

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

УДК 514.112.3

Научная статья

**О некоторых неизвестных результатах, связанных с нетривиальными свойствами обычных треугольников. Ч. II**

**Б. П. Федоров**, С. Б. Богданова, С. О. Гладков

Московский авиационный институт, 125993, г. Москва, Волоколамское ш, 4  
E-mail: sonjaf@list.ru

Приведено подробное решение ряда оригинальных задач, сформулированных в свое время Б.П. Федоровым, являющихся логическим продолжением исследования нетривиальных свойств евклидовых треугольников, к числу которых относятся их слабо изученные свойства, порожденные точками Лемуана и Брокара.

*Ключевые слова:* свойства треугольников, деление отрезков, точка Лемуана, точка Брокара, теорема ван Обеля.

 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-197-221

Поступила в редакцию: 11.06.2022

В окончательном варианте: 15.09.2022

Для цитирования. **Федоров Б. П.**, Богданова С. Б., Гладков С. О. О некоторых неизвестных результатах, связанных с нетривиальными свойствами обычных треугольников. Ч. II // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 39. № 2. С. 197-221.  DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-197-221

Контент публикуется на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International* (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© **Федоров Б. П.**, Богданова С. Б., Гладков С. О., 2022

## Введение

В настоящем сообщении мы продолжим разговор о ряде нетривиальных свойств обычных евклидовых треугольников, о которых, к сожалению, довольно мало упоминается в современных источниках по элементарной геометрии. Предыдущая авторская работа [1] была посвящена подробностям описания этих свойств, связанных с не часто встречаемых в терминологии литературных источников по геометрии такими специфическими понятиями, как инцентр, центроид и ортоцентр. Продолжая работу в этом направлении, мы обратились к еще более замечательным точкам треугольника, которые носят название «точка Лемуана» и «точка Брокара». В энциклопедии «замечательных точек» треугольника (см. [2], Encyclopedia of Triangle Centers, ETS), эти точки обозначаются как X<sub>6</sub> и X<sub>39</sub> соответственно.

**Финансирование.** Работа выполнена без финансовой поддержки

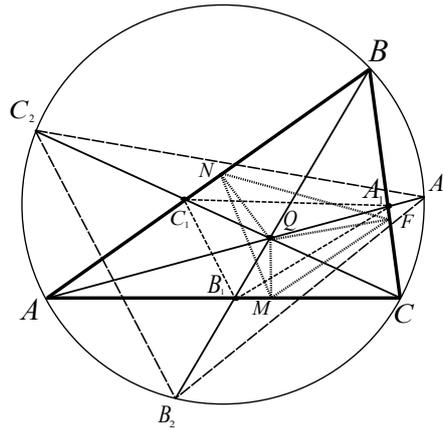


Рис. 1.  $Q$  – точка пересечения чевиан  $AA_1, BB_1, CC_1$  треугольника  $ABC$   
 [Figure 1.  $Q$  – cevian intersection  $AA_1, BB_1, CC_1$  of triangle  $ABC$ ]

В работе [1] было показано, что любые три чевианы [3]-[7] (см. рис. 1) порождают:

1. Треугольник  $A_1B_1C_1$ , образованный основаниями чевиан.
2. Треугольник  $A_2B_2C_2$ , вершинами которого являются точки пересечения продолжений чевиан с описанной окружностью.
3. Подерный треугольник  $MNF$  относительно точки пересечения чевиан.

Систематизация результатов, которые были получены при исследовании свойств треугольников  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$ ,  $MNF$ , образованных относительно точек Лемуана и Брокара позволило составить Таблицу.

*Таблица*

Площади треугольников, найденные по точке Брокара и точке Лемуана  
 [Areas of triangles found from the Brocard point and the Lemoine point]

точка	$S_{A_1B_1C_1}$	$S_{MNF}$	$S_{A_2B_2C_2}$
Лемуана	$\frac{2S}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}$	$\frac{3S}{4R^2} \cdot \left( \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2$	$\frac{27}{64} S \left( \frac{abc}{m_a m_b m_c} \right)^2$
Брокара	$\frac{2a^2 b^2 c^2 S}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}$	$\frac{S}{4R^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$	$S$

Излагаемые ниже подробности вычислений, связанные с доказательством представленных в Таблице результатов, на наш взгляд, существенно расширяют представления о не совсем «элементарной» природе элементарной геометрии.

