

УДК 519.63

Научная статья

Локально-одномерные схемы для уравнения, описывающего коагуляционные процессы в конвективных облаках, обладающих «памятью»

М. Х. Шхануков–Лафишев¹, М. М. Лафишева², И. Д. Тайсаев³

¹ Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, д. 89 А, Россия

² Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, 360004, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, Россия

³ Научно-образовательный центр КБНЦ РАН, 360002, Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик, ул. Балкарова, 2, Россия

E-mail: taisauti@yandex.ru, lafisheramadina@gmail.com, idar0792@gmail.com

В статье рассматривается локально-одномерная разностная схема для параболического уравнения общего вида в p -мерном параллелепипеде. Для описания коагуляционных процессов в средах, обладающих «памятью», в уравнение включаются нелокальные (интегральные) источники специального вида. Для решения соответствующей разностной схемы получена априорная оценка, откуда следует ее сходимость.

Ключевые слова: краевая задача, локально-одномерная разностная схема, устойчивость и сходимость разностной схемы, погрешность аппроксимации.

 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-184-196

Поступила в редакцию: 29.04.2022

В окончательном варианте: 28.08.2022

Для цитирования. Шхануков–Лафишев М. Х., Лафишева М. М., Тайсаев И. Д. Локально-одномерные схемы для уравнения, описывающего коагуляционные процессы в конвективных облаках, обладающих «памятью» // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 39. № 2. С. 184-196.  DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-184-196

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Шхануков–Лафишев М. Х., Лафишева М. М., Тайсаев И. Д., 2022

Финансирование. Работа выполнена без финансовой поддержки

Введение

Краевые задачи для параболических уравнений с нелокальным источником возникают при изучении диффузии частиц в турбулентной плазме, переноса влаги в почвогрунтах, при описании функции распределения по массам капель за счет микрофизических процессов коагуляции (объединение мелких капель в большие по размеру агрегаты), дробления и замерзания капель в конвективных облаках [1]–[5]. Введем функцию $u(x, m, t)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ такую, что $u(x, m, t) dm$ дает в каждой точке x в момент времени t концентрацию облачных капель, масса которых заключена в интервале от m до $m + dm$. При этом $u(x, m, t) dm$ есть вероятность того, что масса облачных капель в момент времени t находится между m и $m + dm$. Величина $u(x, m, t)$ называется плотностью вероятности.

Постановка задачи

В цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0, T]$, основанием которого является p -мерный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_\alpha < \ell_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, p\}$, с границей Γ , рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, m, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad u(x, m, 0) = u_0(x, m), \quad x \in \bar{G}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} Lu = \sum_{\alpha=1}^p L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + r_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \\ - \frac{1}{p} u(x, m, t) \int_0^{m_1} \beta_1(m, m') u(x, m', t) dm' + \\ + \frac{1}{p} \int_0^{m/2} u(x, m - m', t) \beta_1(m, m - m') u(x, m', t) dm' + \\ + \frac{1}{p} \int_0^t K(x, t, \tau) u(x, m, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 < c_0 \leq k_\alpha \leq c_1, \quad |r_\alpha|, |K(x, t, \tau)| \leq c_2, \quad |\beta_1(m, m')|, |r_\alpha| \leq c_3,$$

где $\beta_1(m, m') = \pi(r(m) + r(m'))^2 \cdot |V_1(m) - V_1(m')| \cdot E(m, m')$, $r(m)$, $r(m')$ — радиусы сталкивающихся частиц; $V_1(m)$, $V_1(m')$ — скорости их падения; $E(m, m')$ — коэффициент захвата для капель; $\pi(r)$ — безразмерное давление. Нелокальные источники в (3) описывают коагуляционные процессы. Из (1)–(3) следует, что значение функции распределения по массам капель в момент времени t определяется ее значением во все предшествующие моменты времени, т. е. среда обладает «памятью». Именно оценка интеграла по времени вносит существенные изменения в методику [1] применения метода энергетических неравенств для доказательства устойчивости ЛОС.

