УДК 517.9 Научная статья

Численно-аналитический метод решения видоизменной задачи Коши для дробного диффузионного уравнения

Л. И. Сербина

ГБОУ ВО "Ставропольский государственный педагогический институт"
355029, г. Ставрополь, ул. Ленина 417а, Россия
E-mail: Serbina@mail.ru

В работе рассматривается численно-аналитический метод эффективного поиска приближенного решения видоизменной задачи Коши для дифференциального уравнения параболического типа с дробной производной по времени в смысле Римана-Лиувилля, естественно возникающей при изучении нелинейных особенностей процессов влагосолепереноса в средах с фрактальной структурой порового пространства.

Ключевые слова: диффузионное уравнение, фрактальная структура, оператор дробного дифференцирования, численно-аналитический метод, дискретный аналог, влагосолеперенос, алгоритм.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-175-183

Поступила в редакцию: 30.04.2022 В окончательном варианте: 02.06.2022

Для цитирования. Сербина Л. И. Численно-аналитический метод решения видоизменной задачи Коши для дробного диффузионного уравнения // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 39. № 2. С. 175-183. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-175-183

Введение

К математическим моделям диффузионного типа, в основе которых лежат различные варианты дифференциального уравнения в частных производных второго порядка параболического типа

$$u_t = a^2\Delta u + f(u;x;t) \tag{1}$$

где $a = \mathrm{const} > 0$, $u = u(x;t)$ неизвестная функция точки $x \in R^n$ и времени t, $\Delta_x u$ оператор Лапласа по координатам, сводится широкий класс задач подземного тепломассопереноса в сплошных средах [1].

Финансирование. Работа выполнена без финансовой поддержки

Важным вариантом модельного уравнения (1) является линейное дифференциальное уравнение [2] совместного движения солей и влаги в водонасыщенных пористых природных средах

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(u_* - u), \tag{2}$$

где $u = u(x,t)$ – концентрация почвенного раствора в точке x слоя $0 < x < r$ толщины r в момент времени $t \geq 0$; D_k – коэффициент конвективной (фильтрационной) диффузии; $b = \frac{v_0}{m}$ – фактическая скорость фильтрации в пористом пространстве; v_0 – скорость фильтрации; m – пористость почв и почвогрунтов; $\beta = const$ – кинетический коэффициент растворения; u_* – концентрация предельного насыщения.

Дифференциальное уравнение (2) с частными производными целого порядка параболического типа, построенное при соблюдении закона Дарси и гипотезы сплошности среды протекания, является основным в теоретических исследованиях при изучении внутренних механизмов массопереноса в капиллярно-пористых водонасыщенных средах. Оно предполагает неустановившееся линейное движение воднорастворимых солей и примесей в грунтовых водах, грунтах и почвах вдоль оси абсцисс и независимость интенсивности растворения солей от сложной топологии пористой среды протекания [3].

Следует отметить, что при таком общем подходе схематизации потока сложная внутренняя структура среды протекания, как правило игнорируется, а процессы взаимодействия между жидкостью и пористой средой характеризуются осредненными интегральными параметрами. При этом достаточно убедительные и многочисленные наблюдения и экспериментальные данные показывают [4], что динамические процессы влагосолепереноса в почвогрунтах, многообразные процессы взаимодействия между жидкостью и пористой средой протекания, достаточно часто обнаруживают инвариантность (фрактальность) пространственных и временных свойств и их математическое описание требует расширения диапазона измерения динамических характеристик [5].

Как известно, почва и почвогрунт при больших значениях m хорошо интерпретируются как пористые среды с фрактальной структурой и памятью [6]. Наличие памяти означает, что на значение диффузионного потока $u = u(x,t)$ в данный момент времени t оказывает влияние последовательность предшествующих его состояний. Для процессов влагосолепереноса во фрактальных пористых средах характерно крайне нерегулярное хаотическое изменение гидродинамических переменных во времени и наличие особого непредсказуемого их состояния и поведения с резко изменяющимися свойствами в пространстве и со временем.