## Исследование свойств треугольников, порожденных точкой Лемуана

### Определение симедианы и ее свойства

Появление точки Лемуана обусловлено так называемыми симедианами треугольника. Симедианой треугольника называется прямая, симметричная медиане относительно внутренней биссектрисы, см. рис. 2.

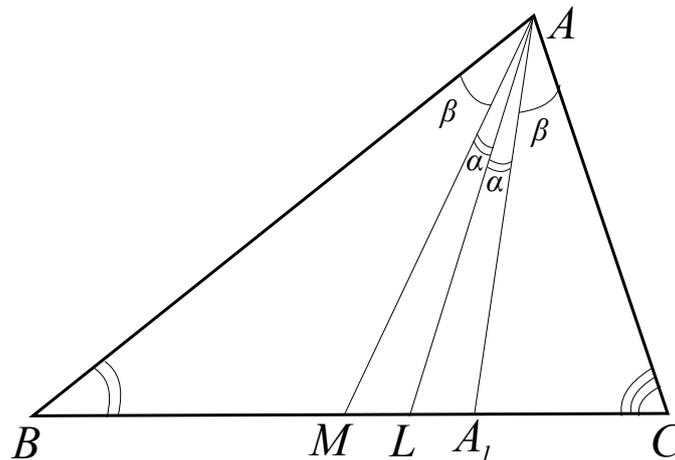


Рис. 2. Симедиана  $AA_1$  строится, как симметричное отражение медианы  $AM$  относительно биссектрисы  $AL$

[Figure 2. The symmedian  $AA_1$  is constructed as a symmetrical reflection of the median  $AM$  with respect to the bisector  $AL$ ]

Все три симедианы пересекаются в одной точке (это будет показано чуть ниже), которую принято называть точкой Лемуана в честь французского геометра Эмиля Лемуана, занимавшимся ее исследованием (1873). На чертежах согласно [2] точку Лемуана принято обозначать буквами  $K$  или  $L$ .

Для вычисления площадей треугольников, образованных этой точкой и приведенных в Таблице, нам потребуются знания о некоторых неочевидных свойствах симедиан.

### Деление симедианой противоположной стороны треугольника

Обозначим биссектрису, медиану и симедиану, проведенные из вершины  $A$  соответственно как  $AL$ ,  $AM$ ,  $AA_1$  (рис. 2), и применим теорему синусов для треугольников  $BAA_1$  и  $AA_1C$ .

Из треугольника  $BAA_1$  следует соотношение:

$$\frac{BA_1}{\sin(A - \beta)} = \frac{AB}{\sin(B + A - \beta)} = \frac{AB}{\sin(C + \beta)}.$$

Последнее равенство справедливо, т.к.

$$\sin(B + A - \beta) = \sin(\pi - C - \beta) = \sin(C + \beta),$$

а из треугольника  $AA_1C$  следует равенство:

$$\frac{A_1C}{\sin \beta} = \frac{AC}{\sin(C + \beta)}.$$

Разделив друг на друга обе полученные формулы, получим:

$$\frac{BA_1}{\sin(A - \beta)} \cdot \frac{\sin \beta}{A_1C} = \frac{AB}{AC}. \quad (1)$$

Чтобы выразить  $\sin \beta$  и  $\sin(A - \beta)$ , обратимся к треугольникам  $MAV$  и  $AMC$ , применив к ним теорему синусов. Для треугольника  $MAV$  будет справедливо равенство

$$\frac{BM}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin(B + \beta)},$$

