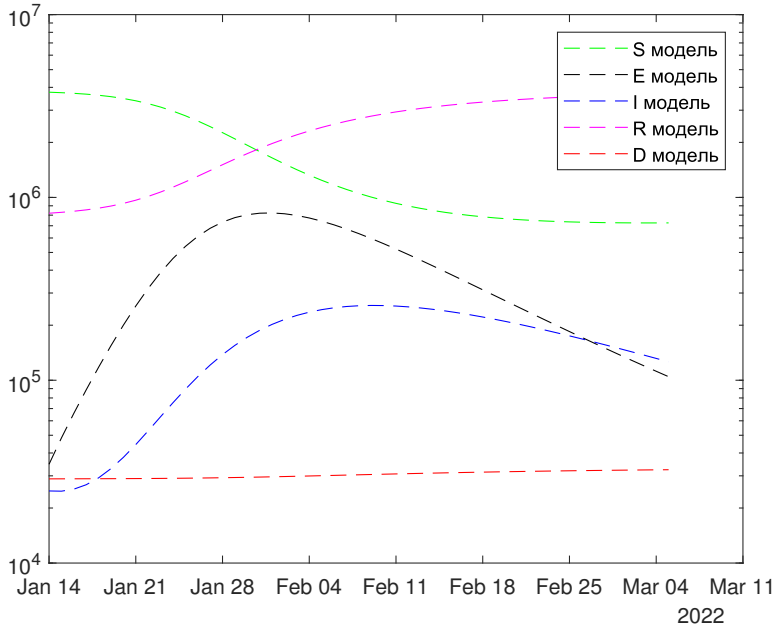
б)



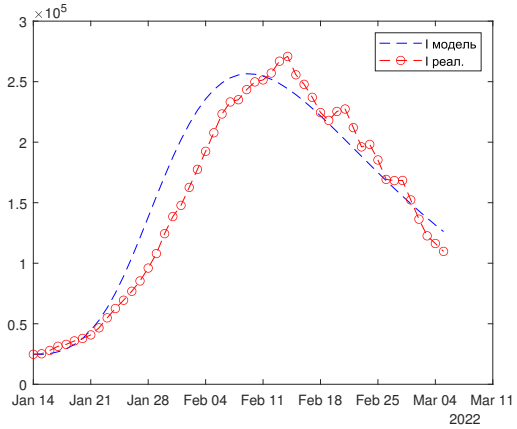
в)

Рис. 2. Результаты для Москвы: а) Общий график в логарифмическом масштабе, б) зараженные с симптомами, в) умершие.

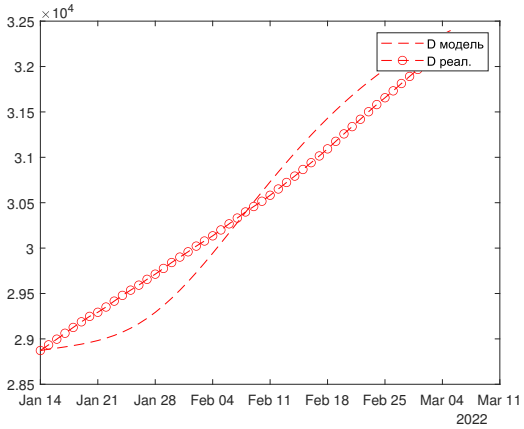
[Figure 2. Results for Moscow: a) General graph on a logarithmic scale, b) infected with symptoms, c) deceased]



а)



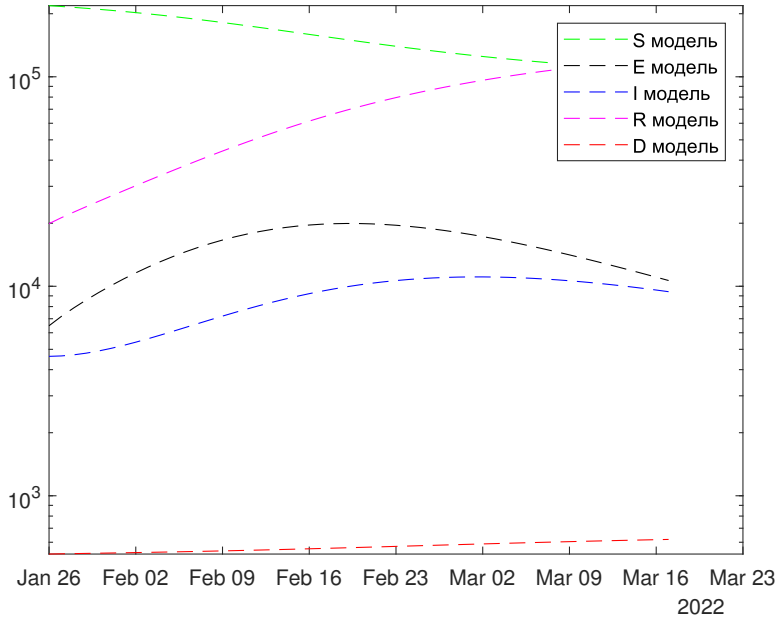
б)