Одно из перспективных направлений исследования, существенно расширяющих возможности классических методов математического описания нелинейных особенностей сложных взаимосвязанных диффузионно-релаксационных процессов, происходящих во фрактальных средах, связано с использованием формализма дробного интегро-дифференцирования [7]. Операторы дробного интегрирования и дифференцирования, обладая в приложениях рядом весьма важных структурно-функциональных свойств и допускающие различные обобщения, находят широкое применение в методах решения задач подземного массопереноса,учитывающих фрактальную во времени и пространстве природу нелинейных явлений [8].

Дифференциальное уравнение (2) совместного движения солей и влаги не учитывает, что почвы и почвогрунт, как правило, имеют фрактальную структуру. Учет этого фактора принципиально меняет уравнение (2) диффузионного влагосолепереноса, превращая его в дифференциальное уравнение дробного порядка следующего вида:

$$D_{0t}^{\alpha}u(x,\eta) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(u_* - u), \tag{3}$$

где a – коэффициент фрактальной диффузии, b – фактическая скорость движения почвенного раствора в порах грунта, D_{0t}^{α} – оператор дробного дифференцирования по времени t порядка $\alpha \in [0,1]$ в смысле Римана-Лиувилля [9].

Дробное дифференциальное уравнение (3) при $\alpha = 1$ совпадает с основным дифференциальным уравнением (2) совместного движения воды и солей при полном насыщении почвогрунтов растворимыми солями, построенного в рамках общепринятой конвективно - диффузионной модели линейной теории подземного массопереноса. Уравнение (3), сохраняя его общую структуру, учитывает, что изменение во времени (от начального 0 до текущего t) концентрации почвенного раствора в какой-либо точке x имеет фрактальную природу, и это изменение равно поступлению солей в результате разности концентрации почвенного раствора, переноса солей движущейся влагой и вследствие растворения солей твердой фазы и поступления их в раствор [10].

Характерной особенностью уравнения (3) движения почвенного раствора дробного порядка , отличающего его от известного классического дифференциального уравнения с частными производными второго порядка параболического типа (2), является его нагруженность [11]. Применение нагруженных уравнений с частными производными в описании процессов подземного массопереноса, существенно расширяя возможности качественного понимания и количественного описания нелинейных особенностей состояния и поведения исследуемых процессов, открывает принципиально новые возможности решения задач тепломассопереноса в средах с фрактальной организацией и памятью.

Рассмотрим для обобщенного дробного дифференциального уравнения (3) движения почвенного раствора видоизменную задачу Коши в следующей постановке [12].

Задача S

Найти регулярное в любой точке $x \in [0,r]$ и для любого момента времени $t > 0$ решение $u = u(x,t)$ уравнения (3), ограниченное при $t \to 0$ и удовлетворяющее условию Коши:

$$u(0,t) = \tau(t), \quad u_x(0,t) = \Psi(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{4}$$

В данном случае $\tau(t)$ – минерализация почвенного раствора, а $\Psi(t)$ – "поток"концентрации на поверхности почвогрунта $x=0$ в момент времени t от начального $t=0$ до расчетного $t=T$.

Как указано в работе [13], несмотря на долгую историю развития математического аппарата дробного дифференцирования, точные аналитические способы решения начально краевых задач для уравнений дробного порядка оказались возможными лишь для сравнительно узких классов задач, а теория численных методов их решения носит фрагментарный характер и далека от завершения. Одним из возможных и наиболее перспективных методов приближенного решения задач для дифференциальных уравнений с дробными производными является развитие наиболее эффективного промежуточного класса - численно-аналитического методов решения.

Основная идея численно–аналитических методов приближенного решения задач для уравнений дробного порядка состоит в переходе от континуальных неизвестных к дискретным, который осуществляется на основе применения одних и тех же приемов строгого математического аппарата, без принятия каких-либо дополнительных гипотез [14]. При реализации числено-аналитического метода решения уравнений с дробными производными, представляющего различные модификации метода конечных разностей, важную роль играют алгоритмы частного дифференцирования и интегрирования, основанные на определении производных по Летникову и Грюнвальду [15].

В основе предлагаемого алгоритма численно-аналитической реализации решения задачи S для дробного диффузионного уравнения лежит следующая схема.