Локально–одномерная разностная схема (ЛОС)

На отрезке $[0, T]$ введем равномерную сетку $\omega_\tau = \{t_j = j\tau: j = 0, 1, \dots, j_0\}$ с шагом $\tau = T/j_0$. Каждый из интервалов (t_j, t_{j+1}) разобьем на p частей точками $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha}{p}\tau$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$, и обозначим через $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$. Пространственную сетку выберем равномерной по каждому пространственному направлению Ox_α с шагом h_α , $h_\alpha = \ell_\alpha/N_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$:

$$\bar{\omega} = \prod_{\alpha=1}^p \bar{\omega}_\alpha, \quad \bar{\omega}_\alpha = \left\{ \chi_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha: i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \quad h_\alpha = \ell_\alpha/N_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p \right\}.$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\mathfrak{I}u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0, \quad (4)$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^p \mathfrak{I}_\alpha u = 0, \quad \mathfrak{I}_\alpha u = \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f, \quad (5)$$

где $f_\alpha(x, m, t)$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$ — произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x, m, t)$, удовлетворяющие условию нормировки

$$f_1 + f_2 + \dots + f_p = f.$$

На каждом полуинтервале Δ_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$ будем последовательно решать задачи

$$\mathfrak{I}\vartheta_{(\alpha)} = \frac{1}{p} \frac{\partial \vartheta_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha \vartheta_{(\alpha)} - f_\alpha, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \quad (6)$$

$$\vartheta_{(\alpha)} = 0, \quad \chi_\alpha = 0, \quad \chi_\alpha = l_\alpha,$$

Полагая при этом [6, стр. 522]

$$\begin{aligned} \vartheta_{(1)}(x, m, 0) &= u_0(x, m), \quad \vartheta_{(1)}(x, m, t_j) = \vartheta_{(p)}(x, m, t_j), \quad j = 1, 2, \dots, j_0, \\ \vartheta_{(\alpha)}\left(x, m, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right) &= \vartheta_{(\alpha-1)}\left(x, m, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right), \quad \alpha = 2, 3, \dots, p. \end{aligned}$$

Аппроксимируем каждое уравнение (6) номера α двухслойной схемой на полуинтервале Δ_α , тогда получим цепочку p одномерных разностных уравнений:

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (7)$$

$$y^{j+\frac{\alpha}{p}} \Big|_{\gamma_{h,\alpha}} = 0, \quad y(x, m, 0) = u_0(x, m), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} &= \mathfrak{K}_\alpha \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} \right)_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \\ &- \frac{1}{p} y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \sum_{i_m=0}^{N(m)} \beta_1(m, m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m + \\ &+ \frac{1}{p} \sum_{i_m=0}^{N(m/2)} y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m - m_{i_m}, t) \beta_1(m, m - m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m + \\ &+ \frac{1}{p} \sum_{j'=0}^j K(x, t_j, t_{j'}) y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \tau, \end{aligned}$$

$$a_\alpha = k_\alpha \left(x^{(-0.5h_\alpha)}, \bar{t} \right), \quad x^{(-0.5h_\alpha)} = (x_1, x_2, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha-0.5h_\alpha}, x_{\alpha+1}, \dots, x_p), \quad \bar{t} = t^{j+1/2},$$

$\mathfrak{K}_\alpha = \frac{1}{1+R_\alpha}$, $R_\alpha = \frac{0.5h_\alpha|r_\alpha|}{k_\alpha}$ — разностное число Рейнольдса, $r_\alpha^+ = 0.5(r_\alpha + |r_\alpha|) \geq 0$, $r_\alpha^- = 0.5(r_\alpha - |r_\alpha|) \leq 0$, $r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-$, $a_\alpha^{(+1\alpha)} = a_{i_\alpha+1}$,

$$b_\alpha^+ = \frac{r_\alpha^+}{k_\alpha}, \quad b_\alpha^- = \frac{r_\alpha^-}{k_\alpha}, \quad a_i = k_{i-1/2}(\bar{t}), \quad \bar{t} = t_{j+1/2}, \quad \bar{h}_\alpha = \begin{cases} h_\alpha, & i_\alpha = 1, 2, \dots, N_{\alpha-1}, \\ \frac{h_\alpha}{2}, & i_\alpha = 0, N_\alpha, \end{cases}$$

$\gamma_{h,\alpha}$ — множество граничных по направлению x_α злов.