откуда

$$\sin \beta = \frac{BM \cdot \sin(B + \beta)}{AB} \quad (2)$$

Из треугольника  $AMC$  находим  $\sin(A - \beta)$ . Так как

$$\frac{MC}{\sin(A - \beta)} = \frac{AC}{\sin(B + \beta)},$$

то отсюда

$$\sin(A - \beta) = \frac{MC \cdot \sin(B + \beta)}{AC}. \quad (3)$$

Подставив (3) и (2) в (1) и учитывая, что  $BM = MC = \frac{1}{2}BC$ , найдем:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin(A - \beta)}{\sin \beta} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{MC \cdot \sin(B + \beta)}{AC} \cdot \frac{AB}{BM \cdot \sin(B + \beta)} = \frac{AB^2}{AC^2}.$$

Откуда видно, что точка пересечения симедианы с противоположной стороной треугольника делит эту сторону на отрезки, пропорциональные квадратам прилежащих сторон. Полученный результат позволяет параллельно доказать также и следующие полезные свойства симедиан.

### Пересечение симедиан в одной точке

Поскольку все симедианы пересекаются в одной точке  $L$ , то можно записать, что

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b^2}{a^2}. \quad (4)$$

Применяя теперь к симедианам  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  теорему Чебы, имеем

$$\frac{BA_1}{A_1} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} \cdot \frac{b^2}{a^2} = 1,$$

а это равенство и означает, что симедианы пересекаются в одной точке.

### Вычисление отрезков, на которые симедиана делит противоположную сторону треугольника

Длины отрезков, на которые симедиана делит сторону треугольника, равны:

$$\begin{aligned} A_1C &= \frac{ab^2}{b^2+c^2} \text{ и } A_1B = \frac{ac^2}{b^2+c^2}, \\ AB_1 &= \frac{bc^2}{a^2+c^2} \text{ и } CB_1 = \frac{ba^2}{a^2+c^2}, \\ BC_1 &= \frac{ca^2}{b^2+a^2} \text{ и } AC_1 = \frac{cb^2}{b^2+a^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Покажем, например, что  $A_1C = \frac{ab^2}{b^2+c^2}$ . Поскольку  $A_1B = a - A_1C$ , то подставив это равенство в первое соотношение (4), найдем  $\frac{a - A_1C}{A_1C} = \frac{a}{A_1C} - 1 = \frac{c^2}{b^2}$ , откуда и следуют все свойства (5).

### Вычисление длины симедианы

Обращаясь снова к рисю 2, удобно ввести следующие сокращенные обозначения:

$$AM = m_a, \quad AB = c, \quad AC = b, \quad BC = a.$$

Применяя теорему синусов к треугольнику  $AA_1C$ , найдем откуда

$$AA_1 = \frac{A_1C \cdot \sin C}{\sin \beta}. \quad (6)$$

Выразим теперь через стороны треугольника  $ABC$  все входящие в правую часть формулы (6) сомножители. Очевидно, что

$$\sin C = \frac{2S}{ab}, \quad (7)$$

где  $S$  – площадь треугольника  $ABC$ . Из треугольника  $ABM$  по теореме синусов найдем

$$\frac{BM}{\sin \beta} = \frac{m_a}{\sin B},$$

откуда

$$\sin \beta = \frac{BM \cdot \sin B}{m_a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2S}{ac} \cdot \frac{1}{m_a} = \frac{S}{cm_a}. \quad (8)$$

В соответствии с (5):

$$A_1C = \frac{ab^2}{b^2+c^2}. \quad (9)$$

После подстановки формул (7)-(9) в (6), найдем:

$$AA_1 = \frac{ab^2}{b^2+c^2} \cdot \frac{cm_a}{S} \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2bcm_a}{b^2+c^2}. \quad (10)$$

Аналогично можно показать, что

$$\begin{aligned} BB_1 &= \frac{2acm_b}{a^2+c^2}, \\ CC_1 &= \frac{2abm_c}{a^2+b^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

### Деление симедианы точкой пересечения на отрезки

Для вычисления соотношения между этими отрезками, нам потребуется доказательство одной малоизвестной теоремы ван Обеля:

**Теорема.** Пусть на сторонах треугольника  $AB, BC, AC$  (см. рис.3) взяты соответственно точки  $C_1, A_1, B_1$ . Если прямые  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в точке  $O$ , то имеет место равенство

$$\frac{CO}{C_1O} = \frac{A_1C}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}.$$

**Доказательство.**

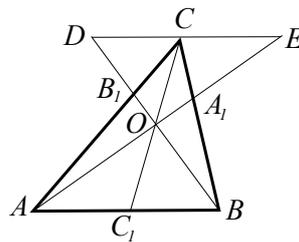


Рис. 3. Чевианы  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в точке  $O$   
[Figure 3. Cevians  $AA_1, BB_1, CC_1$  intersect at point  $O$ ]

Проведем прямую  $DE \parallel AB$ , и рассмотрим пары подобных треугольников:

1.  $AOB$  и  $DOE$ . Отсюда следует, что

$$\frac{CO}{C_1O} = \frac{DE}{AB} = \frac{DC+CE}{AB} = \frac{DC}{AB} + \frac{CE}{AB}. \quad (12)$$

2.  $ECA_1$  и  $AA_1B$ . Это означает, что

$$\frac{EC}{AB} = \frac{CA_1}{A_1B}. \quad (13)$$

3.  $CDB_1$  и  $ABB_1$ . Тогда справедливо соотношение

$$\frac{DC}{AB} = \frac{CB_1}{AB_1}. \quad (14)$$

Подставив формулы (13) и (14) в (12), приходим к доказательству теоремы:

$$\frac{CO}{C_1O} = \frac{A_1C}{A_1B} + \frac{CB_1}{B_1A}.$$

□

### Применение теоремы ван Обеля к биссектрисам и симедианам

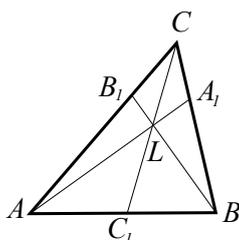


Рис. 4. Точка L на рисунке это точка пересечения биссектрис или симедиан  
[Figure 4. The point L in the figure is the intersection point of the bisectors or symmedians]

1. Найдем, в каком отношении делятся биссектрисы своей точкой пересечения (см. рис.4). Известно, что

$$\frac{A_1C}{A_1B} = \frac{b}{c}, \quad \frac{BC_1}{AB_1} = \frac{a}{c}, \quad \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{a}{b}.$$

Тогда для биссектрис  $CC_1, AA_1, BB_1$  соответственно имеем

$$\frac{CL}{C_1L} = \frac{a+b}{c}, \quad \frac{AL}{A_1L} = \frac{c+b}{a}, \quad \frac{BL}{B_1L} = \frac{a+c}{b}. \quad (15)$$

2. Найдем, в каком отношении делятся симедианы своей точкой пересечения. В соответствии с вышеизложенным можно записать, что

$$\frac{CA_1}{A_1B} = \frac{b^2}{c^2}, \quad \frac{BC_1}{AB_1} = \frac{a^2}{c^2}, \quad \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Тогда для симедиан  $CC_1, AA_1, BB_1$  соответственно получим, что

$$\frac{CL}{C_1L} = \frac{a^2+b^2}{c^2}, \quad \frac{AL}{A_1L} = \frac{c^2+b^2}{a^2}, \quad \frac{BL}{B_1L} = \frac{a^2+c^2}{b^2}. \quad (16)$$

3. Найдем длины отрезков, на которые разбивает каждую симедиану точка Леуана. Для примера вычислим длину CL. Поскольку  $CC_1 = CL + LC_1$ , причем  $C_1L = \frac{c^2}{a^2+b^2} \cdot CL$  (см. формулу (16)), то

$$CC_1 = CL \cdot \left(1 + \frac{c^2}{a^2+b^2}\right) = CL \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2}.$$

или

$$CL = \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot CC_1. \quad (17)$$

Далее, согласно (11)  $CC_1 = \frac{2abm_c}{a^2 + b^2}$ . Если теперь подставить это соотношение в (17), то получим:

$$CL = \frac{2abm_c}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (18)$$

Аналогично получаются и равенства:

$$AL = \frac{2bcm_a}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad BL = \frac{2acm_b}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (19)$$

Вычислим теперь площадь треугольника, вершины которого являются основаниями симедиан (см. рис.5).