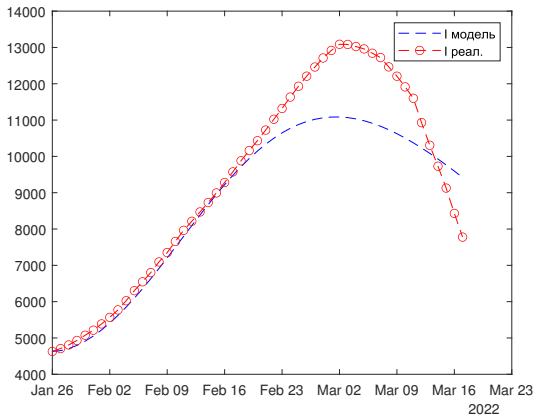
в)

Рис. 3. Результаты для Санкт-Петербурга: а) Общий график в логарифмическом масштабе, б) зараженные с симптомами, в) умершие.

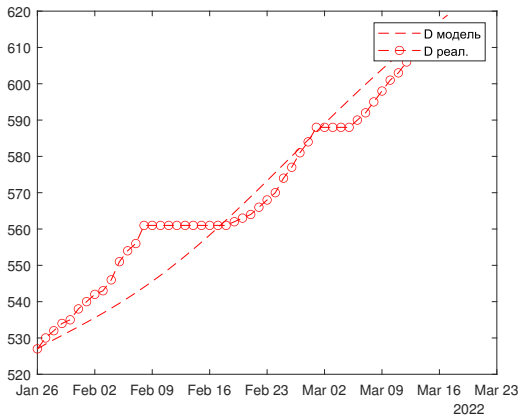
[Figure 3. Results for St. Petersburg: a) General graph on a logarithmic scale, b) infected with symptoms, c) deceased]



а)



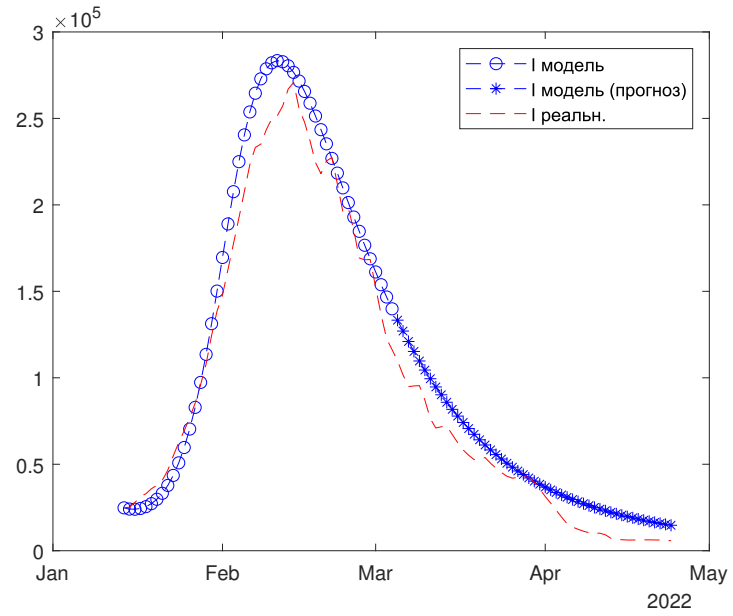
б)