Пусть $\quad 0=x_0<x_1<...<x_n<x_{n+1}=r, \quad h_i=x_{i+1}-x_i,$

$$u(x_i,t)=\tau_i(t), \quad u_x(x_i,t)=\Psi_i(t), \quad i=0,1,...n.$$

В уравнении (3) введём новую переменную по формуле

$$\upsilon_i(x,t)=u(x,t)\exp\left[\mu(x-x_i)\right],$$

где $\mu=const$.

Найдём частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x}-\upsilon_i\mu\right)e^{-\mu(x-x_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 \upsilon_i}{\partial x^2}-2\mu\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x}+\upsilon_i\mu^2\right)e^{-\mu(x-x_i)}$$

Затем, подставляя найденные значения частных производных от функции $u=u(x;t)$ в уравнение (3) и выполнив преобразования, получим,

$$D^{\alpha}_{0t}\upsilon_i e^{-\mu(x-x_i)}=a\left(\frac{\partial^2 \upsilon_i}{\partial x^2}-2\mu\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x}+\upsilon_i\mu^2\right)e^{-\mu(x-x_i)}-$$

$$-b\left(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x}-\upsilon_i\mu\right)e^{-\mu(x-x_i)}+\beta\left(u_*-\upsilon_i e^{-\mu(x-x_i)}\right),$$

$$D_{0t}^{a}\upsilon_i(x,\eta)=a\frac{\partial^2\upsilon_i}{\partial x^2}+(-2a\mu-b)\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x}+(a\mu^2+b\mu-\beta)\upsilon_i+\beta u_* e^{\mu(x-x_i)}$$

Тогда функция $\upsilon_i=\upsilon_i(x,t)$ удовлетворяет следующему дискретному уравнению

$$D_{0t}^{a}\upsilon_i=a\frac{\partial^2\upsilon_i}{\partial x^2}+c\upsilon_i+f_i(x), \tag{5}$$

где $2\mu=\frac{-b}{a}$; $c=a\mu^2+\mu b-\beta$; $f_i(x)=\beta u_* e^{\mu(x-x_i)}$, и начальным условиям:

$$\upsilon_i(x,t)|_{x=x_i}=u(x,t)\exp\left[\mu(x-x_i)\right]\big|_{x=x_i}=u(x_i,t)=\tau_i(t) \tag{6}$$

$$\frac{\partial\upsilon_i(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_i}=\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\mu u(x,t)\right]\exp\left[\mu(x-x_i)\right]\big|_{x=x_i}=$$
$$=u_x(x_i,t)+\mu u(x_i,t)=\Psi_i(t)+\mu\tau_i(t)=\upsilon_i(t) \tag{7}$$

Система (5)-(7), в силу формулы Грюнвальда- Летникова, которая допускает дискретную трактовку дробной производной Римана –Лиувилля [15], аппроксимируется следующим конечно-разностным нагруженным дифференциальным уравнением:

$$h_i\left[a\frac{\partial^2\upsilon_i}{\partial x^2}+f_i(x)\right]=\left[D_{0t}^{\alpha}-c\right]\det\begin{Vmatrix}\tau & x_i-x\\ \tau_{i+1}A_i^{\mu} & x_{i+1}-x\end{Vmatrix},A_i^{\mu}=\exp\left[\mu h_i\right]. \tag{8}$$

Точное решение разностного уравнения (8) в классе достаточно гладких функций примем за приближенное решение уравнения (3).

Из уравнения (8), интегрируя его получим

$$h_i\left[a\int_{x_i}^{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x}\right)+\beta u_*\int_{x_i}^{x}e^{\mu(\xi-x_i)}d\xi\right]=$$
$$=\left[D_{0t}^{\alpha}-c\right]\left\{\tau_i\int_{x_i}^{x}\left(x_{i+1}-\xi\right)d\xi-\tau_{i+1}A_i^{\mu}\int_{x_i}^{x}\left(x_i-\xi\right)d\xi\right\},$$
$$2h_i\left[a\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x}-a\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x}\Big|_{x=x_i}+\frac{\beta u_*}{\mu}\left[e^{\mu(x-x_i)}-1\right]\right]=$$
$$=-\left[D_{0t}^{\alpha}-c\right]\left\{\tau_i\left[(x_{i+1}-x)^2-h_i^2\right]-\tau_{i+1}A_i^{\mu}(x_i-x)^2\right\},$$
$$2h_i\left[a\frac{\partial\upsilon i}{\partial x}+\frac{\partial F_i}{\partial x}-a\upsilon_i\right]=\left[D_{0t}^{\alpha}-c\right]\begin{Vmatrix}\tau_i & x_i-x^2\\ \tau_{i+1}A_i^{\mu} & (x_{i+1}-x)^2-h_i^2\end{Vmatrix}, \tag{9}$$