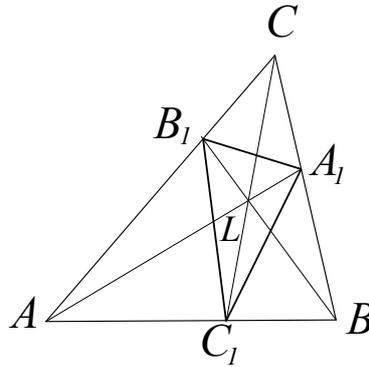


Рис. 5. Вершины треугольника  $A_1B_1C_1$  это основания симедиан  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$   
 [Figure 5. The vertices of the triangle  $A_1B_1C_1$  are the bases of the symmedians  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ]

Для ее вычисления воспользуемся следующим соотношением:

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} - S_{BA_1C_1} - S_{AB_1C_1} - S_{CA_1B_1}, \quad (20)$$

где угловые площади есть

$$\begin{aligned} S_{BA_1C_1} &= \frac{1}{2} BC_1 \cdot BA_1 \cdot \sin B, \\ S_{AB_1C_1} &= \frac{1}{2} AC_1 \cdot AB_1 \cdot \sin A, \\ S_{CA_1B_1} &= \frac{1}{2} CB_1 \cdot CA_1 \cdot \sin C. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставив в (21) формулы (5) и известные соотношения для синусов углов, а именно

$$\sin B = \frac{2S}{ac}, \quad \sin A = \frac{2S}{bc}, \quad \sin C = \frac{2S}{ab},$$

немедленно приходим к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} S_{BA_1C_1} &= \frac{S \cdot a^2c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}, \\ S_{AB_1C_1} &= \frac{S \cdot b^2c^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}, \\ S_{CA_1B_1} &= \frac{S \cdot a^2b^2}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}, \end{aligned} \tag{22}$$

где  $S = S_{ABC}$ .

Если подставить теперь в (20) равенства (22), то получаем:

$$S_{B_1A_1C_1} = S \cdot \left( 1 - \frac{a^2c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)} - \frac{b^2c^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} - \frac{a^2b^2}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} \right).$$

После несложных преобразований, связанных с приведением к общему знаменателю выражения, стоящего в круглых скобках, мы приходим к такому компактному ответу:

$$S_{B_1A_1C_1} = \frac{2S}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}. \tag{23}$$

В продолжении решения задач, связанных с точкой Лемуана, приведем подробное решение задачи о вычислении площади подерного треугольника, показанного на рис.6.

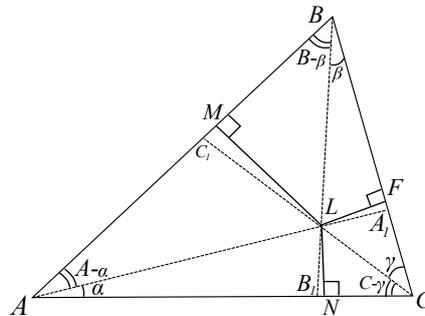


Рис. 6. Из точки пересечения симедиан  $AA_1, BB_1, CC_1$  опущены перпендикуляры на стороны треугольника  $LM, LN, LF$ . Углы  $\alpha, \beta, \gamma$  между симедианами  $AA_1, BB_1, CC_1$  и прилежащими более короткими сторонами треугольника равны углам, образованными медианами  $m_a, m_b, m_c$  с более длинными сторонами

[Figure 6. From the point of intersection of the symmedians  $AA_1, BB_1, CC_1$  perpendiculars are dropped to the sides of the triangle  $LM, LN, LF$ . Angles  $\alpha, \beta, \gamma$  between symmedians  $AA_1, BB_1, CC_1$  and adjacent more the short sides of the triangle are equal to the angles formed by the medians  $m_a, m_b, m_c$  with longer sides]