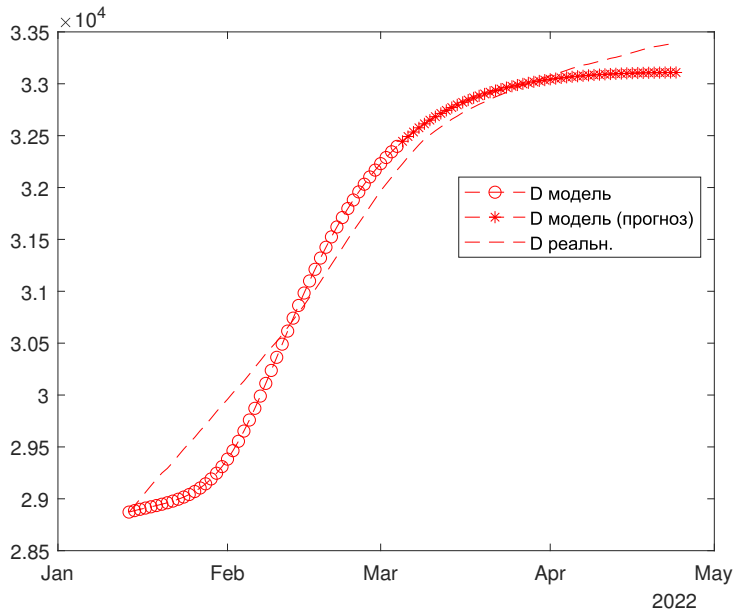
в)

Рис. 4. Результаты для Камчатского края: а) Общий график в логарифмическом масштабе, б) зараженные с симптомами, в) умершие.
[Figure 4. Results for Kamchatka Krai: a) General graph on a logarithmic scale, b) infected with symptoms, c) deceased]

При корректном подборе коэффициентов модели мы можем построить прогноз. Рассмотрим результаты прогнозирования для Санкт-Петербурга. Для этого произведем расчет с теми же параметрами, что приведены в таб. 1 и таб. 2. На рис. 5 представлены результаты прогнозирования.



а)



б)

Рис. 5. Прогноз для Санкт-Петербурга: а) зараженные с симптомами, б) умершие. Круглыми маркерами обозначены данные, на которых был произведен подбор параметров. Маркерами со звездочками обозначены прогнозируемые данные.

[Figure 5. Predict for St. Petersburg: a) infected with symptoms, b) deceased. The data used for estimating the parameters are shown by circles. Markers with asterisks indicate predicted data.]

Заключение

В данной работе была рассмотрена SEIRD модель распространения эпидемии. В уравнениях модели были использованы дробные производные, свойства которых положительно сказываются на результатах моделирования. Не смотря на свою простоту, данная модель показывала достаточно высокую точность на ранних этапах эпидемии [23]. В связи с началом пятой волны заражений, а также с распространением омикрон штамма коронавирусной инфекции, который способен заразить уже вакцинированных людей, появилась возможность вновь применить данную модель и изучить полученные результаты.

Неизвестные функции SEIRD модели описывают состояние пяти групп людей:

- восприимчивые;
- инфицированные без симптомов;
- инфицированные с симптомами;
- выздоровевшие;
- умершие.

Реальные данные, на основе которых можно произвести примерное сравнение, есть только по двум признакам: инфицированные с симптомами и умершие. Мы сравнили результаты моделирования с этими данными, для России в целом и для Санкт-Петербурга результат коррелирует с статистическими данными.

Стоит отметить, что статистические данные содержат в себе информацию о заболевших всеми штаммами COVID-19. Этот факт в любом случае вносит погрешность в результаты моделирования в связи с разными свойствами штаммов коронавируса.

В целом SEIRD модель дробного порядка возможно использовать для моделирования распространения эпидемии в рамках отдельно взятого штамма. Появление же новых штаммов, вакцинация и другие факторы, ведут к изменению коэффициентов модели.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы учавствовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление ококнчательной версии статьи в печать. Окончательная форма рукописи была одобрена всеми авторами.

Список литературы

1. Wilhelm A., et al. Reduced Neutralization of SARS-CoV-2 Omicron Variant by Vaccine Sera and Monoclonal Antibodies, *medRxiv*, 2021 DOI: 10.1101/2021.12.07.21267432.
2. Liu L., et al. Striking antibody evasion manifested by the Omicron variant of SARS-CoV-2, *Nature*, 2022. vol. 602, no. 7896, pp. 676—681 DOI: 10.1038/s41586-021-04388-0.

