МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.958 [550.3 + 551.5] Научная статья

Моделирование роста плоских снежных кристаллов в облаках с фрактальной структурой

Т. С. Кумыков

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова 89 а, Россия
E-mail: macist20@mail.ru

В данной работе предлагается универсальная модель к описанию процесса роста плоских снежных кристаллов круглой формы в облаках смешанного типа с фрактальной структурой. В качестве объекта исследования выбраны снежные кристаллы, так как они могут оказывать существенное влияние на погодные условия и климат Земли. В аналитическом виде найдено решение уравнения модели, в которой свойство фрактальности облачной среды учитывается через феноменологический параметр, определяющий интенсивность роста снежных кристаллов с применением аппарата дробного интегро-дифференцирования. Показано, что рост снежных кристаллов при сублимационном и коагуляционном механизмах роста в основном зависит не только от температуры и водности, но и от параметра фрактальности облачной среды. Представлены кривые роста снежного кристалла в зависимости от экспериментальных параметров фрактальности облачной среды в общем случае и при быстрой диффузии. Отмечено, что показатель фрактальности отвечает за интенсивность процесса, чем больше фрактальность, тем интенсивнее протекает процесс роста снежных кристаллов. Рассмотренная модель может быть использована при расчете роста снежных кристаллов учитывающая фрактальные параметры облачной среды.

Ключевые слова: снежный кристалл, динамическая модель, фрактальная среда, водность облака.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-80-90

Поступила в редакцию: 04.08.2022 В окончательном варианте: 14.09.2022

Для цитирования. Кумыков Т. С. Моделирование роста плоских снежных кристаллов в облаках с фрактальной структурой // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 39. № 2. С. 80-90. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-80-90

Финансирование. Работа выполнена без финансовой поддержки

Введение

Вопросу о механизме роста снежинок посвящено небольшое количество работ, главным образом экспериментальных [1]. Снежные кристаллы играют важную роль в распространении солнечной и земной радиации, которая оказывает большое влияние на погодные условия и климат Земли. Также снежные кристаллы могут оказывать существенное влияние на электрическую структуру конвективных облаков. Поэтому исследование механизмов роста снежных кристаллов представляется актуальным.

Структура снежных кристаллов зависит от состояния атмосферы и их формирование зависит от многих факторов, но главным образом от температуры окружающей среды и наличия водяного пара.

Так как облака имеют фрактальную природу [3], другим важным фактором в исследовании роста снежных кристаллов в облаках является учет фрактальной структуры облачной среды. Одним из таких факторов, предлагаемых к рассмотрению при исследовании роста снежных кристаллов, является фрактальность среды. Описание этого фактора, как правило, не укладывается в рамки традиционных методов. Поэтому в основу данных подходов положен бурно развивающийся в последнее время аппарат дробного интегро-дифференцирования для моделирования рассматриваемого процесса.

В работах [4]–[5] показано, что дифференциальные уравнения с дробной производной широко используется при моделировании атмосферных процессов, которые позволяют учесть фрактальность динамических процессов по временной переменной.

В предлагаемой работе рассматривается модель роста снежных кристаллов плоских форм с учетом фрактальности облачной среды и показано влияние этого параметра на водность облачной среды с применением аппарата дробного интегро-дифференцирования.

Постановка и решение задачи

Рассмотрим рост снежных кристаллов в облаке смешанного строения, в котором укрупнение осуществляется за счет сублимации водяного пара и коагуляции с облачными каплями. Считая, что оба процесса протекают независимо, для классического случая скорости роста массы $M(t)$ можно записать следующее выражение

$$\frac{dM(t)}{dt} = \left(\frac{dM(t)}{dt}\right)_s + \left(\frac{dM(t)}{dt}\right)_{ca}. \tag{1}$$

В качестве модели снежных кристаллов примем, как и Хаутон, диск [6].

Тогда для первой слагаемой в правой части (1), относительно сублимационной скорости роста запишем

$$\left(\frac{dM(t)}{dt}\right)_s = 2\pi\rho R^2 \left(\frac{dh(t)}{dt}\right)_s, \tag{2}$$

где ρ - плотность льда, R - радиус снежного кристалла, h - толщина снежного кристалла.

