УДК 511.11 + 519.669 Научная статья

Как из треугольника Паскаля извлечь бесконечный ряд степенных сумм от многих переменных и арифметических систем, сравниваемых по модулю простого числа

В. Л. Щербань

АНО "Центр дополнительного математического образования 640002,
г. Курган, ул. Томина, 53, Россия
E-mail: sherba-q@ya.ru

В настоящем арифметическом исследовании предложены для дальнейшего изучения некоторые невостребованные и малоизученные числовые свойства неправильных треугольников Паскаля. Эти свойства позволили обнаружить универсальный метод отыскивания многих симметричных многочленов степенных сумм из таблиц треугольников Паскаля. Эти же свойства помогли установить и две формулы для непосредственного нахождения всех простых чисел. После успешной дешифровки особой группы таблиц треугольников Паскаля в криптографической подсистеме перечисленное выше стало доступно. Правила вещественных и арифметических действий для таких таблиц найдены и однозначно определены, поэтому возможна компьютерная реализация поставленных задач. Способ построения арифметических таблиц универсален и дает возможность получить дальнейшее их развитие в подсистеме числовых неправильных треугольников.

Ключевые слова: возвратные (рекуррентные) числовые последовательности, симметричные многочлены, простые числа, треугольник Паскаля

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-222-236

Поступила в редакцию: 04.07.2022 В окончательном варианте: 20.08.2022

Для цитирования. Щербань В. Л. Как из треугольника Паскаля извлечь бесконечный ряд степенных сумм от многих переменных и арифметических систем, сравниваемых по модулю простого числа // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 39. № 2. С. 222-236. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-222-236

Финансирование. Работа выполнена без финансовой поддержки

Введение

Данное арифметическое исследование обнаружит и покажет прямую связь симметричных многочленов от двух и более переменных с таблицами чисел «треугольников Паскаля». В точности, определен и найден алгоритм изъятия этих многочленов из таких числовых таблиц. Обособлено, помечены две вычислительные формулы – *см. далее* (**6**) и (**16**), для прямого нахождения всех простых чисел [1], существование которых вне таблиц невозможно. Изложение теоретико-числового материала сопутствует большим количеством примеров, показывающих суть вводимых понятий и определений.

Частные случаи обозначения многочленов – предмет рассмотрения

Перед первоначальным ознакомлением с арифметическими таблицами следует проанализировать симметричный многочлен степенной суммы, у которого все числа – натуральные:

$$S_q = x_1^q + x_2^q + ... + x_n^q. \tag{1}$$

Подстановки: q – нечетное число, $x_1;x_2;\ldots;x_n$ – последовательно, попарно взаимно простые числа. Данный установочный $n \triangleleft 5$ многочлен polynomial code будет обнаружен и специальным методом извлечен из треугольника Паскаля.

Первоначально надлежит обозначить такие многочлены [2]:

$$A_q(x) \equiv 0(\bmod q), \tag{2}$$

$A_q(x) = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + ... + a_n,$ $A'_q(x) = (^1/_1)a_1x^{n-1} + (^1/_2)a_2x^{n-2} + (^1/_3)a_3x^{n-3} + \ldots + (^1/_n)a_n,$ $A''_q(x) = (^1/_1)a_1x^{n-1} + (^1/_3)a_2x^{n-2} + (^1/_5)a_3x^{n-3} + \ldots + (^1/_{2n-1})a_n;$ $\mathrm{Dis}(A_q)$ – дискриминант многочлена: $A_q(x)$, [3]. $\mathrm{Res}(A_q;A_{q-1})$ – результант многочленов: $A_q(x);A_{q-1}(x)$, [3].

Решить сравнение многочлена (2), значит найти все значения произвольного числа x, ему устраивающие. Два сравнения многочленов или больше, которым устраивают одинаковые значения x, принято называть эквивалентными или равносильными. Ряды чисел, в которых каждое порядковое число определяется как некая функция предыдущих, принято называть рекуррентными или возвратными [4]. С помощью возвратного уравнения последовательно находятся все такие числа.

Оформляем бесконечную числовую таблицу треугольной формы, известную под названием «треугольник Паскаля» в прямоугольный вид [5,6]. Суммы чисел, расположенные фиксировано и последовательно на восходящих диагоналях, станут числами Фибоначчи [7]. Ряды чисел, наполняющие отдельно и последовательно вертикали треугольника Паскаля получили название числа многоугольные. Для отыскивания этих чисел существует таблица. В этой таблице каждое порядковое число является результатом сложения двух чисел, расположенных сразу перед этим числом и над ним, (табл. 1).

Таблица 1

Ряды многоугольных чисел [Series of polygonal numbers]

1	1	1	1	1	1	1	...
2	3	4	5	6	7	8	...
3	6	10	15	21	28	36	...
4	10	20	35	56	84	120	...
5	15	35	70	126	210	330	...
6	21	56	126	252	462	792	...
7	28	84	210	462	924	...	

Арифметическая таблица, как объект дешифровки, передачи и использования информации

Алгоритм поиска поставленной задачи, см. название статьи, подразумевает его дискретность соотношений от общего количества его частей. Или в точности, алгоритм должен быть разделен на некую последовательность исполняемых действий (шагов). Следуя этому положению, установим числа прямоугольного треугольника Паскаля другим порядком.

Все числа, расположенные на фиксированных восходящих диагоналях, распределим последовательно на отдельные горизонтали. Теперь в указанном виде, суммы чисел, оказавшиеся последовательно на фиксированных горизонталях, станут рядом чисел Фибоначчи (табл. 2 – колонна C). Зафиксируем и обозначим каждую отдельную горизонталь порядковым номером q. Установим теоретико-числовые свойства данной таблицы и первоначальной от нее, табл. B, (табл. 2 – колонна B).