3. Rössler A., Riepler L., Bante D., Dorothee von Laer, Kimpel J. SARS-CoV-2 B.1.1.529 variant (Omicron) evades neutralization by sera from vaccinated and convalescent individuals, *New England Journal of Medicine*, 2022. vol. 386, no. 7, pp. 698–700 DOI: 10.1056/NEJMc21192362.

4. Balcilar M., Bouri E., Gupta R., Roubaud D. Can volume predict Bitcoin returns and volatility? A quantiles-based approach, *Economic Modelling*, 2017. vol. 64, pp. 74–81 DOI: 10.1016/j.econmod.2017.03.019.

5. Hirata Y., Aihara K. Improving time series prediction of solar irradiance after sunrise: Comparison among three methods for time series prediction, *Solar Energy*, 2017, pp. 294–301 DOI: 10.1016/j.solener.2017.04.020.

6. Chiyaka C., Garira W., Dube S. Transmission model of endemic human malaria in a partially immune population, *Mathematical and Computer Modelling*, 2007. vol. 46, no. 5, pp. 806–822 DOI: 10.1016/j.mcm.2006.12.010.

7. Danca M. F., Kuznetsov N. Matlab code for Lyapunov exponents of fractional-order systems, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng*, 2018. vol. 28, no. 5, pp. 14 DOI: 10.1142/S0218127418500670.

8. Ögren P., Martin C. F. Vaccination strategies for epidemics in highly mobile populations, *Applied Mathematics and Computation*, 2002. vol. 127, no. 2, pp. 261–276 DOI: 10.1016/S0096-3003(01)00004-2.

9. Kucharski A. J., et al. Early dynamics of transmission and control of covid-19: a mathematical modelling study, *Lancet Infectious Diseases*, 2020. vol. 20, no. 5, pp. 553–558 DOI: 10.1016/S1473-3099(20)30144-4.

10. Rajagopal K., et al. A fractional-order model for the novel coronavirus (COVID-19) outbreak, *Nonlinear Dynamics*, 2020. vol. 101, no. 1, pp. 711–718 DOI: 10.1007/s11071-020-05757-6.

11. Anastassopoulou C., Russo L., Tsakris A., Siettos C. Data-based analysis, modelling and forecasting of the COVID-19 outbreak, *PLOS ONE*, 2020. vol. 15, no. 3, pp. 1–21 DOI: 10.1371/journal.pone.0230405.

12. Casella F. Can the COVID-19 Epidemic Be Controlled on the Basis of Daily Test Reports?, *IEEE Control Systems Letters*, 2021. vol. 5, no. 3, pp. 1079–1084 DOI: 10.1109/LCSYS.2020.3009912.

13. Wu J. T., et al. Estimating clinical severity of COVID-19 from the transmission dynamics in Wuhan, China, *Nature Medicine*, 2020. vol. 26, no. 4, pp. 506–510 DOI: 10.1038/s41591-020-0822-7.

14. Hellewell J., et al. Feasibility of controlling COVID-19 outbreaks by isolation of cases and contacts, *The Lancet Global Health*, 2020. vol. 8, no. 4, pp. 488–496 DOI: 10.1016/S2214-109X(20)30074-7.

15. Псху А. В. Уравнение дробной диффузии с оператором дискретно распределенного дифференцирования, *Сиб. электрон. матем. изв.*, 2016. Т. 13, С. 1078–1098 DOI: 10.17377/semi.2016.13.086.

16. Псху А. В. Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка, *Матем. сб.*, 2011. Т. 202, №4, С. 111–122 DOI: 10.4213/sm7645.

17. Wang W., Khan M. A. Analysis and numerical simulation of fractional model of bank data with fractal-fractional Atangana-Baleanu derivative, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020. vol. 369, pp. 15 DOI: 10.1016/j.cam.2019.112646.

18. Diethelm K., Ford N. J. Analysis of fractional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2002. vol. 265, no. 2, pp. 229–248.

19. Yu F. Integrable coupling system of fractional soliton equation hierarchy, *Physics Letters. A*, 2009. vol. 373, no. 41, pp. 3730–3733 DOI: 10.1016/j.physleta.2009.08.017.