Для этого площадь подерного треугольника удобно представить в виде суммы:

$$S = S_{LFM} + S_{LFN} + S_{LMN}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} S_{LFM} &= \frac{1}{2} \cdot LF \cdot LM \cdot \sin B, \\ S_{LMN} &= \frac{1}{2} \cdot LN \cdot LM \cdot \sin A, \\ S_{LFN} &= \frac{1}{2} \cdot LN \cdot LF \cdot \sin C, \end{aligned} \quad (25)$$

и введены сокращенные обозначения

$$B = \angle ABC, \quad A = \angle BAC, \quad C = \angle ACB.$$

Что касается отрезков LF, LM, LN, LM, LN, LF, то их мы можем найти из следующих шести прямоугольных треугольников:

$$\begin{aligned} \Delta LFC: \quad LF &= LC \cdot \sin \gamma, \\ \Delta LNC: \quad LN &= LC \cdot \sin (C - \gamma), \\ \Delta ALN: \quad LN &= AL \cdot \sin \alpha, \\ \Delta ALM: \quad LM &= AL \cdot \sin (A - \alpha), \\ \Delta BLM: \quad LM &= BL \cdot \sin (B - \beta), \\ \Delta BLF: \quad LF &= BL \cdot \sin \beta. \end{aligned} \quad (26)$$

Если теперь в первую формулу (25) подставить последние два равенства из (26), во вторую формулу (25) – средние два равенства из (26) и в третью формулу (25) – первые два выражения из (26), то в итоге приходим к таким выражениям для площадей:

$$\begin{aligned} S_{LFM} &= \frac{1}{2} \cdot BL^2 \cdot \sin (B - \beta) \cdot \sin \gamma \cdot \sin B, \\ S_{LMN} &= \frac{1}{2} \cdot AL^2 \cdot \sin (A - \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot \sin A, \\ S_{LFN} &= \frac{1}{2} \cdot CL^2 \cdot \sin (C - \gamma) \cdot \sin \gamma \cdot \sin C. \end{aligned} \quad (27)$$

В соответствии с формулами (18) и (19)) мы имеем право записать, что

$$CL^2 = \left( \frac{2abm_c}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2, \quad AL^2 = \left( \frac{2bcm_a}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2, \quad BL^2 = \left( \frac{2acm_b}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2. \quad (28)$$

Таким образом, следующая задача, которая требует решения, заключается в вычислении произведений синусов, стоящих в правых частях формул (27). Обращаем внимание, что углы между симедианами  $AA_1, BB_1, CC_1$  и прилежащими к ним

более короткими сторонами треугольника должны быть равны углам, образованным медианами  $m_a, m_b, m_c$  с более длинными сторонами (см. рис. 7):

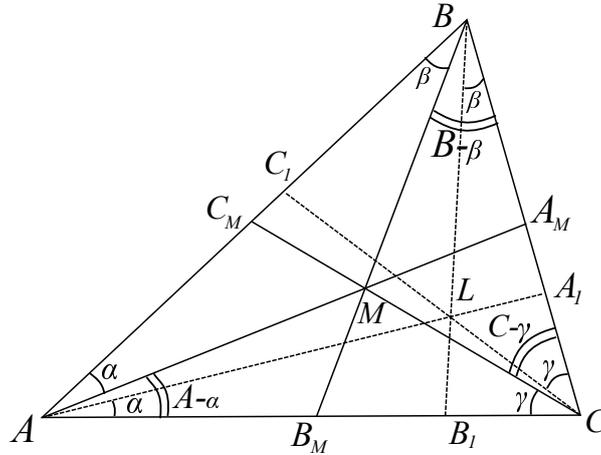


Рис. 7. Медианы треугольника  $AA_M = m_a, BB_M = m_b, CC_M = m_c$ , пересекаются в центре тяжести  $M$ , симедианы  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в точке Лемуана  $L$ . Углы, образованные медианами и симедианами с ближайшими сторонами треугольниками равны по определению