Таблица 2

Таблица арифметических сравнений треугольника Паскаля C [Table of arithmetic comparisons of Pascal's triangle C]

q	колонна B	колонна C
6	5 + 6 + 1	1 + 3 + 1
7	6 + 10 + 4	1 + 4 + 3
8	7 + 15 + 10 + 1	1 + 5 + 6 + 1
9	8 + 21 + 20 + 5	1 + 6 + 10 + 4
10	9 + 28 + 35 + 15 + 1	1 + 7 + 15 + 10 + 1
11	10 + 36 + 56 + 35 + 6	1 + 8 + 21 + 20 + 5
12	11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1	1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1
13	12 + 55 + 120 + 126 + 56 + 7	1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6
14	13 + 66 + 165 + 210 + 126 + 28 + 1	1 + 11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1
15	14 + 78 + 220 + 330 + 252 + 84 + 8	1 + 12 + 55 + 120 + 126 + 56 + 7
16	... ...	... ...

Горизонтальные ряды чисел, пропуская (исключая) порядковые номера q, необходимо закодировать, таким способом (табл. 2). Таблица B, и в точности (табл. 2

– колонна B): $B_q(x) \equiv 0(\mod q)$, $B_q(x) = b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + b_3x^{n-3} + \ldots + b_n$; Порядковое число q – конкретный номер многочлена. Число n – конкретное количество чисел b, помещенных на зафиксированных горизонталях.

Примеры: $B_7(x) = 6x^2 + 10x + 4$; $B_8(x) = 7x^3 + 15x^2 + 10x + 1$.

Замечание 1. Метод расшифровки таблицы универсален для всех последующих таких таблиц.

Таблица C, соответственно и в точности (табл. 2 – колонна C): $C_q(x) \equiv 0(\mod q)$, $C_q(x) = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + c_3x^{n-3} + \ldots + c_n$; $(c_1 = 1)$.

Пример: $C_{13}(x) = 1x^5 + 10x^4 + 36x^3 + 56x^2 + 35x + 6$. Устанавливаем непосредственные отношения между многочленами: $B_q(x) - B_{q-1}(x) = C_q(x)$. Обозначим только простейшие арифметические свойства колонн B и C. Система сравнений полиномов: $B_q(x) \equiv 0(\mod q)$; $C_q(x) \equiv 0(\mod q)$, эквивалентна для всех простых чисел $q \triangleright 3$, [8]. Прямым доказательством этого утверждения является результативная часть формулы (5).

Примеры: $B_7(x) = 6x^2 + 10x + 4 \equiv 0(\mod 7)$, $C_7(x) = 1x^2 + 4x + 3 \equiv 0(\mod 7)$, $x + 1 \equiv 0(\mod 7)$. Система сравнений полиномов: $C_q(x) \equiv 0(\mod q); C_{2q-1}(x) \equiv 0(\mod q); B_{2q-1}(x) \equiv 0(\mod q)$, эквивалентна для всех простых чисел $q \triangleright 3$. Например: $C_{13}(x) = 1x^5 + 10x^4 + 36x^3 + 56x^2 + 35x + 6 \equiv 0(\mod 91)$; $x + 1 \equiv 0(\mod 7)$, $x + 1 \equiv 0(\mod 13)$.

Зафиксируем степенную сумму из двух переменных:

$$S_q = x_1^q + x_2^q, \tag{3}$$

$f_1 = x_1 + x_2$; $f_2 = x_1x_2$; $(x_1; x_2; q) = 1$, $f_1^2 + xf_2 \equiv 0(\mod\ 2^{q-1} - 1)$.

$$B_q(x) + B_q(x) - B_{q-1}(x) = 2B_q(x) - B_{q-1}(x) = Y_q(x). \tag{4}$$

Пример: $S_{13} = {f_1}^{13} + f_1{f_2}^6(13x^5 + 65x^4 + 156x^3 + 182x^2 + 91x + 13)$; $2B_{13}(x) - B_{12}(x) = Y_{13}(x) = 13x^5 + 65x^4 + 156x^3 + 182x^2 + 91x + 13$; $Y_{15}(x) = 15x^6 + 90x^5 + 275x^4 + 450x^3 + 378x^2 + 140x + 15$. Для всех нечетных чисел q, системы сравнений и уравнений многочленов (3) и (4), имеют не тривиальное решение только одно:

$$\mathrm{Re\,s}(Y_q; x + 4) \equiv 0(\mod 2^{q-1} - 1). \tag{5}$$

Примеры: $\mathrm{Re\,s}(Y_{13}; x + 4) \equiv 0(\mathrm{mod} 2^{12} - 1)$, $\mathrm{Re\,s}(Y_{15}; x + 4) \equiv 0(\mathrm{mod} 2^{14} - 1)$, $\mathrm{Re\,s}(Y_{103}; x + 4) \equiv 0(\mod 2^{102} - 1)$, $\mathrm{Re\,s}(Y_{105}; x + 4) \equiv 0(\mod 2^{104} - 1)$.

Замечание 2. Извлечение из треугольника Паскаля многочлена (1), $n = 2$ – выполнено, что и требовалось показать.

В качестве дополнительного исследования укажем на следующий многочлен:

$$C'_q(x) = (^1/_1)c_1x^{n-1} + (^1/_2)c_2x^{n-2} + (^1/_3)c_3x^{n-3} + \ldots + (^1/_n)c_n. \tag{6}$$

Этот многочлен имеет все целые числовые коэффициенты только тогда, когда q – простое число, (табл. 2 – колонна C).

Полное и исчерпывающее доказательство этого утверждения слишком громоздкое и поэтому не приводиться. По факту это доказательство подобно (отчасти просто идентично) доказательству для последующего полинома такого же типа: $F''_q(x)$ – (16). Для краткого доказательства достаточно зафиксировать составные или простые числа в две очевидные формулы: $qC'_q(x) = Y_q(x)$; $Y_q(x) = \pm(2^{q-1} - 1)$, (5). После этого занести результативные части в степенную сумму (3) для решения уже в качестве арифметической системы. Статус полинома (6) – формула, предназначенная для отыскивания всех простых чисел. Несложный алгоритм формулы, предполагает ее компьютерную реализацию: $c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_n = k$ – порядковое число Фибоначчи.