20. Demirci E., Unal A., Ozalp N. A fractional order SEIR model with density dependent death rate, *Hacettepe journal of mathematics and statistics*, 2011. vol. 40, pp. 287–295.

21. Lin W. Global existence theory and chaos control of fractional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007. vol. 332, no. 1, pp. 709–726 DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.12.036.

22. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.12.036, 2003.

23. Chicchi L., Patti F. D., Fanelli D., Piazza F., Ginelli F. First results with a SEIRD model. Quantifying the population of asymptomatic individuals in Italy, *Part of the project "Analysis and forecast of COVID-19 spreading"*, 2020.

24. Таукенова Ф. И., Шхануков-Лафишев М. Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2006. Т. 46, № 10, С. 1785–1795 DOI: 10.1134/S0965542506100149.

Цахоева Альбина Феликсовна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики Северо-Осетинского государственного университета имени Коста Левановича Хетагурова, Владикавказ, Россия, ORCID 0000-0002-4179-9598.

Шигин Дмитрий Дмитриевич – магистрант факультета математики и компьютерных наук направления подготовки «Прикладная математика и информатика» Северо-Осетинского государственного университета имени Коста Левановича Хетагурова, Владикавказ, Россия, ORCID 0000-0002-5156-8048.

MSC 65L05 Research Article

Numerical implementation of a mathematical model (SEIRD) based on data from the spread of the fifth wave of COVID-19 in Russia and regions

A. F. Tsakhoeva, D. D. Shigin

North Ossetian State University named after K. L. Khetagurov, 362025, Vladikavkaz, Vatutin str., 44-46, Russia

E-mail: shigin.d1@yandex.ru

In the present paper, a fractional-order epidemic model with operator called the Caputo operator for the transmission of COVID-19 epidemic is analyzed. This model takes into account the following groups of people: susceptible (S), exposed (E), infected (I), recovered (R) and deceased (D). The model is called SEIRD, from the first letters of the names of the described groups. Calculations are based on public data on incidence in Russia and the following subjects: Moscow, St. Petersburg and Kamchatka Krai.

Key words: Fractional-order derivative, COVID-19, SEIRD model.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-103-118

Original article submitted: 10.06.2022 Revision submitted: 23.08.2022

For citation. Tsakhoeva A. F., Shigin D. D. Numerical implementation of a mathematical model (SEIRD) based on data from the spread of the fifth wave of COVID-19 in Russia and regions. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **39**: 2, 103-118. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-103-118

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

© Tsakhoeva A. F., Shigin D. D., 2022

References

[1] Wilhelm A., et al. Reduced Neutralization of SARS- CoV-2 Omicron Variant by Vaccine Sera and Monoclonal Antibodies, medRxiv, 2021 DOI: 10.1101/2021.12.07.21267432

Funding. The work was done without financial support

[2] Liu L., et al. Striking antibody evasion manifested by the Omicron variant of SARS-CoV-2, Nature, 2022. vol. 602, no. 7896, pp. 676—681 DOI: 10.1038/s41586-021-04388-0

[3] Rössler A., Riepler L., Bante D., Dorothee von Laer, Kimpel J. SARS-CoV-2 B.1.1.529 variant (Omicron) evades neutralization by sera from vaccinated and convalescent individuals, New England Journal of Medicine, 2022. vol. 386, no. 7, pp. 698–700 DOI: 10.1056/NEJMc21192362

[4] Balcilar M., Bouri E., Gupta R., Roubaud D. Can volume predict Bitcoin returns and volatility? A quantiles-based approach, Economic Modelling, 2017. vol. 64, pp. 74–81 DOI: 10.1016/j.econmod.2017.03.019

[5] Hirata Y., Aihara K. Improving time series prediction of solar irradiance after sunrise: Comparison among three methods for time series prediction, Solar Energy, 2017, pp. 294–301 DOI: 10.1016/j.solener.2017.04.020

[6] Chiyaka C., Garira W., Dube S. Transmission model of endemic human malaria in a partially immune population, Mathematical and Computer Modelling, 2007. vol. 46, no. 5, pp. 806–822 DOI: 10.1016/j.mcm.2006.12.010

[7] Danca M. F., Kuznetsov N. Matlab code for Lyapunov exponents of fractional-order systems, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng, 2018. vol. 28, no. 5, pp. 14 DOI: 10.1142/S0218127418500670