где

$$F_i=\int_{x_i}^{x}(x-\xi)f_i(\xi)d\xi=\beta u_*\left\{\mu(x_i-x)+\exp\left[\mu(x-x_i)\right]-1\right\}/\mu^2,$$

$$\partial F_i/\partial x=\beta u_*\left\{\exp\left[\mu(x-x_i)\right]-1\right\}/\mu.$$

Равенство (9) даёт основание записать

$$2h_i\int_{x_i}^{x}\left(a\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x}+\frac{\partial F_i}{\partial x}-2a\upsilon_i\right)d\xi=$$

$$=-\left[D_{0t}^{\alpha}-c\right]\left\{\tau_i\int_{x_i}^{x}\left[(x_{i+1}-\xi)^2-h_i^2\right]d\xi-\tau_{i+1}A_i^{\mu}\int_{x_i}^{x}(x_i-\xi)^2d\xi\right\},$$

$$2h_i\left[a(\nu_i-\tau_i)+F_i-a\nu_i(x_i-x_i)\right]=$$

$$=-\left[D_{0t}^{\alpha}-c\right]\left\{\tau_i\left[h_i^2(x_i-x)+\frac{1}{3}(x_{i+1}-x)^3\right]-\frac{1}{3}\tau_{i+1}A_i^{\mu}(x_i-x)^3\right\}.$$

Полученное равенство можно записать в следующем виде

$$2h_i\left[a(\upsilon_i-\tau_i)+F_i-a\nu_i(x_i-x_i)\right]=$$

$$=-\left[D_{0t}^{a}-c\right]\left\|\begin{matrix}\tau_i & (x-x_i)^3/3\\ \tau_{i+1}A_i^{\mu} & (x_i-x)h_i^2+\left[h_i^3-\left(x_{i+1}-x\right)^3\right]/3\end{matrix}\right\|. \qquad (10)$$

Из равенств (9) и (10) в силу (4), (5) при значении $x=x_{i+1}$ соответственно имеем

$$2h_i\left[a\left(\nu_{i+1}-\nu_i\right)+\frac{\beta u_*(A_i^{\mu}-1)}{\mu}\right]=-h_i^2\left[D_{0t}^{\alpha}-c\right]\left(\tau_i-\tau_{i+1}A_i^{\mu}\right),$$

$$2h_i\left[a\tau_{i+1}A_i^{\mu}-a\tau_i+\frac{\beta u_*\{A_i^{\mu}-1-\mu h_i\}}{\mu^2}-a\nu_i h_i\right]=\frac{h_i^3}{3}\left[D_{0t}^{\alpha}-c\right]\left(2\tau_i+\tau_{i+1}A_i^{\mu}\right).$$

Отсюда в силу обратимости дробного оператора $\left[D_{0t}^{\alpha}-c_i\right]$, получаем следующие реккурентные соотношения

$$\left[D_{0t}^{\alpha}-c\right]\tau_{i+1}=2h_i^{-1}A_i^{-\mu}\left[a(\nu_{i+1}-\nu_i)+u_*\beta(A_i^{\mu}-1)/\mu\right]+A_i^{-\mu}\left[D_{0t}^{\alpha}-c\right]\tau_i, \qquad (11)$$

$$\left[D_{0t}^{\alpha}-c_i\right]\tau_{i+1}=2A_i^{-\mu}\left\{3h_i^{-2}(F_{ii+1}-a\tau_i-a\nu_i h_i)-\left[D_{0t}^{\alpha}-c\right]\tau_i\right\}, \qquad (12)$$