Примеры (6), (табл. 2 – C): $C_{11}(x) = 1x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x + 5$, $C'_{11}(x) = (^1/_1)x^4 + (^8/_2)x^3 + (^{21}/_3)x^2 + (^{20}/_4)x + (^5/_5) = 1x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 5x + 1$. $C_{13}(x) = 1x^5 + 10x^4 + 36x^3 + 56x^2 + 35x + 6$, $C'_{13}(x) = (^1/_1)x^5 + (^{10}/_2)x^4 + (^{36}/_3)x^3 + (^{56}/_4)x^2 + (^{35}/_5)x + (^6/_6) = 1x^5 + 5x^4 + 12x^3 + 14x^2 + 7x + 1$.

Алгоритм поиска поставленной задачи

Вновь рассмотрим ряды чисел, наполняющие отдельные столбцы прямоугольного треугольника Паскаля (табл. 2 – колонна C). Указанный треугольник преобразуем в другой вид. Для этого удалим все числовые столбики под четными номерами, а каждый последующий столбик поднимем вверх на одну полную позицию относительно предыдущей порядковой горизонтали. В образованном, теперь уже усеченном треугольнике F и первоначальном от него треугольнике E, каждая зафиксированная последовательная горизонталь отмечена порядковыми нечетными номерами q, (табл. 3 – колонны E, F).

Таблица 3

Усеченный треугольник Паскаля [Truncated Pascal's Triangle]

q	колонна – E	колонна – F
15	7 + 20 + 1	1 + 10 + 1
17	8 + 35 + 6	1 + 15 + 5
19	9 + 56 + 21	1 + 21 + 15
21	10 + 84 + 56 + 1	1 + 28 + 35 + 1
23	11 + 120 + 126 + 8	1 + 36 + 70 + 7
25	12 + 165 + 252 + 36	1 + 45 + 126 + 28
27	13 + 220 + 462 + 120 + 1	1 + 55 + 210 + 84 + 1
29	14 + 286 + 792 + 330 + 10	1 + 66 + 330 + 210 + 9
31	15 + 364 + 1287 + 792 + 55	1 + 78 + 495 + 462 + 45
33	16 + 455 + 2002 + 1716 + 220 + 1	1 + 91 + 715 + 924 + 165 + 1
35	17 + 560 + 3003 + 3432 + 715 + 12	1 + 105 + 1001 + 1716 + 495 + 11
37	18 + 680 + 4368 + 6435 + 2002 + 78	1 + 120 + 1365 + 3003 + 1287 + 66
39	....	....

Из немногих арифметических свойств таблиц-колонн выделим только простейшие и основные. Для этого и предварительно отметим три неочевидных уравнения:

$$E_q(x) - E_{q-2}(x) = F_q(x);\ 3E_q(x) - E_{q-2}(x) = G_q(x);\ qF''_q(x) = G_q(x). \qquad (7)$$

Пропуская порядковые номера q, выбранные горизонтальные ряды чисел, кодируются вдобавок и с некоторыми элементами обратных арифметических прогрессий, (2).

Примеры: $E_{19}(x)=9x^2+56x+21\equiv 0(\bmod 19)$; $E'_{19}(x)=({}^{9}/_{1})x^2+({}^{56}/_{2})x+({}^{21}/_{3})\equiv 0(\bmod 19)$;

Примеры: $E_{19}(x)=9x^2+56x+21\equiv 0(\bmod 19)$; $E'_{19}(x)=({}^{9}/_{1})x^2+({}^{56}/_{2})x+({}^{21}/_{3})\equiv 0(\bmod 19)$; $F_{21}(x)=1x^3+28x^2+35x+1\equiv 0(\bmod 21)$; $F''_{21}(x)=({}^{1}/_{1})x^3+({}^{28}/_{3})x^2+({}^{35}/_{5})x+({}^{1}/_{7})\equiv 0(\bmod 21)$.

Отметим только основные числовые свойства колонн E и F, для всех нечетных чисел $q \triangleright 13$ – (табл. 3). Система сравнений полиномов: $E_q(x)\equiv 0(\bmod q); F_q(x)\equiv 0(\bmod q)$, эквивалентна для всех простых чисел q.

Примеры: $E_{19}(x)\equiv 0(\bmod 19)$; $F_{19}(x)\equiv 0(\bmod 19)$; $x\equiv 8,9(\bmod 19)$. Система сравнений двух полиномов и отношений между ними: $E'_q(x)\equiv 0(\bmod q); F'_q(x)\equiv 0(\bmod q)$; $Dis(E'_q;F'_q)\equiv 0(\bmod q)$, эквивалентна только тогда, когда q – число простое.

Примеры: $E'_{19}(x)=({}^{9}/_{1})x^2+({}^{56}/_{2})x+({}^{21}/_{3})\equiv 0(\bmod 19); x_1=x_2\equiv 9(\bmod 19)$; $F'_{19}(x)=({}^{1}/_{1})x^2+({}^{21}/_{2})x+({}^{15}/_{3})\equiv 0(\bmod 19); x_1=x_2\equiv 9(\bmod 19)$; $Dis(E'_{19})\equiv 0(\bmod 19); Dis(F'_{19})\equiv 0(\bmod 19)$. Система сравнений полиномов: $E_q(x)\equiv 0(\bmod q); E_{2q-1}(x)\equiv 0(\bmod q)$, эквивалентна для всех простых чисел q.