Погрешность аппроксимации

Характеристикой точности решения ЛОС является разность $z^{j+\alpha/p} = y^{j+\alpha/p} - u^{j+\alpha/p}$, где $u^{j+\alpha/p}$ — решение исходной задачи (1)–(2). Подставляя $y^{j+\alpha/p} = z^{j+\alpha/p} + u^{j+\alpha/p}$ разностное уравнение (7), получаем для погрешности $z^{j+\alpha/p}$ равнение

$$\begin{aligned} \frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}} - z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} &= \Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (9) \\ z^{j+\frac{\alpha}{p}} \Big|_{\gamma_{h,\alpha}} &= 0, \quad z(x, m, 0) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Обозначив через

$$\overset{0}{\Psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+\frac{1}{2}},$$

и замечая, что $\sum_{\alpha=1}^p \overset{0}{\Psi}_\alpha = 0$, если $\sum_{\alpha=1}^p f_\alpha = f$, представим погрешность в виде суммы

$\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \overset{0}{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^*$. Тогда

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} &= \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p} \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+\frac{1}{2}} - \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} + \overset{0}{\Psi}_\alpha - \overset{0}{\Psi}_\alpha = \\ &= \left(\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_\alpha u^{j+\frac{1}{2}} \right) + \left(\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}} - f^{j+\frac{1}{2}} \right) + \left(\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac{1}{p} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+\frac{1}{2}} \right) + \\ &+ \overset{0}{\Psi}_\alpha = \overset{0}{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^*, \end{aligned}$$

Очевидно, что $\Psi_\alpha^* = O(h_\alpha^2 + \tau)$, $\Psi_\alpha^0 = O(1)$, $\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \sum_{\alpha=1}^p \Psi_\alpha^0 + \sum_{\alpha=1}^p \Psi_\alpha^* = O(|h|^2 + \tau)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2$.

Таким образом, ЛОС обладает суммарной аппроксимацией $O(|h|^2 + \tau)$.

Устойчивость локально-одномерной схемы

Умножим уравнение (7) скалярно на $y^{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$\left(y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha - \left(\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha = \left(\varphi_\alpha, y^{(\alpha)}\right)_\alpha, \quad (10)$$

где $(u, v) = \sum_{x \in \omega_h} uvH$, $H = \prod_{\alpha=1}^p \bar{h}_\alpha$, $(u, v)_\alpha = \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} \bar{h}_\alpha$.

Преобразуем каждое слагаемое (10):

$$\begin{aligned} \left(y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha &= \frac{1}{2} \left(\|y^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2 \right)_{\bar{t}} + \frac{\tau}{2} \|y_{\bar{t}}^{(\alpha)}\|_{L_2(\alpha)}^2, \\ \left(\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha &= \left(\varkappa_\alpha (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)})_{x_\alpha}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \left(b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}^{(\alpha)} y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \left(b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} y^{(\alpha)}\right)_\alpha - \\ &\quad - \frac{1}{p} \left(y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \sum_{i_m=0}^{N(m)} \beta_1(m, m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m, y^{(\alpha)} \right)_\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{p} \left(\sum_{i_m=0}^{N(m/2)} y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m - m_{i_m}, t) \beta_1(x, m - m_{i_m}, t) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m, y^{(\alpha)} \right)_\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{p} \left(\sum_{j'=0}^j K(x, t_j, t_{j'}) y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \tau, y^{(\alpha)} \right)_\alpha. \end{aligned}$$

Так как $\varkappa_\alpha = \frac{1}{1+R} = 1 - \frac{0.5h_\alpha|r_\alpha|}{k_\alpha} + O(h_\alpha^2)$, то последнее выражение перепишем в виде

$$\begin{aligned} \left(\bar{\Lambda}_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha &= - \left(a_\alpha, \left(y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} \right)^2 \right)_\alpha + \left(b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \right)_\alpha + \left(b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \right)_\alpha + \\ &\quad + 0.5h_\alpha \left(a_\alpha \left(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha} \right)_{\bar{x}_\alpha}, y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} y_{i_\alpha-1}^{(\alpha)} \right)_\alpha + 0.5h_\alpha \left(a_\alpha \frac{|r_\alpha|}{k_\alpha}, y_{\bar{x}_\alpha}^2 \right)_\alpha - \\ &\quad - \frac{1}{p} \left(y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \sum_{i_m=0}^{N(m)} \beta_1(m, m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m, y^{(\alpha)} \right)_\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{p} \left(\sum_{i_m=0}^{N(m/2)} y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}(x, m - m_{i_m}, t) \beta_1(x, m - m_{i_m}, t) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m, y^{(\alpha)} \right)_\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{p} \left(\sum_{j'=0}^j K(x, t_j, t_{j'}) y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \tau, y^{(\alpha)} \right)_\alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