где $F_{i+1}=u_*\beta(A_i^{\mu}-1-\mu h_i)/\mu^2,\quad c_i=c+6ah_i^{-2},\quad \tau_0=\tau_0(t),\quad \nu_0=\mu\tau_0+\Psi_0(t).$

Формулы (11), (12), выражающие с помощью оператора D_{0t}^{α} дробного дифференцирования значения $u_{i+1}=\tau_{i+1}$ через значения $u_i=\tau_i$, где $i=0,1,...,n$ представляют собой численно-аналитический алгоритм приближенного решения задачи S для нагруженного дифференциального уравнения, в котором важнейшим параметром является размерность α фрактальной среды протекания.

Заключение

Очевидное преимущество численно-аналитического алгоритма (11), (12) решения задачи S вытекает из универсальности применяемых во всех приближенных методах данной группы подходов к замене дробного дифференциального уравнения алгебраическими на основе перехода от континуальных неизвестных к дискретным. Наличие в (11), (12) дифференциального оператора дробного порядка позволяет глубже понять известные ранее результаты и получить новый класс решений, позволяющий описать нелинейные эффекты процессов влагосолепереноса в средах с фрактальной организацией и памятью, ранее не объяснимых с позиций традиционных подходов.

Достоинством предложенного численно-аналитического метода решения задачи S для дробного уравнения является приведение ее к системам уравнений, допускающих эффективное численное решение современными вычислительными средствами.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответсвенность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы

1. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных*. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Нерпин С. В., Чудновский А. Ф. *Энерго и массообмен в системе растение-почва-воздух*. Л.: Гидрометиздат, 1975. 358 с.
3. Чудновский А. Ф. *Теплофизика почв*. М.: Наука, 1976. 352 с.
4. Соболев С. Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса, *Успехи физ. наук*, 1997. Т. 167, № 10, С. 1096-1106.
5. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка, *Дифф. уравн.*, 1990. Т. 26, № 4, С. 660-670.
6. Федотов Г. Н., Третьяков Ю. Д., Иванов В. К., Куклин А. И., Пахомов Е. И., Исламов А. Х., Початкова Т. Н. Влияние влажности на фрактальные свойства почвенных коллоидов, *ДАН*, 2006. Т. 409, № 2, С. 199-201.
7. Сербина Л. И. *Нелокальные математические модели процессов переноса в системах с фрактальной структурой*. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2002. 144 с.
8. Дробный интеграл и его физическая интерпретация, *Теор. и мат. физика*, 1992. Т. 90, № 3, С. 354-368.
9. Нахушев А. М. *Элементы дробного исчисления и их применение*. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
10. Сербина Л. И. Об одной математической модели переноса субстанции во фрактальных средах, *Мат. моделирование*, 2005. Т. 15, № 9, С. 17–28 DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-127-132.
11. Нахушев А. М. Нагружные уравнения и их приложения, *Дифф. уравн.*, 1983. Т. 19, № 1, С. 86-94.
12. Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я. *Теория операторов и некорректные задачи*. Новосибирск: Институт математики, 1999.
13. Головизин В. М., Кисилев В. П., Короткин И. А., Юрков Ю. И. *Некоторые особенности вычислительных алгоритмов для уравнений дробной диффузии*. М.: Препринт ИБРАЭ РАН, 2002. 57 с.
14. Самарский А. А. *Введение в численные методы*. М.: Наука, 1997. 240 с.
15. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск, 1987. 688 с.

Сербина Людмила Ивановна ✉ – доктор физико-математических наук, профессор, почетный работник ВПО РФ, профессор кафедры математики и информатики государственного педагогического института г. Ставрополь, Россия, ORCID 0000-0003-3536-5846.

MSC 26A33, 35K57 Research Article

Numerical-analytical method for solving the modified Cauchy problem for the fractional diffusion equation

L. I. Serbina

GBOU VO Stavropol Stat Pedagogikal Institute, 355029, Stavropol, Lenina str, 417a, Russia

E-mail: Serbina@mail.ru

The paper considers a numerical-analytical method for efficient search for an approximate solution of the modified Cauchy problem for a parabolic differential equation with a fractional time derivative in the sense of Riemann-Liouville, which naturally arises in the study of nonlinear features of moisture-salt transfer processes in media with a fractal structure of pore space.