[Figure 7. Triangle medians  $AA_M = m_a, BB_M = m_b, CC_M = m_c$ , intersect at centroid  $M$ , symmedians  $AA_1, BB_1, CC_1$  intersect at the Lemoine point  $L$ . The angles formed by medians and symmedians with triangles nearest sides are equal by definition]

Поскольку медиана делит площадь треугольника пополам, то, обозначив через  $S$  площадь треугольника  $ABC$ , стороны треугольника через  $AB = c, BC = a, AC = b$ , находим:

$$S_{ABV_{BM}} = \frac{S}{2} = \frac{1}{2}cm_b \sin \beta,$$

откуда

$$\sin \beta = \frac{S}{cm_b}.$$

И аналогично

$$S_{ACC_M} = \frac{S}{2} = \frac{1}{2}bm_c \sin \gamma,$$

$$\sin \gamma = \frac{S}{bm_c},$$

$$S_{BAA_M} = \frac{S}{2} = \frac{1}{2}cm_a \sin \alpha,$$

$$\sin \alpha = \frac{S}{cm_a}.$$

Синусы углов  $A - \alpha, B - \beta, C - \gamma$  также находятся из соответствующих треугольников. Действительно,

$$S_{CBV_{BM}} = \frac{S}{2} = \frac{1}{2}a \cdot m_b \sin (B - \beta),$$

откуда

$$\sin(B - \beta) = \frac{S}{am_b}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} S_{BCC_M} &= \frac{S}{2} = \frac{1}{2}a \cdot m_c \sin(C - \gamma), \\ \sin(C - \gamma) &= \frac{S}{am_c}, \\ S_{ACA_M} &= \frac{S}{2} = \frac{1}{2}b \cdot m_a \sin(A - \alpha), \\ \sin(A - \alpha) &= \frac{S}{bm_a}. \end{aligned}$$

И, следовательно, произведения синусов, стоящих в правых частях формул (26) будут

$$\begin{aligned} \sin \beta \cdot \sin(B - \beta) \cdot \sin B &= \frac{S}{cm_b} \cdot \frac{S}{am_b} \cdot \frac{2S}{ac} = \frac{2S^3}{a^2c^2m_b^2}, \\ \sin \alpha \cdot \sin(A - \alpha) \cdot \sin A &= \frac{S}{cm_a} \cdot \frac{S}{bm_a} \cdot \frac{2S}{bc} = \frac{2S^3}{b^2c^2m_a^2}, \\ \sin \gamma \cdot \sin(C - \gamma) \cdot \sin C &= \frac{S}{bm_c} \cdot \frac{S}{am_c} \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2S^3}{a^2b^2m_c^2}. \end{aligned}$$

Подстановка полученных произведений в формулу (27) с учетом формул (28) позволяет нам представить их в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_{LFM} &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2acm_b}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2 \cdot \frac{2S^3}{a^2c^2m_b^2} = \frac{4S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}, \\ S_{LMN} &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2bcm_a}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2 \cdot \frac{2S^3}{b^2c^2m_a^2} = \frac{4S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}, \\ S_{LFN} &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2abm_c}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2 \cdot \frac{2S^3}{a^2b^2m_c^2} = \frac{4S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Геометрический смысл формул (29) позволяет утверждать, что точка Лемуана треугольника ABC является центром тяжести подерного треугольника относительно этой точки.

Поскольку площадь подерного треугольника MNF представляет собой сумму тождественно равных площадей (29), то ее можно записать в виде

$$S_{MNF} = \frac{12S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}. \quad (30)$$

Учитывая, что

$$S = \frac{abc}{4R},$$

где  $R$  – радиус описанной окружности, полученный результат можно преобразовать следующему симметричному виду:

$$S_{MNF} = 12S \frac{S^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{12S}{16R^2} \cdot \left( \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2 = \frac{3S}{4R^2} \cdot \left( \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \right)^2. \quad (31)$$

Рассмотрим теперь треугольник  $A_2B_2C_2$  (см. рис.8), вершинами которого являются точки пересечения симедиан с описанной окружностью.