Примеры: $E_{17}(x)\equiv 0(\bmod 17)$, $E_{33}(x)\equiv 0(\bmod 17)$, $x\equiv 94(\bmod 17^2)$. Далее, зафиксируем арифметические свойства правильного (классического) числового треугольника F. Если число q – составное, тогда:

$$Res(F''_q;4x-27)\equiv 0(\bmod 2^{q-1}-1). \tag{8}$$

Если число q – простое, тогда $(a=27q)$:

$$Res(aF''_q;4x-27)\equiv 0(\bmod 2^{q-1}-1). \tag{9}$$

Примеры: $F''_{33}(x)=({}^{1}/_{1})x^5+({}^{91}/_{3})x^4+({}^{715}/_{5})x^3+({}^{924}/_{7})x^2+({}^{165}/_{9})x+({}^{1}/_{11})$; $4x-27\equiv 0(\bmod 2^{32}-1)$. $(459)F''_{17}(x)=({}^{1}/_{1})x^2+({}^{15}/_{3})x+({}^{5}/_{5})=1x^2+5x+1$; $4x-27\equiv 0(\bmod 2^{16}-1)$. Покажем, что рассматриваемый треугольник F, является зашифрованной числовой таблицей. При некоторых условиях, ключом для ее расшифровки станет симметричный многочлен из трех переменных для нечетных чисел $q \triangleright 13$:

$$S_q={x_1}^q+{x_2}^q+{x_3}^q\equiv 0(\bmod f_1). \tag{10}$$

$f_1=x_1+x_2+x_3$; $f_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$; $f_3=x_1x_2x_3$. Система этих многочленов имеет только одно не тривиальное решение:

$$(4{f_2}^3+27{f_3}^2)\equiv 0(\bmod 2^{q-1}-1). \tag{11}$$

Например, применим формулу Варинга [9], по которой получим раскрытое выражение любой степенной суммы – S_q. $S_{33}={x_1}^{33}+{x_2}^{33}+{x_3}^{33}\equiv 0(\bmod f_1)=\ldots -33{f_2}^{15}f_3+1001{f_2}^{12}{f_3}^3-4719{f_2}^9{f_3}^5+4356{f_2}^6{f_3}^7-605{f_2}^3{f_3}^9+3{f_3}^{11}$; $(4{f_2}^3+27{f_3}^2)\equiv 0(\bmod 2^{32}-1)$. $S_{37}={x_1}^{37}+{x_2}^{37}+{x_3}^{37}\equiv 0(\bmod f_1)=\ldots -37({f_2}^{17}f_3-40{f_2}^{14}{f_3}^3+273{f_2}^{11}{f_3}^5-429{f_2}^8{f_3}^7+143{f_2}^5{f_3}^9-6{f_2}^2{f_3}^{11})$; $(4{f_2}^3+27{f_3}^2)\equiv 0(\bmod 2^{36}-1)$.

Повторно устанавливаем возвратное уравнение (сравнение) всего треугольника F: $(f_2{}^3 + xf_3{}^2) \equiv 0(\bmod 2^{q-1} - 1)$, для важного следующего подтверждения. Для порядковых чисел $q \triangleright 13$, система числовых сравнений и уравнений эквивалентна:

$$(S_q{}^\wedge \equiv F''{}_q). \tag{12}$$

Первый пример: $S_{33}(x) = \ldots^\wedge + 33x^5 + 1001x^4 + 4719x^3 + 4356x^2 + 615x + 3 \equiv 0(\bmod 33)$; $({}^1/_1)x^5 + ({}^{91}/_3)x^4 + ({}^{715}/_5)x^3 + ({}^{924}/_7)x^2 + ({}^{165}/_9)x + ({}^1/_{11}) = F''{}_{33}(x)$; $S_{33} = \ldots^\wedge 33(F''{}_{33})$.

Второй пример: $S_{37}(x) = \ldots^\wedge + 37(x^5 + 40x^4 + 273x^3 + 429x^2 + 143x + 6) \equiv 0(\bmod 37)$; $({}^1/_{37})S_{37}(x) = \ldots^\wedge + (x^5 + 40x^4 + 273x^3 + 429x^2 + 143x + 6)$; $({}^1/_1)x^5 + ({}^{120}/_3)x^4 + ({}^{1365}/_5)x^3 + ({}^{3003}/_7)x^2 + ({}^{1287}/_9)x + ({}^{66}/_{11}) = F''{}_{37}(x)$; $({}^1/_{37})S_{37} \equiv \ldots^\wedge F''{}_{37}$.

Согласно уравнениям (7), подтверждаем:

$$\mathrm{Re\,s}(G_q; 4x - 27) \equiv 0(\bmod 2^{q-1} - 1). \tag{13}$$

Примеры: $\mathrm{Re\,s}(G_{15}; 4x - 27) \equiv 0(\bmod 2^{14} - 1)$, $\mathrm{Re\,s}(G_{105}; 4x - 27) \equiv 0(\bmod 2^{104} - 1)$.

Замечание 3. Извлечение из треугольника Паскаля многочлена (1), $n = 3$ – выполнено, что и требовалось показать.

Другие неочевидные свойства усеченного треугольника F. Система сравнений полиномов: $F_q(x) \equiv 0(\bmod q); F_{2q-1}(x) \equiv 0(\bmod q)$, эквивалентна для всех простых чисел q. Примеры: $F_{17}(x) = x^2 + 15x + 5 \equiv 0(\bmod 17^2); x + 59 \equiv 0(\bmod 17^2)$; $F_{33}(x) = x^5 + 91x^4 + 715x^3 + 924x^2 + 165x + 1 \equiv 0(\bmod 17^2)$.

Ряды систем сравнений полиномов, попарно – последовательно: $F_{2q-1}(x), F_{3q-2}(x), F_{4q-3}(x), \ldots \equiv 0(\bmod q)$, эквивалентны для всех простых чисел q. Например: $F_{33}(x) \equiv 0(\bmod 17), F_{49}(x) \equiv 0(\bmod 17); x \equiv 10(\bmod 17)$.

Пусть существующее число h – нечетный делитель дискриминанта многочлена: $F''{}_q(x)$. Тогда ряды систем сравнений, станут попарно последовательно эквивалентны: $F_q(x), F_{2q-1}(x), F_{3q-2}(x), \ldots \equiv 0(\bmod h)$. Краткое доказательство после примеров (табл. 4): $F_{15}(x) = 1x^2 + 10x + 1$, $\mathrm{Dis}(F''{}_{15}) \equiv 0(\bmod 29)$. $F_{15}(x) = 1x^2 + 10x + 1 \equiv 0(\bmod 29)$, $50x + 6 \equiv 0(\bmod 29)$. $F_{29}(x) = 1x^4 + 66x^3 + 330x^2 + 210x + 9 \equiv 0(\bmod 29)$. $E_{17}(x) = 1x^2 + 15x + 5$; $\mathrm{Dis}(F''{}_{17}) \equiv 0(\bmod 21)$, $5x + 2 \equiv 0(\bmod 21)$.