С помощью леммы 1 из [7] находим

$$\begin{aligned} \left(b_{\alpha}^{+} a_{\alpha}^{(+1\alpha)} y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \right)_{\alpha} + \left(b_{\alpha}^{-} a_{\alpha} y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)} y^{(\alpha)} \right)_{\alpha} &\leq \frac{2c_1 c_3}{c_0} \left(\varepsilon \left\| y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + c(\varepsilon) \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \right), \\ 0.5h_{\alpha} \left(a_{\alpha} \frac{|r_{\alpha}|}{k_{\alpha}}, y_{\bar{x}_{\alpha}}^2 \right)_{\alpha} &\leq 0.5h_{\alpha} \frac{c_1 c_3}{c_0} \left\| y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2, \\ \left(a_{\alpha} \left(\frac{|r_{\alpha}|}{k_{\alpha}} \right)_{\bar{x}_{\alpha}}, y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)} y_{i_{\alpha-1}}^{(\alpha)} \right)_{\alpha} &\leq c_1 \left(\varepsilon \left\| y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + c(\varepsilon) \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \right), \end{aligned}$$

где

$$\left| a_{\alpha} \left(\frac{|r_{\alpha}|}{k_{\alpha}} \right)_{\bar{x}_{\alpha}} \right| \leq c_4,$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{p} \left(y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \sum_{i_m=0}^{N(m)} \beta_1(m, m_{i_m}) y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m, y^{(\alpha)} \right)_{\alpha} \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \varepsilon c_3 \left\| \sum_{i_m=0}^{N(m/2)} y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{c_3}{4\varepsilon p} \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 = \\ &= \frac{1}{p} \varepsilon c_3 \sum_{i_{\alpha}=1}^{N_{\alpha}-1} \left(\sum_{i_m=0}^{N(m)} y^{j+\frac{\alpha}{p}}(x, m_{i_m}, t) \bar{h}_m \right)^2 h_{\alpha} + \frac{c_3}{4\varepsilon p} \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \varepsilon c_3 m_1 \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha, m)}^2 + \frac{c_3}{4\varepsilon p} \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2, \end{aligned}$$

$$\left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha, m)}^2 = \sum_{i_{\alpha}=1}^{N_{\alpha}-1} h_{\alpha} \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left(y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right)^2 \bar{h}_m, \quad m_1 = N(m) \bar{h}_m,$$

$$\left(\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)} \right) = \frac{1}{2} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{1}{2} \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2.$$

Аналогично оцениваем следующее слагаемое в выражении (11). При этом мы считаем, что значение функции распределения по массам капель $y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}$ ограничено при любых h и τ норме $L_2(\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots, p$ [2]. Оценим последнее слагаемое в

выражении (11):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p} \left(\sum_{j'=0}^j K(x, t_j, t_{j'}) y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \tau, y^{(\alpha)} \right)_{\alpha} \leq \\
& \leq \frac{1}{p} \left\| \sum_{j'=0}^j K(x, t_j, t_{j'}) y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \tau \right\|_{L_2(\alpha)} \left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\alpha)} \leq \\
& \leq \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2} \left\| \sum_{j'=0}^j K(x, t_j, t_{j'}) y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \tau \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{1}{2} \left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \right) = \\
& = \frac{1}{2p} \sum_{i_{\alpha}=1}^{N_{\alpha}-1} \left(\sum_{j'=0}^j K(x, t_j, t_{j'}) y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \tau \right)^2 h_{\alpha} + \frac{1}{2p} \left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \leq \\
& \leq \frac{c_2}{2p} \sum_{j'=0}^j \tau \left\| y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \tau \frac{1}{2p} \left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\alpha)}^2,
\end{aligned}$$