Сравнивая выражения для сублимационного роста, полученное Хаутоном [6]

$$\left(\frac{dM(t)}{dt}\right)_s = 4\pi\rho DCG\varepsilon, \tag{3}$$

где D - коэффициент молекулярной диффузии, C - электроемкость кристалла, G - ветровой множитель, $\varepsilon = \rho_w - \rho_{0w}$ - разность плотности насыщающего водяного пара над водой и льдом, и уравнение (2), при $C = \frac{2}{\pi}R$ приходим к выражению для скорости роста толщины снежного кристалла

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{4DG\varepsilon}{\pi\rho R}. \tag{4}$$

В работе мы полагаем, что для снежных кристаллов процессы сублимации и коагуляции обуславливают только увеличение радиуса или толщины кристаллов. Основную роль сублимационный процесс играет в начальный момент роста снежных кристаллов.

Коагуляционный рост можно рассчитывать по упрощенной формуле, предложенной в работе [1].

$$\left(\frac{dM(t)}{dt}\right)_{ca} = 2\pi\rho R^2 \left(\frac{dh(t)}{dt}\right)_{ca}, \tag{5}$$

или

$$\left(\frac{dM(t)}{dt}\right)_{ca} = 0,72\pi R^2(t)\omega \vartriangle \upsilon, \tag{6}$$

где ω - водность облака, $\vartriangle \upsilon = \upsilon_d - \upsilon_i$ - разница скоростей падения, снежного кристалла и капли.

Тогда, исходя из выше сказанного, мы можем записать упрощенный вариант расчета скорости роста снежных кристаллов в виде

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{8DG\varepsilon}{\pi\rho h(t)} + \frac{0,72\omega \vartriangle \upsilon}{\rho h(t)} R(t). \tag{7}$$

В дальнейшем в работе считаем, что $h(t) = const$. Тогда полагая, что облако, в котором протекают эти процессы представляет собой фрактальный объект, рассмотрим рост кристаллов. Облака с определенной фрактальной структурой, можно характеризовать как фрактальную среду с массовой размерностью B и фрактальностью α.

Массовая размерность B является физическим аналогом размерности Хаусдорфа-Безиковича d_i, связанная с феноменологическим параметром фрактальности среды α следующим образом [7]: в общем случае $\alpha = d_i - 1$; при медленной диффузии $\alpha = 2d_i - 3$; при быстрой диффузии $\alpha = \frac{d_i - 1}{2 - d_i}$.

Применительно к облакам, фрактальная размерность d_i облачной фрактальной среды можно записать следующее выражение [8]

$$d_i = \frac{\log N}{\log\left(l/\eta\right)}, \tag{8}$$

где η, l – характерные внутренние и внешние масштабы облака; N – число ячеек размером η.

Учет фактора фрактальности облачной среды меняет уравнение (7), превращая его в дифференциальное уравнение роста снежных кристаллов, дробного порядка, имеющих плоскую форму (в данной работе форму диска).

Аналогично работе [9] применим понятие эффективной скорости изменения некоторой физической величины p (в настоящей работе $R(t)$ или $M(t)$)

$$\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = \int_0^t g(t-t')\frac{dp(t')}{dt'}dt', \tag{9}$$

где $g(t)$ - функция памяти, t - безразмерное время, τ - параметр отвечающий за дробное время процесса.

Такое определение скорости для учета фрактальности какого-либо физического процесса по времени было предложено и обосновано в работе [9]. Фрактальность по времени связана с наличием внешней диссипативной среды с фрактальной структурой, в которой протекает процесс, а реальные диссипативные системы обладают «остаточной памятью», которую можно задать степенной функцией

$$g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\tau^{1-\alpha}t^{\alpha}}.$$

Тогда (9) можем записать в следующем виде

$$\left\langle \frac{dp}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau^{1-\alpha}}\partial_{0t}^{\alpha}p, \quad 0<\alpha<1, \tag{10}$$

В (10) определение эффективной скорости изменения некоторой физической величины p, вводится с учетом регуляризованной дробной производной порядка α от функции $p(t)$ ($p(t)$ – закон изменения со временем некоторой физической системы) с началом и концом в точках 0 и t (производная по Капуто) [10]

$$\partial_{0t}^{\alpha}p(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{1}{(t-z)^{\alpha}}\frac{dp(z)}{dz}dz,$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, α – порядок интегро-дифференцирования (в данной работе $n=1$).