Таблица 4

Фрагменты числовой колонны E – (табл. 3)
[Fragments of the numeric column E – (Table 3)]

$q = 15$ $\mp F_{15}(x) = 1x^2 + 10x + 1 \equiv (15)$	$q = 17$ $\mp F_{17}(x) = 1x^2 + 15x + 5 \equiv (17)$
$E_{15}(x) = 7x^2 + 20x + 1 \equiv (15)$ $1x^2 - 40x - 5 \equiv (15)$ $0x^2 - 50x - 6 \equiv (15)\ldots$	$E_{17}(x) = 8x^2 + 35x + 6 \equiv (17)$ $1x^2 - 70x - 29 \equiv (17)$ $0x^2 - 17(5x + 2) \equiv (17)\ldots$

Продолжим изучение многочлена (10) для установления его дополнительных арифметических свойств. Для этого создадим систему из двух сравнений: $E_q(x) \equiv$

$0(\bmod q)$; $F_q(x)\equiv 0(\bmod q)$ – (табл. 3), и разберем ее главное числовое свойство. В качестве примера достаточно выбрать небольшое простое и составное число, (табл. 4). В указанной таблице для всех чисел $q \triangleright 13$, все ряды многочленов сравнимы по наибольшему нечетному числовому модулю дискриминанта лишь только для одного многочлена: $F''_q(x)$ – (16). При этом, согласно положениям (15) и (20): $F''_q(x)\not\equiv 0(\bmod q)$, если число q – простое. Напротив, согласно установленными соотношениями между полиномами (14): $Dis(E'_q)\equiv 0(\bmod q)$. Что и требовалось показать. Соответствующие примеры (табл. 4): $Dis(F''_{15})\equiv 0(\bmod 29)$, $E_{15}(x)=7x^2+20x+1\equiv 0(\bmod 29)$, $50x+6\equiv 0(\bmod 29)$. $Dis(F''_{17})\equiv 0(\bmod 21)$, $E_{17}(x)=8x^2+35x+6\equiv 0(\bmod 21)$, $5x+2\equiv 0(\bmod 21)$. Далее, система сравнений двух полиномов и отношений между ними:

$$F_q(x)\equiv 0(\bmod q); F'_q(x)\equiv 0(\bmod q); Dis(F'_q)\equiv 0(\bmod q), \tag{14}$$

эквивалентна только тогда, когда число q – простое.

Примеры: $F_{23}(x) = 1x^3+36x^2+70x+7 \equiv 0(\bmod 23); x\equiv 2(\bmod 23)$; $F'_{23}(x) = (^1/_1)x^3+(^{36}/_2)x^2+(^{70}/_3)x+(^7/_4)\equiv 0(\bmod 23); Dis(F'_{23})\equiv 0(\bmod 23)$. Система сравнений двух полиномов и отношений между ними:

$$F_q(x)\equiv 0(\bmod h); F''_q(x)\equiv 0(\bmod h); Dis(F''_q)\equiv 0(\bmod h), \tag{15}$$

эквивалентна только тогда, когда числа q и h – взаимно простые. Примеры: $F_{19}(x)\equiv 0(\bmod 37); F''_{19}(x)\equiv 0(\bmod 37)$, $Dis(F''_{19})=37; x\equiv 15(\bmod 37)$. После проведенного исследования многочлена (6), приступим к изучению следующего подобного многочлена:

$$F''_q(x)=(^1/_1)f_1x^{n-1}+(^1/_3)f_2x^{n-2}+(^1/_5)f_3x^{n-3}+\ldots+(^1/_{2n-1})f_n. \tag{16}$$

Данный многочлен имеет все целые числовые коэффициенты только тогда, когда q – число простое, (табл. 3 – колонна F). Соответствующие примеры: $F_{23}(x)=1x^3+36x^2+70x+7$; $F''_{23}(x)=(^1/_1)x^3+(^{36}/_3)x^2+(^{70}/_5)x+(^7/_7)=1x^3+12x^2+14x+1$. $F_{29}(x)=1x^4+66x^3+330x^2+210x+9$; $F''_{29}(x)=(^1/_1)x^4+(^{66}/_3)x^3+(^{330}/_5)x^2+(^{210}/_7)x+(^9/_9)=1x^4+22x^3+66x^2+30x+1$. Установка (12) является основой для доказательства этого утверждения. При таком условии двойная система сравнений и уравнений (8) и (9), неравносильна без установленного условия: $a=27q$. Или в точности, многочлен: $F''_q(x)\not\equiv 0(\bmod q)$, если число q – простое, (20). Другое, иное и альтернативное доказательство – системы сравнений полиномов и отношений между ними (14) и (15) неравносильны.

Методика построения неправильных треугольников Паскаля

Вернемся к многочлену степенной суммы (1), $n=4$. Степенной показатель $q \triangleright 19$. $f_1=x_1+x_2+x_3+x_4$; $f_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$; $f_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4$; $f_4=x_1x_2x_3x_4$; Выбираем пример: $S_{37}=x_1^{37}+x_2^{37}+x_3^{37}+x_4^{37}\equiv 0(\bmod f_1)\equiv 0(\bmod f_2)$; $S_{37}=\ldots-37f_3^{11}f_4+1110f_3^7f_4^4-444f_3^3f_4^7\equiv 0(\bmod f_1f_2)$;

$$(f_3^4+xf_4^3)\equiv 0(\bmod 37), S_{37}(x)=\ldots\hat{}+37x^2+1110x+444\equiv 0(\bmod 37). \tag{17}$$

Вновь рассмотрим ряды чисел, наполняющие отдельные столбцы прямоугольного треугольника Паскаля (табл. 2 – колонна C). На этот раз порядок вещественных действий последует другой. Создаются три отдельные группы числовых столбиков. В первую группу размещаем первый, четвертый, седьмой и далее в таком порядке вертикальные ряды чисел (столбики). Во вторую группу попадают второй, пятый, восьмой и далее в таком порядке вертикальные ряды чисел (столбики). В третью группу попадают третий, шестой, девятый и далее в таком порядке вертикальные ряды чисел (столбики). Для сформирования одной сводной таблицы, каждый в отдельности и последующий числовой столбик следует поднять ввысь на две позиции относительно предыдущей порядковой горизонтали, (табл. 5). Порядковые номера многочленов являются общими для всех трех колонн $H : t = ..., 20, 21, 22, 23, ...;$.