Подставляя полученные неравенства в тождество (10), находим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \right)_{\bar{t}} + \left(\left(1 - 0.5 h_{\alpha} \frac{|r_{\alpha}|}{k_{\alpha}} \right) a_{\alpha}, y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)} \right)_{\alpha} \leq \frac{1}{2} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \\
& + \left(\frac{1}{2p} + c(\varepsilon) \right) \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \varepsilon \left(c_4 + \frac{2c_1c_3}{c_0} \right) \left\| y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \\
& + \varepsilon c_3 \frac{m_1}{p} \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha, m)}^2 + \frac{c_2}{2p} \sum_{j'=0}^j \tau \left\| y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \right\|_{L_2(\alpha)}^2,
\end{aligned} \tag{12}$$

Пользуясь разностным аналогом теоремы вложения [6] при $h_{\alpha} \leq \frac{k_{\alpha}}{|r_{\alpha}|}$ перепишем (12) иначе

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \frac{c_0}{2} \tau \left\| y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \leq \frac{\tau}{2} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \left(\frac{1}{2p} + c(\varepsilon) \right) \tau \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \\
& + \varepsilon \left(c_4 + \frac{2c_1c_3}{c_0} \right) \tau \left\| y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \varepsilon c_3 \tau \frac{l_{\alpha}^2}{4} \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y_{\bar{x}_{\alpha}}^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 h_m + \frac{1}{2} \left\| y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 + \\
& + \frac{c_2}{2p} \sum_{j'=0}^j \tau \left\| y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \right\|_{L_2(\alpha)}^2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Просуммируем (13) по i_α от 0 до $N(m)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{h}_m + \left(\frac{c_0}{2} - \varepsilon c_5 \right) \tau \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{h}_m \leq \\ & \leq \frac{\tau}{2} \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{h}_m + \left(\frac{1}{2p} + c(\varepsilon) \right) \tau \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{h}_m + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{h}_m + \frac{c_2}{2p} \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{h}_m. \end{aligned} \quad (14)$$

При $\varepsilon \leq \frac{c_0}{4c_5}$, $c_5 = c_4 + \frac{2c_1c_3}{c_0} + c_3 \frac{l_\alpha^2}{4} m_1$ из (14) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{h}_m + \frac{c_0}{4} \tau \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{h}_m \leq \frac{\tau}{2} \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{h}_m + \\ & + c(\varepsilon) \tau \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{h}_m + \frac{1}{2} \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{h}_m + \\ & + \frac{c_2}{2p} \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \right\|_{L_2(\alpha)}^2 \bar{h}_m. \end{aligned} \quad (15)$$

Просуммируем (15) по $i_\beta \neq i_\alpha$, $\beta = 1, 2, \dots, p$. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \frac{c_0}{2} \tau \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m \leq \tau \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| \varphi^{(\alpha)} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \\ & + c(\varepsilon) \tau \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j+\frac{\alpha-1}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \\ & + \frac{c_2}{p} \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m. \end{aligned} \quad (16)$$

Просуммируем (16) сначала по $\alpha = 1, 2, \dots, p$

$$\begin{aligned} & \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j+1} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \frac{c_0}{2} \sum_{\alpha=1}^p \tau \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m \leq \\ & \leq \sum_{\alpha=1}^p \tau \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| \varphi^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + c(\varepsilon) \sum_{\alpha=1}^p \tau \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \\ & + \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^j \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \frac{c_2}{p} \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m. \end{aligned}$$

Затем по j' от 0 до j :

$$\begin{aligned} & \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j+1} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \frac{c_0}{2} \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y_{\bar{x}\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m \leq \\ & \leq \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| \varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + c(\varepsilon) \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \\ & + \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^0 \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \frac{c_2}{p} \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{j''=0}^{j'} \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y(x, m, t^{j''+\frac{\alpha}{p}}) \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m. \end{aligned} \quad (17)$$

Последнее слагаемое (17) оценивается просто:

$$\begin{aligned} & \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{j''=0}^{j'} \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y(x, m, t^{j''+\frac{\alpha}{p}}) \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m \leq \\ & \leq T \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y(x, m, t^{j'+\frac{\alpha}{p}}) \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом (18) перепишем (17) иначе

$$\begin{aligned} & \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j+1} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \frac{c_0}{2} \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y_{\bar{x}\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m \leq \\ & \leq \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| \varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + M_1(\varepsilon) \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \\ & + \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^0 \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m, \end{aligned} \quad (19)$$

где $M_1(\varepsilon) = \frac{c_2}{p}(T+1)$.