Принимая во внимание (9), выражение (7) перепишем в следующем виде

$$\partial_{0t}^{\alpha}R(t) = \left(\frac{8DG\varepsilon}{\pi\rho h} + \frac{0,72\omega \vartriangle \upsilon}{\rho h}R(t)\right)\tau^{1-\alpha}, \quad 0<\alpha<1. \tag{11}$$

Последнее представляет собой фрактально-динамическое уравнение роста снежных кристаллов в облаках смешанного типа и является дробным аналогом процесса роста снежных кристаллов предложенной в работе [1].

В (11) свойство фрактальности облачной среды учитывается через феноменологический параметр α, подразумевающий эргодичность системы, когда пространственная фрактальность учитывается через динамику роста кристаллов по временной переменной.

Перепишем (11) в следующей форме

$$\partial_{0t}^{\alpha}R(t)-\gamma R(t)=f(t),\quad 0<\alpha<1, \tag{12}$$

где $\gamma=\frac{0{,}72\omega\triangle\upsilon}{\rho h}\tau^{1-\alpha}$, $f(t)=\frac{8DG\varepsilon\tau^{1-\alpha}}{\pi\rho h}$.

Для (12) справедливо начальное локальное условие

$$R(0)=R_0. \tag{13}$$

Уравнение (12) и начальное условие (13) образуют задачу Коши для дифференциального уравнения дробного порядка (12), а решение этой задачи описывает процесс роста снежных кристаллов в облаке, в котором учитывается фрактальность α облачной среды.

Общее решение задачи (12)–(13) можно представить в виде [10]

$$R(t)=\sum_{k=1}^{n}R_k|t-a|^{n-k}E_{1/\alpha}(\gamma|t-a|^{\alpha};n-k+1)+$$

$$+\operatorname{sign}(a-t)\int_a^t f(\xi)|t-a|^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(\gamma|t-\xi|^{\alpha};\alpha)\,d\xi.$$

Используя формулу вида

$$\partial_{0t}^{\alpha}R(t)=D_{0t}^{\alpha}R(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{k-\alpha-1}}{\Gamma(k-\alpha)}R^{(k-1)}(0), \tag{14}$$

перепишем общий вид уравнения (12) в следующем виде

$$D_{0t}^{\alpha}R(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{k-\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)}R^{(k-1)}(0)+\gamma R(t)=f(t). \tag{15}$$

Из (15) находим

$$R(t)=F*t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\gamma t^{\alpha})+\sum_{k=1}^{n}a_k t^{\alpha-k}E_{\alpha,\alpha-k+1}(Rt^{\alpha})=$$

$$=f*t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\gamma t^{\alpha})+\sum_{k=1}^{n}R^{(k-1)}(0)\frac{t^{k-\alpha-1}}{\Gamma(k-\alpha)}*t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\gamma t^{\alpha}). \tag{16}$$

Когда $R(t)$ относится к абсолютно непрерывному классу, необходимо добавить условие $\lim\limits_{t\to 0}D_{0t}^{\alpha-1}R(t)=R_1=0$, с учетом которого (16) примет следующий вид

$$R(t)=\frac{8DG\varepsilon\tau^{1-\alpha}}{\pi\rho h}t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(\gamma t^{\alpha})+R_0E_{\alpha,1}(\gamma t^{\alpha}), \tag{17}$$

где $E_{\alpha,\beta}(\gamma t^{\alpha})=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma^k t^{k\alpha}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ представляет собой функцию типа Миттаг–Леффлера.

Уравнение (17) описывает динамический процесс роста плоских снежных кристаллов в смешанных облаках, имеющих фрактальную структуру.