Таблица 5

Неправильные числовые треугольники (сводные)
[Irregular number triangles (pivot)]

t	колонна H	t	колонна H	t	колонна H
28	45 + 126 + 1	24	9 + 70 + 1	20	1 + 35 + 1
31	55 + 252 + 9	27	10 + 126 + 8	23	1 + 56 + 7
34	66 + 462 + 45	30	11 + 210 + 36	26	1 + 84 + 28
37	78 + 792 + 165	33	12 + 330 + 120	29	1 + 120 + 84
40	91 + 1287 + 495 + 1	36	13 + 495 + 330 + 1	32	1 + 165 + 210 + 1
43	105 + 2002 + 1287 + 12	39	14 + 715 + 792 + 11	35	1 + 220 + 462 + 10
46	120 + 3003 + 3003 + 78	42	15 + 1001 + 1716 + 66	38	1 + 286 + 924 + 55
49	136 + 4368 + 6435 + 364	45	16 + 1365 + 3432 + 286	41	1 + 364 + 1716 + 220
52	....	48	....	44	1+ 455 + 3003 + 715+1

Установление общих свойств числовых колонн H, для нечетных чисел $t \triangleright 13$ – (табл. 5). Система сравнений полиномов: $H_t(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, t), H_{t-3}(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, t), H_{t-6}(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, t)$, эквивалентна для всех простых чисел t. Примеры: $H_{23}(x) = 1x^2 + 56x + 7 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 23)$, $H_{20}(x) = 1x^2 + 35x + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 23)$, $H_{17}(x) = 1x^2 + 20x \equiv 0(\mathrm{mod}\, 23)$. Ряды систем сравнений полиномов, попарно – последовательно: $H_t(x), H_{2t-1}(x), H_{3t-2}(x), ... \equiv 0(\mathrm{mod}\, t)$, эквивалентны для всех простых чисел t.

Неправильные (иррегулярные) числовые треугольники H напрямую трансформируются в классические, (табл. 6) и (табл. 7). Однако иррегулярные дискриминантные свойства обязательно сохраняются.

Таблица 6

Установочные иррегулярные числовые дискриминанты
[Setting irregular numerical discriminants]

q	колонна – P	колонна – R
32	45 + 126 + 1	9 + 70 + 1
35	55 + 252 + 9	10 + 126 + 8
38	66 + 462 + 45	11 + 210 + 36
41	78 + 792 + 165	12 + 330 + 120
44	91 + 1287 + 495 + 1	13 + 495 + 330 + 1
47	105 + 2002 + 1287 + 12	14 + 715 + 792 + 11
50	120 + 3003 + 3003 + 78	15 + 1001 + 1716 + 66
53	136 + 4368 + 6435 + 364	16 + 1365 + 3432 + 286
56	....	17 + 1820 + 6435 + 1001 + 1

Таблица 7

Продолжение установочных иррегулярных дискриминантов
[Continuation of setting irregular discriminants]

q	колонна – L	колонна – M
25	8 + 35	
28	9 + 70 + 1	1 + 35 + 1
31	10 + 126 + 8	1 + 56 + 7
34	11 + 210 + 36	1 + 84 + 28
37	12 + 330+120	1 + 120 + 84
40	13 + 495 + 330 + 1	1 + 165 + 210 + 1
43	14 + 715 + 792 + 11	1 + 220 + 462 + 10
46	15 + 1001 + 1716 + 66	1 + 286 + 924 + 55
49	16 + 1365 + 3432 + 286	1 + 364 + 1716 + 220
52	... ...	1 + 455 + 3003 + 715 + 1

В правильных числовых треугольниках (табл. 6 – колонны P и R), надлежит принять следующий обозначенный дискриминантный многочлен:

$$\widehat{P}_q(x) = (^1/_4)p_1x^{n-1} + (^1/_7)p_2x^{n-2} + (^1/_{10})p_3x^{n-3} + \ldots + (^1/_{3n+1})p_n.$$

Система сравнений полиномов: $\widehat{P}_q(x) \equiv 0(\bmod q); \widehat{P}_{q-3}(x) \equiv 0(\bmod q); \mathrm{Dis}(\widehat{P}_q; \widehat{P}_{q-3}) \equiv 0(\bmod q)$, эквивалентна для всех простых чисел q.

Пример: $\widehat{P}_{47}(x) = (^{105}/_4)x^3 + (^{2002}/_7)x^2 + (^{1287}/_{10})x + (^{12}/_{13}) \equiv 0(\bmod 47)$. $\mathrm{Dis}(\widehat{P}_{47}) \equiv 0(\bmod 47); x + 2 \equiv 0(\bmod 47)$. Необходимое и важное утверждение для этой таблицы будет выглядеть так. $4P_q - P_{q-3} = a$; $S_q = \ldots\hat{} + a$. Краткое доказательство – последующее положение (18).

В правильных числовых треугольниках (табл. 7 – колонны L и M), надлежит принять следующий обозначенный дискриминантный многочлен:

$$\tilde{L}_q(x) = (^1/_2)l_1x^{n-1} + (^1/_5)l_2x^{n-2} + (^1/_8)l_3x^{n-3} + \ldots + (^1/_{3n-1})l_n.$$

Система сравнений двух полиномов и отношений между ними: $\tilde{L}_q(x) \equiv 0(\bmod q)$; $\tilde{L}_{q-3}(x) \equiv 0(\bmod q)$; $\mathrm{Dis}(\tilde{L}_q;\tilde{L}_{q-3}) \equiv 0(\bmod q)$, эквивалентна для всех простых чисел q.