Из (19) имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j+1} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m \leq M_1(\varepsilon) \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + F^j, \quad (20) \\ & F^j = \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| \varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^0 \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m. \end{aligned}$$

С помощью неравенства (20) на основании леммы 4 [8, стр. 171] из неравенства (19) получим априорную оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y^{j+1} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y_{\bar{x}\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m \leq \\ & \leq M(t) \left[\sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| \varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| u_0 \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Из оценки (21) следует

Теорема 1. *Локально-одномерная схема (7)–(8) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (7)–(8) при любых h_α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$ и $\tau \leq \tau_0$ справедлива оценка (21).*

Сходимость локально-одномерной схемы

По аналогии с [6, стр. 528] представим решение задачи (9) в виде суммы $z_{(\alpha)} = \vartheta_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha, \quad x \in \omega_{h_\alpha} + \gamma_{h_\alpha} \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (22)$$

$$\eta_{(\alpha)}(x, 0) = 0,$$

Из (22) следует

$$\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \left(\overset{\circ}{\Psi}_1 + \overset{\circ}{\Psi}_2 + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_p \right) = \eta^j = \dots = \eta^0 = 0,$$

$$\eta_{(\alpha)} = \tau \left(\overset{\circ}{\Psi}_1 + \overset{\circ}{\Psi}_2 + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_\alpha \right) = \tau \left(\overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+1} + \overset{\circ}{\Psi}_{\alpha+2} + \dots + \overset{\circ}{\Psi}_p \right) = O(\tau).$$

Функция $\vartheta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\vartheta_{(\alpha)} - \vartheta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha \vartheta_{(\alpha)} + \tilde{\Psi}_\alpha, \quad x \in \omega_{h_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (23)$$

$$\vartheta_{(\alpha)} = -\eta_{(\alpha)}, \quad x \in \gamma_{h_\alpha}, \quad \vartheta_{(\alpha)}(x, 0) = 0, \quad \tilde{\Psi}_\alpha = \Psi_\alpha^* + \Lambda_\alpha \eta_{(\alpha)}.$$

Решение задачи (23) оценим с помощью теоремы 1. Так как $\eta^j = 0$, $\eta_{(\alpha)} = O(\tau)$, $\|z^j\| \leq \|\vartheta^j\|$, то из (21) следует

Теорема 2. *Пусть задача (1)–(2) имеет единственное непрерывное в \bar{Q}_T решение $u(x, m, t)$ и существуют непрерывные в Q_T производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad \alpha \neq \beta,$$

тогда локально-одномерная схема (7)–(8) сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$, так что $\|y^{j+1} - u^{j+1}\|_1 \leq M(|h|^2 + \tau)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2$,

$$\|y^{j+1}\|_1^2 = \sum_{i_m=0}^{N(m)} \|y^{j+1}\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m + \sum_{j'=0}^j \tau \sum_{\alpha=1}^p \sum_{i_m=0}^{N(m)} \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \bar{h}_m.$$

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательная форма рукописи была одобрена всеми авторами.

Список литературы

1. Ашабоков Б. А., Тайсаев И. Д., Шхануков-Лафишев М. Х. Локально-одномерная схема для параболического уравнения общего вида, описывающего микрофизические процессы в конвективных облаках, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018. № 3(23), С. 158-167.
2. Коган Е. Л., Мазин И. П., Сергеев Б. Н., Хворостьянов В. И. *Численное моделирование облаков*. М.: Гидрометеоздат, 1984. 178 с.
3. Ашабоков Б. А., Шаповалов А. В. *Конвективные облака: численные модели и результаты моделирования в естественных условиях и при активном воздействии*. Нальчик: Изд-во КВНЦ РАН, 2008. 254 с.
4. Berry E. X. Cloud Droplet by Collection, *J. Atmos Sci.* vol. 24, pp. 688–701.
5. Berry E. X., Reinhardt R. L. An analysis of Cloud Drop Growth by Collection, *J. Atmos Sci.* vol. 24, pp. 1825–1837.
6. Самарский А. А. *Теория разностных схем*. М.: Наука, 1977. 656 с.
7. Андреев В. Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений, *ЖВМ и МФ*, 1968. Т. 8, № 6, С. 1218–1231.
8. Самарский А. А., Гулин А. В. *Устойчивость разностных схем*. М.: Наука, 1973. 480 с.