Если в классических работах для снежных кристаллов определенного размера сублимационный процесс в облаках смешанного строения в основном зависит от температуры, а коагуляционный процесс – от водности, то опираясь на уравнение (17) можно говорить, что оба процесса зависят помимо перечисленных параметров, и от параметра фрактальности облачной среды.

Результаты модельных расчетов

Пользуясь выведенными формулами для роста снежных кристаллов, были выполнены расчеты для следующих параметров фрактальности среды: $\alpha = 0,1$; $\alpha = 0,3$; $\alpha = 0,5$; $\alpha = 0,7$ и $\alpha = 0,9$. При этом полагали, что ветровой множитель определяется формулой

$$G = 1 + 0.229\sqrt{Re},$$

где $Re = \frac{2R\delta\upsilon_d}{\eta}$-число Рейнольдса, δ- плотность воздуха, η-коэффициент динамической вязкости;
эффективная скорость падения облачных капель

$$\upsilon_i = 0.37\frac{\rho_2 g}{\eta}R_i^2;$$

скорость падения снежного кристалла

$$\upsilon_d = \frac{\pi\eta}{2R_d}\left(\sqrt{1 + \frac{h\rho g\delta R_d^2}{4\eta^2}} - 1\right).$$

Расчеты роста снежного кристалла проведены при условии, что к моменту начала процесса сублимации и коагуляции в расчет принимались следующие значения: $D = 0.22 \cdot 10^{-4}\frac{м^2}{с}$, $R_d = 0.5 \cdot 10^{-3}$м, $h = 30$мк, $R_k = 10$мк, $\rho = 900\frac{кг}{м^3}$, $\eta = 1,12 \cdot 10^{-3}\frac{кг}{мс}$

На рис. 1 представлены результаты численного расчета по формуле (17) при $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.7$ и $\alpha = 0.9$.

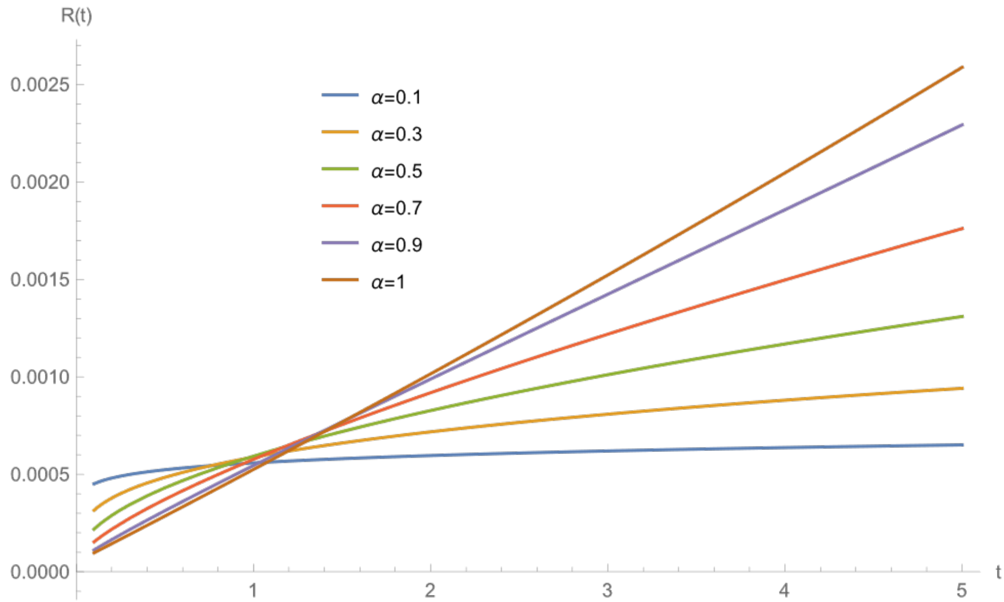

Рис. 1. Зависимость роста снежного кристалла от параметра фрактальности облачной среды

[Figure 1. Dependence of snow crystal growth on the cloud medium fractality parameter]

Как показывают расчеты, заметное влияние на рост кристаллов имеет место при уменьшении численного значения параметра α. Это означает, что фрактальная структура облака должна оказывать влияние на процесс роста тем сильнее, чем больше фрактальность среды.