[8] Ögren P., Martin C. F. Vaccination strategies for epidemics in highly mobile populations, Applied Mathematics and Computation, 2002. vol. 127, no. 2, pp. 261–276 DOI: 10.1016/S0096-3003(01)00004-2

[9] Kucharski A. J., et al. Early dynamics of transmission and control of covid-19: a mathematical modelling study, Lancet Infectious Diseases, 2020. vol. 20, no. 5, pp. 553–558 DOI: 10.1016/S1473-3099(20)30144-4

[10] Rajagopal K., et al. A fractional-order model for the novel coronavirus (COVID-19) outbreak, Nonlinear Dynamics, 2020. vol. 101, no. 1, pp. 711–718 DOI: 10.1007/s11071-020-05757-6

[11] Anastassopoulou C., Russo L., Tsakris A., Siettos C. Data-based analysis, modelling and forecasting of the COVID-19 outbreak, PLOS ONE, 2020. vol. 15, no. 3, pp. 1–21 DOI: 10.1371/journal.pone.0230405

[12] Casella F. Can the COVID-19 epidemic be controlled on the basis of daily test reports? IEEE Control Syst. Lett. 2020, vol. 5(3), pp. 1079–1084 DOI: 10.1109/LCSYS.2020.3009912

[13] Wu J. T., et al. Estimating clinical severity of COVID-19 from the transmission dynamics in Wuhan, China, Nature Medicine, 2020. vol. 26, no. 4, pp. 506–510 DOI: 10.1038/s41591-020-0822-7

[14] Joel H., et al. Feasibility of controlling COVID-19 outbreaks by isolation of cases and contacts, The Lancet Global Health, 2020. vol. 8, no. 4, pp. 488–496 DOI: 10.1016/S2214-109X(20)30074-7

[15] Pskhu A. V. Fractional diffusion equation with a discretely distributed differentiation operator, Sib. Elektron. Math. Rep. 2016, vol. 13, pp. 1078–1098. DOI: 10.17377/semi.2016.13.086 (In Russian).

[16] Pskhu A. V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order Sb. Math. 2011. vol. 202, no. 4, pp. 571–582 DOI: 10.1070/SM2011v202n04ABEH004156

[17] Wang W., Khan M. A. Analysis and numerical simulation of fractional model of bank data with fractal-fractional Atangana-Baleanu derivative, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020. vol. 369, pp. 15 DOI: 10.1016/j.cam.2019.112646

[18] Diethelm K., Ford N. J. Analysis of fractional differential equations,Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002. vol. 265, no. 2, pp. 229–248.
[19] Yu F. Integrable coupling system of fractional soliton equation hierarchy, Physics Letters. A, 2009. vol. 373, no. 41, pp. 3730–3733 DOI: 10.1016/j.physleta.2009.08.017
[20] Demirci E., Unal A., Ozalp N. A fractional order SEIR model with density dependent death rate, Hacettepe journal of mathematics and statistics, 2011. vol. 40, pp. 287–295.
[21] Lin W. Global existence theory and chaos control of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 332(1), 709–726 (2007). DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.12.036
[22] Nakhushev A. M., Fractional calculus and its applications, Fizmatlit, Moscow, 2003. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.12.036 (In Russian).
[23] Chicchi L., Patti F.D., Fanelli D., Piazza F., Ginelli F. First results with a SEIRD model. Quantifying the population of asymptomatic individuals in Italy, Part of the project "Analysis and forecast of COVID-19 spreading 2020.
[24] Taukenova F. I., Shkhanukov-Lafishev M. Kh. Difference methods for solving boundary value problems for differential equations of fractional order, Comput. Math. Math. Phys., 2006. V. 46, No. 10, pp. 1785–1795 DOI: 10.1134/S0965542506100149. DOI: 10.1134/S0965542506100149 (In Russian).

Tsakhoeva Albina Feliksovna – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Applied Mathematics and Informatics, North Ossetian State University named after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia, ORCID 0000-0002-4179-9598.

Shigin Dmitry Dmitrievich – master student of the Faculty of Mathematics and Computer Science, specialty "Applied Mathematics and Informatics North Ossetian State University named after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia, ORCID 0000-0002-5156-8048.