Шхануков-Лафишев Мухамед Хабалович ✉ – доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики и автоматизации КВНЦ РАН, Нальчик, Россия, taisauti@yandex.ru,  ORCID 0000-0002-7242-975X.



Лафишева Мадина Мухамедовна ✉ – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Прикладной математики и информатики, Институт искусственного интеллекта и цифровых технологий, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик, Россия, lafishevamadina@gmail.com,  ORCID 0000-0002-7230-6629.



Тайсаев Идар Джабраилович ✉ – Аспирант Научно-образовательного центра КВНЦ РАН, Нальчик, Россия, idar0792@gmail.com,  ORCID 0000-0002-0191-8353.

MSC 76M20

Research Article

Locally one-dimensional schemes for an equation describing coagulation processes in convective clouds with “memory”

M. H. Shhanukov-Lafishev¹, M. M. Lafisheva², I. D. Taisaev³

¹ Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS,
360000, Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, Shortanova str., 89-A, Russia

² Kabardino-Balkar State University,
360004, Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, Cherkyshevskaya str., 179, Russia

³ Kabardin-Balkar Scientific Center of KBSC RAS,
360002, Kabardino-Balkar Republic, Nalchik, Balkarova str., 2, Russia

E-mail: taisauti@yandex.ru, lafishevamadina@gmail.com, idar0792@gmail.com

The paper considers a locally one-dimensional difference scheme for a general parabolic equation in a p -dimensional parallelepiped. To describe coagulation processes in media with “memory”, non-local sources of a special type are included in the equation. An a priori estimate is obtained for solving the corresponding difference scheme, which implies its convergence.

Key words: boundary value problem, locally one-dimensional difference scheme, stability and convergence of the difference scheme, approximation error.

 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-184-196

Original article submitted: 29.04.2022

Revision submitted: 28.08.2022

For citation. Shhanukov–Lafishev M. H., Lafisheva M. M., Taisaev I. D. Locally one-dimensional schemes for an equation describing coagulation processes in convective clouds with “memory”. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, 39: 2, 184-196.  DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-184-196

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Shhanukov-Lafishev M. H., Lafisheva M. M., Taisaev I. D., 2022

Funding. The work was done without financial support

References

- [1] Ashabokov B. A., Taisaev I. D., Shkhanukov-Lafishev M. Kh. A local onedimensional scheme for parabolic equation of general form, describing microphysical processes in convective clouds, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2018, 23: 3, 158-167, (In Russian)
- [2] Kogan E. L., Mazin I. P., Sergeev B. N., Khvorostyanov V. I. [Numerical modeling of clouds], Moscow, Gidrometeoizdat, 1984, p. 178. (In Russian)
- [3] Ashabokov B. A., Shapovalov A. V. [Convective Clouds: Numerical Models and Simulation Results in Natural Conditions and Under Active Influence], Nalchik, Publishing House of KBSC RAS, 2008. p. 254. (In Russian)
- [4] Berry E. X. Gloud Droplet by Collection, J. Atoms Sci., 1967, vol. 24, pp. 688-701.
- [5] Berry E. X., Reinhardt R. L. An analysis of Gloud Drop Growth by Collection, J. Atoms Sci., 1974, vol. 24, pp. 1825–1837.
- [6] Samarskii A. A. The Theory of Difference Schemes (1st ed.), New York, CRC Press, 2001, p. 786. DOI: 10.1201/9780203908518
- [7] Andreev V. B. Convergence of difference schemes approximating the second and third boundary value problems for elliptic equations, Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1968. vol. 8, no. 6, pp. 1218–1231 (In Russian)
- [8] Samarskiy A. A., Gulin A. V. Ustoychivost' raznostnykh skhem [Stability of difference schemes], Moscow, Nauka, 1973, p. 480 (In Russian)



Shkhanukov-Lafishev Mukhamed Habalovich ✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Institute Of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, Nalchik, Russia, taisauti@yandex.ru,  ORCID 0000-0002-7242-975X.



Lafisheva Madina Mukhammedovna ✉ – Ph. D. (Phys. & Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Institute of Artificial Intelligence and Digital Technologies, Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov, Nalchik, Russia, lafishevamadina@gmail.com,  ORCID 0000-0002-7230-6629.



Taysaev Idar Djabrailovich ✉ – Graduate student of Kabardin-Balkar Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russia, idar0792@gmail.com,  ORCID 0000-0002-0191-8353.