Видно, что с уменьшением показателя α происходит замедление процесса роста снежных кристаллов, в результате чего происходит перегруппировка с бесконечно длинными «степенными хвостами». Анализируя кривые, можно сказать, что фрактальная структура облака должна оказывать влияние на процесс роста тем сильнее, чем больше ее фрактальность, т.е. показатель α отвечает за интенсивность рассматриваемого процесса.

Также отметить, что при достаточно малых значениях α расчётные кривые, перегруппировываются с бесконечно длинными «степенными хвостами», и что эти «степенные хвосты» указывают на нелинейность фрактальных процессов в облаках.

Ссылаясь на известные данные, полученные в работах [8] и [11] и используя формулу (8) построим реальные графики роста снежных кристаллов с учетом фрактальной структуры облака. Так в работе [11] отмечено, что грозовые облака с мощными конвективными токами имеют фрактальную структуру с фрактальной размерностью, равной 1,36±0,1, а в работе [8] приведены численные значения фрактальной размерности границ зон дождевых облаков, равной 1,38 и 1,34.

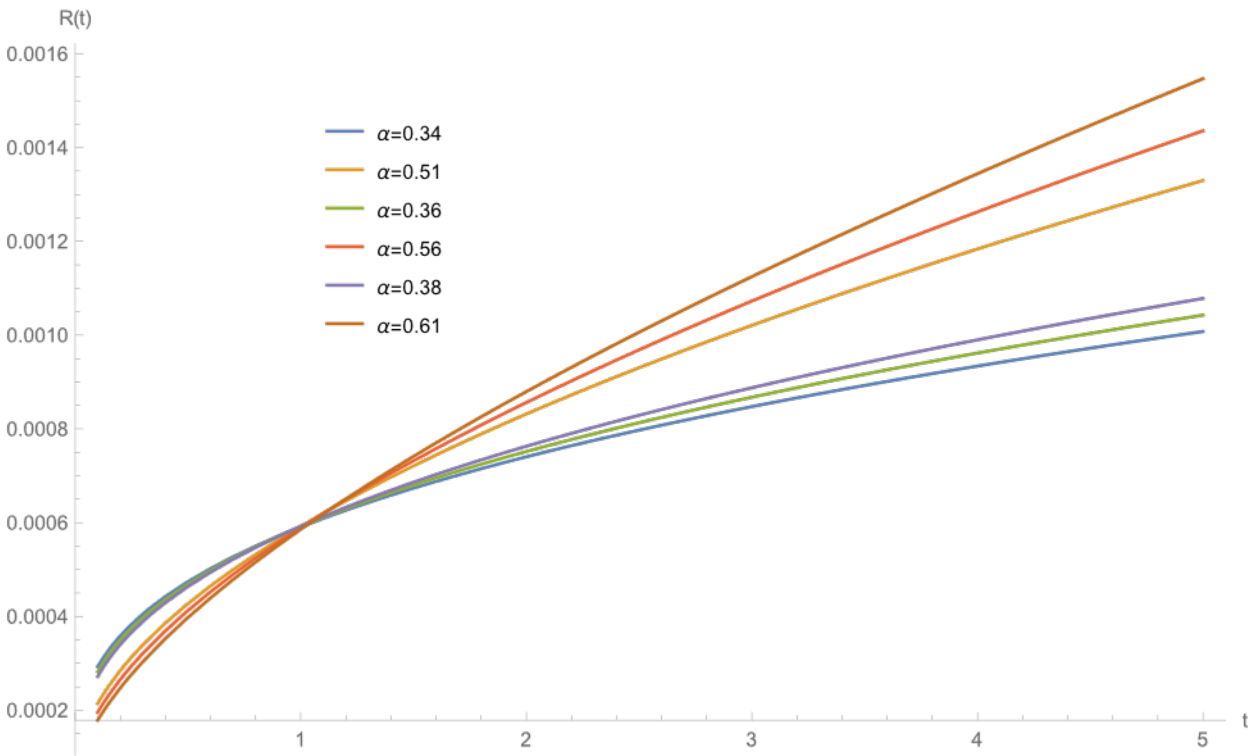

Рис. 2. Зависимость роста снежного кристалла от экспериментальных параметров фрактальности облачной среды
[Figure 2. Dependence of the growth of a snow crystal on the experimental parameters of the fractality of the cloudy medium]