Пример: $\tilde{L}_{37}(x) = (^{12}/_{2})x^2 + (^{330}/_{5})x + (^{120}/_{8}) \equiv 0(\bmod 37)$. $\mathrm{Dis}(\tilde{L}_{37}) \equiv 0(\bmod 37); x-13 \equiv 0(\bmod 37)$.

Необходимое и важное утверждение для этой таблицы будет выглядеть так:

$$4L_q - L_{q-3} = a; S_q = ...\hat{}+a. \tag{18}$$

Пример: $4L_{37}-L_{34}=a$; $S_{37}=...\hat{}+a$; $4(12+330+120)-(11+210+36)\equiv 0(\bmod 37)$; $4(12x^2+330x+120)-(11x^2+210x+36)=37x^2+1110x+444$, (17). Результативные части этих примеров равны частному случаю степенной суммы: $S_{37}=...\hat{}+a$, – (18).

Замечание 4. Извлечение из треугольника Паскаля многочлена (1), $n=4$ – выполнено, что и требовалось показать.

Некоторые способы доказательств особых свойств арифметических треугольников

Устанавливается конкретная степенная сумма (10) по формуле Варинга, которая распадается на элементарные многочлены. Необходимая результативная часть должна образовать арифметическую систему с рекуррентным уравнением (в обобщенном виде – сравнением):

$$(f_2{}^3 + xf_3{}^2) \equiv 0(\bmod q). \tag{19}$$

Многоугольные числа треугольника Паскаля (табл. 1) и биномиальные коэффициенты Ньютона устанавливают неочевидные уравнения и сравнения многочленов (табл. 3): $E_q(x)-E_{q-2}(x)=F_q(x)$, (7). $3E_q(x)-E_{q-2}(x)=G_q(x) \leftarrow S_q=...\hat{}+a$; $a=G_q$, (7) плюс (13). $(4f_2{}^3+27f_3{}^2)\equiv 0(\bmod 2^{q-1}-1)$, (11).

Раскрываем метод доказательства «от противного» некоторых особых свойств треугольников Паскаля по отдельным позициям [10]. Например, подробно проведем исследование такой позиции. Предположим, что для какого-то неопределенного многочлена (16), существует конкретное арифметическое сравнение: $F''_q(x)\equiv 0(\bmod q)$, порядковое число q – простое. Вследствие чего системы сравнений полиномов и отношений между ними (14) и (15), станут равносильными или эквивалентными. Или в точности (2): $F_q(x)\equiv 0(\bmod q)$, $F'_q(x)\equiv 0(\bmod q)$;$\mathrm{Dis}(F'_q)\equiv 0(\bmod q)$, $F''_q(x)\equiv 0(\bmod q)$;$\mathrm{Dis}(F''_q)\equiv 0(\bmod q)$. В данном случае, после несложных вычислений [11], извлекается невозможное утверждение: $\mathrm{Dis}(F_q)\equiv 0(\bmod q)$. Невозможность такого числового сравнения заключается в том, что тогда иметь место будут такие последующие арифметические действия: $E_q(x)-E_{q-2}(x)=F_q(x)$, — $\mathrm{Dis}(F_q)\equiv 0(\bmod q)$; $3E_q(x)-E_{q-2}(x)=a \leftarrow S_q(x)=...\hat{}+a$, — $\mathrm{Dis}(a)\equiv 0(\bmod q)$, (19); $\mathrm{Dis}(E_q)\equiv 0(\bmod q)$. Вследствие чего, станут попарно и непоследовательно эквивалентны все такие ряды арифметических систем (2): $E'_q(x)\equiv 0(\bmod q)$,

$E''_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod} q)$, $E'''_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod} q)$, $Dis(E'_q;E''_q;E'''_q) \equiv 0(\mathrm{mod} q)$; $*E'''_q(x) = (^1/_1)a_1x^{n-1} + (^1/_4)a_2x^{n-2} + (^1/_7)a_3x^{n-3} + ... + (^1/_{3n-2})a_n$, [12]. Такие результаты быть не могут, так как противоречат многим конкретным установкам (12 – 14, 19). Вследствие чего и в точности, если число q – простое, тогда многочлен:

$$F''_q(x) \not\equiv 0(\bmod q). \tag{20}$$

В этой результативной части очередное свойство усеченного треугольника Паскаля F для отыскивания всех простых чисел — доказано, (табл. 3). Вновь и снова предположим, что в системе сравнений двух полиномов (14) существует конкретное утверждение: $F'_q(x) \equiv 0(\bmod q)$. В таком сравнении число q – является составным. Тогда системы сравнений полиномов и отношений между ними (14) и (15), снова станут эквивалентными, что опровергнуто выше показанным доказательством. Стало быть, эти системы сравнений неравносильные.

Заключение

Исходный прямоугольный треугольник Паскаля (табл. 2 – С), был непоследовательно разделен предложенным способом на две части (табл. 3), (10). Затем — на три части (табл. 5) – (17), для отыскивания последующей степенной суммы. Подобное разделение возможно и на четыре, пять и далее арифметических частей для нахождения всего многочлена степенной суммы (1). Вычислительные таблицы сложения чисел можно разместить в трехмерном пространстве. Все вычислительные таблицы (исключая №4) также возможно разместить в пространстве подменяя символы названий чисел на количество вещественных предметов [13]. Результаты (5, 6, 8, 9, 13, 16) не обнаружены в таком энциклопедическом издании – [14]. Современное состояние предложенной проблематики см. название статьи — нет сведений [15].

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы

1. Воронин С. М. *Простые числа.* М.: Знание, 1978. 95 с.
2. Прасолов В. В. *Многочлены.* М.: МЦНМО, 2001. 336 с.
3. Винберг Э. Б. *Алгебра многочленов.* М.: Просвещение, 1980. 176 с.
4. Маркушевич А. И. *Возвратные последовательности.* М.: Наука, 1983. 48 с.
5. Успенский В. А. *Треугольник Паскаля.* М: Наука, 1979. 46 с.
6. Богатырев Р. Р. Золотой треугольник, *Мир ПК*, 2001. №6, С. 52–60.
7. Воробьев Н. Н. *Числа Фибоначчи.* М.: Наука, 1992. 189 с.
8. Гельфонд А. О. *Решение уравнений в целых числах.* М.: Наука, 1978.. 62 с.
9. Болтянский В. Г., Болтянский Н. Я. *Симметрия в алгебре.* М.: МЦНМО, 2002. 240 с.