Key words: diffusion equation, fractal structure, fractional differentiation operator, numerical-analytical method, discrete analog, moisture transfer, algorithm.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-175-183

Original article submitted: 30.04.2022 Revision submitted: 02.06.2022

For citation. Serbina L. I. Numerical-analytical method for solving the modified Cauchy problem for the fractional diffusion equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **39**: 2, 175-183. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-175-183

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest with respect to authorship and publication.

Contribution and responsibility. The author contributed to the writing of the article and is solely responsible for submitting the final version of the article to the press. The final version of the manuscript was approved by the author.

References

[1] Bitsadze A. V. Nekotoryye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh [Some classes of partial differential equations]. Moscow Nauka, 1981, p. 448 (In Russian)

[2] Nerpin S. V., Chudnovskiy A. F. Energo i massoobmen v sisteme rasteniye-pochva-vozdukh [Energy and mass transfer in the plant-soil-air system], Leningrad, Gidrometizdat, 1975, p. 358 (In Russian)

Funding. The work was done without financial support

[3] Chudnovsky A. F. Teplofizika pochv [Soil thermophysics], Moscow, Nauka, 1976, p. 352 (In Russian)
[4] Sobolev S. L. Lokal'no-neravnovesnyye modeli protsessov perenosa [Local non-equilibrium transport models], Uspekhi fizicheskikh nauk, 1997, vol. 167, no. 10, pp. 1096-1106 (In Russian)
[5] Kochubei A. N. Diffusion of fractional order, Differential Equations, 1990, vol. 26, no. 4, pp. 485–492.
[6] Fedotov G. N., et al. The influence of moisture on fractal properties of soil colloids, Doklady akademii nauk, 2006, vol. 409, no. 2, pp. 199-201 (In Russian)
[7] Serbina L. I. Nelokal'nyye matematicheskiye modeli protsessov perenosa v sistemakh s fraktal'noy strukturoy [Nonlocal Mathematical Models of Transport Processes in Systems with a Fractal Structure], Nal'chik, Izd-vo KBNTS RAN, 2002, p. 144 (In Russian)
[8] Nigmatullin R. R. Fractional integral and its physical interpretation, Theoretical and Mathematical Physics, 1992, vol. 90, no. 3, pp. 242–251.
[9] Nakhushev A. M. Elementy drobnogo ischisleniya i ikh primeneniye [Elements of fractional calculus and their application]. Moscow, Fizmalit, 2003, p. 272 (In Russian)
[10] Serbina L. I. On one mathematical model of substance transfer in fractal media, Matem. Mod., 2005, vol. 15, no. 9, pp. 17–28 (In Russian)
[11] Nakhushev A. M. Nagruzhnyye uravneniya i ikh prilozheniya [Loaded equations and their applications], Differ. Uravn., 1983, vol. 19, no. 1, pp. 86-94 (In Russian)
[12] Lavrent'yev M. M., Savel'yev L. YA. Teoriya operatorov i nekorrektnyye zadachi [Operator theory and ill-posed problems], Novosibirsk, Institut matematiki, 1999 (In Russian)
[13] Golovizin V. M., Kisilev V. P., Korotkin I. A., Yurkov YU. I. Nekotoryye osobennosti vychislitel'nykh algoritmov dlya uravneniy drobnoy diffuzii [Some features of computational algorithms for fractional diffusion equations], Moscow, Preprint IBRAE RAN, 2002, p. 57 (In Russian)
[14] Samarskiy A. A. Vvedeniye v chislennyye metody [Introduction to Numerical Methods], Moscow, Nauka, 1997, p. 240 (In Russian)
[15] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya Fractional integrals and derivatives and some of their applications], Minsk, 1987, p. 688 (In Russian)

Serbina Lyudmila Ivanovna – D. Sci. (Phys. and Math.), Professor, Honorary Worker of the Higher Professional Education of the Russian Federation, Professor of the Department of Mathematics and Informatics of the State Pedagogical Institute in Stavropol, Russia, ORCID 0000-0003-3536-5846.

УДК 517.9