На рис. 2 представлены кривые роста снежного кристалла в зависимости от экспериментальных параметров фрактальности облачной среды в общем случае и при быстрой диффузии. Здесь, как и на рис. 1, показатель фрактальности отвечает за интенсивность процесса роста, чем больше фрактальность, тем интенсивнее протекает процесс увеличения снежных кристаллов.

Кривые на рис. 1 хорошо согласуются с экспериментальными кривыми полученными на рис. 2.

Заключение

В данной работе предлагается универсальная модель к описанию процесса роста снежного кристалла во фрактальной облачной среде. В нашем случае универсальность подхода обусловлена тем, что многие физические процессы в облаках могут быть смоделированы с помощью аппарата дробного интегро-дифференцирования, который позволяет описывать эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем, дробный показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции t.

При исследовании процесса роста снежных кристаллов, кроме температуры окружающей среды и наличия водяного пара, необходимо учитывать фрактальность облачной среды. Учет этого фактора и применение математического аппарата интегро-дифференцирования меняет рассматриваемое уравнение, превращая его в дифференциальные уравнение дробного порядка.

Рассмотренная модель может быть использована для расчета роста плоских снежных кристаллов круглой формы, учитывающая фрактальность среды. Проведенные численные эксперименты влияния фрактальности среды на рост снежных кристаллов при различных сочетаниях микрофизических параметров показали общую зависимость от параметра фрактальности среды.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы

1. Шишкин Н. С. *О росте снежинок в облаках. Вопросы физики облаков и активных воздействий.* Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1965. 144 с.
2. Mandelbrot B. B. *The Fractal Geometry of Nature.* N. Y.: Freeman, 1982. 468 pp.
3. Кумыков Т. С., Паровик Р. И. Математическое моделирование закона изменения заряда облачных капель во фрактальной среде, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки,* 2015. Т. 10, № 1, С. 12–17 DOI: 10.18454/2079-6641-2015-10-1-12-17.
4. Kumykov T. S. Charge accumulation in thunderstorm clouds: fractal dynamic model, *E3S Web of Conferences,* 2019. Т. 127, № 01001, С. 22–29 .
5. Kumykov T. S. Mathematical modeling of the evolution of cloud drops with the influence of the fractality of the cloud environment, *Journal of Mathematical Sciences,* 2021. Т. 253, № 4, С. 520–529 DOI: 10.1007/s10958-021-05249-x.

6. Haughton N. G. A preliminary quantitative analysis of precipitation mechanisms, *Journal of Meteorology*, 1950. Т. 7, № 6, С. 363–369.
7. Шогенов В. Х., Аххубеков А. А., Аххубеков Р. А. Метод дробного дифференцирования в теории броуновского движения, *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*, 2004. № 1, С. 46–50.
8. Потапов А. А. *Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки.* М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
9. Рехвиашвили С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики, *Письма ЖТФ*, 2004. Т. 30, № 2, С. 33–37.
10. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с.
11. Rys F., Waldfogel A. Fractals in Physics, *Proceedings of the VI International Symposium on Fractals in Physics*, 1985, pp. 644–649.