10. *Способ доказательства для математики, где существует много суждений, которые не могут быть доказаны по-другому*, [Электронный ресурс] https://ru.wikipedia.org/wiki/Доказательство_от_противного (Дата обращения: 07.02.2021).
11. Быков В. И., Кытманов А. М., Лазман М. З. *Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов*. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991. 231 с.
12. Выгодский М. Я. *Справочник по элементарной математике*. М.: Гостехиздат, 1954. 412 с.
13. Щербань В. Л. Почему окружающее нас пространство именно трехмерно, *Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер. Физико-математические и технические науки*, 2020. № 1, С. 97–112.
14. Ayoub R. *An Introduction to the Analitic Theory of Numbers. American mathematical society providence*: Rhode Island, 1963. 377 pp.
15. *Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры»*, Math-net.ru архив [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=into&wshow=details&option_lang=rus (дата обращения: 07. 02. 2021).

Щербань Виктор Леонидович – Заведующий учебной частью, АНО "Центр дополнительного математического образования г. Курган, Россия, ORCID 0000-0002-5631-9681.

MSC 11A63 Research Article

How to take from Pascal's triangle an infinite series of power sums from many variables and arithmetic systems compared modulo a prime number

V. L. Shcherban'

Center for Additional Mathematical Education, 640000, Kurgan,
Tomina str. 53, Russia
E-mail: sherba-q@ya.ru

In this arithmetic study, some unclaimed and unknown numerical properties of Pascal's irregular triangles are proposed for further study. These properties made it possible to find a universal method for finding many symmetric polynomials of power sums from Pascal's triangle tables. The same properties helped to establish two formulas for directly finding all primes. The above became available after the successful decryption of a certain group of Pascal's triangle tables in the cryptographic subsystem. The rules of real and arithmetic operations for such tables have been found and have been unambiguously defined, therefore, implementation of the tasks on a computer is possible. Plus, there was no place for special information in combinatorial problems in the structural part of the logical material. The method of building arithmetic tables is universal and makes it possible to get their further development in the subsystem of numerical irregular triangles. Further, it has been found that only such tables can transmit arithmetic information by decryption for scientific and mathematical purposes.

Key words: recurrent numerical sequences; symmetric polynomials; prime numbers; Pascal's triangle.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-222-236

Original article submitted: 05.07.2022 Revision submitted: 22.08.2022

For citation. Shcherban' V. L. How to take from Pascal's triangle an infinite series of power sums from many variables and arithmetic systems compared modulo a prime number. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **39**: 2, 222-236. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-222-236

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest with respect to authorship and publication.

Contribution and responsibility. The author contributed to the writing of the article and is solely responsible for submitting the final version of the article to the press. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. The work was done without financial support

References

[1] Voronin S. M. Prostyye chisla [Simple numbers], Moscow, Znaniye, 1978, p. 95 (In Russian).
[2] Prasolov V. V. Mnogochleny [Polynomials], Moscow, MTsNMO, 2001, p. 336 (In Russian).
[3] Vinberg E. B. Algebra mnogochlenov [Algebra of polynomials], Moscow, Prosveshcheniye, 1980, p. 176 (In Russian).
[4] Markushevich A. I. Vozvratnyye posledovatel'nosti [Return sequences], Moscow, Nauka, 1983, p. 48 (In Russian).
[5] Uspenskiy V. A. Treugol'nik Paskalya [Pascal's triangle], Moscow, Nauka, 1979, p. 46 (In Russian).
[6] Bogatyrev R. R. Zolotoy treugol'nik, Mir PK, 2001, no. 6, pp. 52–60 (In Russian).
[7] Vorob'yev N. N. Chisla Fibonachchi [Fibonacci numbers], Moscow, Nauka, 1992, p. 189 (In Russian).
[8] Gel'fond A. O. Resheniye uravneniy v tselykh chislakh [Solution of equations in integers], Moscow, Nauka, 1978, p. 62 (In Russian).
[9] Boltyanskiy V. G., Boltyanskiy N. Ya. Simmetriya v algebre [Symmetry in algebra], Moscow, MTsNMO, 2002, p. 240(In Russian).
[10] Sposob dokazatel'stva dlya matematiki, gde sushchestvuyet mnogo suzhdeniy, kotoryye ne mogut byt' dokazany po-drugomu [Electronic resource]. Access mode: https://ru.wikipedia.org/wiki/Dokazatel'stvo_ot_protivnogo (date of access: 07.02.2021) (In Russian).
[11] Bykov V.I., Kytmanov A.M., Lazman M.Z. Metody isklyucheniya v komp'yuternoy algebre mnogochlenov [Elimination methods in computer algebra of polynomials], Novosibirsk: Nauka. Sib. otd-niye, 1991, p. 231 (In Russian).
[12] Vygodskiy M. Ya. Spravochnik po elementarnoy matematike [Handbook of elementary mathematics], Moscow, Gostekhizdat, 1954, p. 412 (In Russian).
[13] Shcherban' V. L. Pochemu okruzhayushcheye nas prostranstvo imenno trekhmerno, Vestnik Baltiyskogo federal'nogo universiteta im. I. Kanta. Ser. Fiziko-matematicheskiye i tekhnicheskiye nauki, 2020, no. 1., pp. 97–112, (In Russian).
[14] Ayoub R. An Introduction to the Analitic Theory of Numbers. American mathematical society providence, Rhode Island. 1963. p. 377.
[15] Itogi nauki i tekhniki. Seriya «Sovremennaya matematika i yeye prilozheniya. Tematicheskiye obzory». Math-net.ru arkhiv [Elektronnyy resurs]. Access mode: http://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=into&wshow=details&option_lang=rus (date of access: 07. 02. 2021) (In Russian).

Scherban' V. L. – Head of the educational Department, Center for Additional Mathematical Education, Kurgan, Russia, ORCID 0000-0002-5631-9681.