Кумыков Тембулат Сарабиевич – кандидат физико-математических наук, заведующий отделом математического моделирования геофизических процессов, института прикладной математики и автоматизации, Нальчик, Россия, ORCID 0000-0002-9259-4509.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2022. vol. 39. no. 2. pp. 80–90. ISSN 2079-6641

MATHEMATICAL MODELING

MSC 86A10 Research Article

Modeling the growth of flat snow crystals in clouds with fractal structure

T. S. Kumykov

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 360004, Nalchik, Shortanova st., 89 a, Russia

E-mail: macist20@mail.ru

In this paper, a universal model is proposed to describe the growth process of flat round-shaped snow crystals in mixed-type clouds with a fractal structure. Snow crystals were chosen as the object of research, as they can have a significant impact on the weather conditions and climate of the Earth. In an analytical form, the solution of the equation of the model is found, in which the fractal property of the cloud environment is taken into account through a phenomenological parameter that determines the intensity of the growth of snow crystals using the fractional integro-differentiation apparatus. It is shown that the growth of snow crystals under sublimation and coagulation growth mechanisms mainly depends not only on temperature and water content, but also on the fractal parameter of the cloud environment. The snow crystal growth curves are presented depending on the experimental parameters of the fractality of the cloud medium in the general case and with rapid diffusion. It is noted that the fractality index is responsible for the intensity of the process, the greater the fractality, the more intense the process of snow crystal growth. The considered model can be used to calculate the growth of snow crystals taking into account the fractal parameters of the cloud environment.

Key words: snow crystal, dynamic model, fractal medium, cloud water content.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-80-90

Original article submitted: 04.08.2022 Revision submitted: 14.09.2022

For citation. Kumykov T. S. Modeling the growth of flat snow crystals in clouds with fractal structure. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **39**: 2, 80-90. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-80-90

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The work was done without financial support

References

[1] Shishkin N. S. O roste snezhinok v oblakakh. Voprosy fiziki oblakov i aktivnykh vozdejstvii [About the growth of snowflakes in the clouds. Questions of cloud physics and active influences]. Leningrad, 1965, pp. 144 (In Russian).

[2] Mandelbrot B. B. The Fractal Geometry of Nature. N. Y., Freeman, 1982, pp. 468.

[3] Kumykov T. S., Parovik R. I. Mathematical modeling of changes in the charge cloud droplets in a fractal environment, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2015, vol. 10, no. 1, pp. 12–17. DOI: 10.18454/2079-6641-2015-10-1-12-17 (In Russian).

[4] Kumykov T. S. Charge accumulation in thunderstorm clouds: fractal dynamic model, E3S Web of Conferences. 2019. vol. 127, 01001. DOI: 10.1051/e3sconf/201912701001.

[5] Kumykov T. S. Mathematical modeling of the evolution of cloud drops with the influence of the fractality of the cloud environment, Journal of Mathematical Sciences. 2021. vol. 253. no. 4. pp. 520–529. DOI: 10.1007/s10958-021-05249-x

[6] Haughton N. G. A preliminary quantitative analysis of precipitation mechanisms, J. Meteorology. 1950. vol. 7, no. 6.

[7] Shogenov V. KH., Akhkubekov A. A., Akhkubekov R. A. Metod drobnogo differencirovaniia v teorii brounovskogo dvizheniia [Fractional differentiation method in the theory of Brownian motion], Izvestiia vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Seriia: Estestvennye nauki, 2004, no. 1, pp. 46–50. (In Russian).

[8] Potapov A. A. Fraktaly v radiofizike i radiolokacii: Topologiya vyborki [Fractals in radiophysics and radar: Sampling topology.] , M., Universitetskaya kniga, 2005, 848 pp. (In Russian).

[9] Rekhviashvili S. SH. Formalizm Lagranzha s drobnoj proizvodnoj v zadachah mekhaniki [Lagrange formalism with fractional derivative in problems of mechanics], Pis'ma ZHTF, 2004. vol.30. no. 2, pp. 33–37. (In Russian).

[10] Pskhu A.V. Uravneniia v chastnykh proizvodnykh drobnogo poriadka [Partial differential equations of fractional order]. Moscow, Nauka, 2005, p. 199 (In Russian).

[11] Rys F., Waldfogel A. Fractals in Physics Proceedings of the VI International Symposium on Fractals in Physics, ICTP, Trieste, Italy. 1985. pp. 644–649.

Kumykov Tembulat Sarabievich – Ph. D. (Phys. & Math.), Head of the Department of Mathematical modelling of geophysical processes Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkaria, Nalchik, Russia, ORCID 0000-0002-9259-4509.