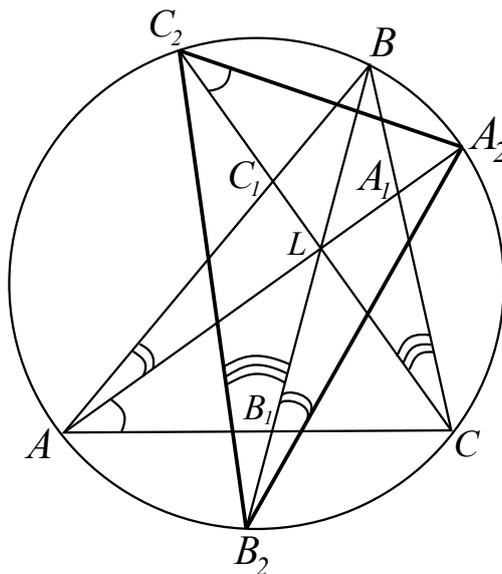


Рис. 8. Симедианы  $AA_1, BB_1, CC_1$  продолжены до пересечения с описанной вокруг треугольника  $ABC$  окружностью. Точки пересечения  $A_2, B_2, C_2$  являются вершинами треугольника  $A_2B_2C_2$

[Figure 8. The symmedians  $AA_1, BB_1, CC_1$  are extended up to the intersection with the circumcircle of the triangle  $ABC$ . The intersection points  $A_2, B_2, C_2$  are the vertices of the triangle  $A_2B_2C_2$ ]

Треугольники  $A_2B_2C_2$  и  $ABC$  вписаны в общую окружность, радиус которой можно записать в виде

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a_2b_2c_2}{4S_2}.$$

откуда

$$S_2 = \frac{a_2}{a} \cdot \frac{b_2}{b} \cdot \frac{c_2}{c} \cdot S, \quad (32)$$

где  $AB = c, BC = a, AC = b, A_2B_2 = c_2, B_2C_2 = a_2, A_2C_2 = b_2, S_2$  – площадь треугольника  $A_2B_2C_2, S$  площадь треугольника  $ABC$ . В качестве примера найдем сторону  $B_2C_2$ .

Из подобия треугольников  $LBC$  и  $LB_2C_2$  (по трем углам) следует, что

$$\frac{B_2C_2}{BC} = \frac{LC_2}{LB},$$

откуда

$$B_2C_2 = \frac{BC}{LB} \cdot LC_2. \quad (33)$$

Согласно формуле (19):

$$BL = \frac{2acm_b}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Длину отрезка  $LC_2$  можно вычислить как сумму

$$LC_2 = LC_1 + C_1C_2. \quad (34)$$

Из рисунка 8 ясно, что  $LC_1 = CC_1 - CL$ . Поскольку длина симедианы нам известна (см. формулу (11)), то согласно (18)

$$CL = \frac{2abm_c}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Поэтому

$$LC_1 = CC_1 - CL = \frac{2abm_c}{a^2 + b^2} - \frac{2abm_c}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2ab^2m_c}{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}. \quad (35)$$

Чтобы найти отрезок  $C_1C_2$ , воспользуемся свойством постоянства произведения отрезков пересекающихся хорд:

$$AC_1 \cdot BC_1 = CC_1 \cdot C_1C_2.$$

Откуда

$$C_1C_2 = \frac{AC_1 \cdot BC_1}{CC_1}. \quad (36)$$

Поскольку длины отрезков, на которые симедиана разбивает сторону треугольника нам известны (см. формулы (5) и (10)), то из (36) следует

$$C_1C_2 = \frac{abc^2}{2m_c(a^2 + b^2)}, \quad (37)$$

где учтено, что

$$CA_1 = \frac{ab^2}{b^2 + c^2}, \quad BC_1 = \frac{ca^2}{b^2 + a^2}.$$

Подставляя теперь результаты (35) и (37) в (34), найдем:

$$\begin{aligned} LC_2 = LC_1 + C_1C_2 &= \frac{2ab^2m_c}{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)} + \frac{abc^2}{2m_c(a^2 + b^2)} = \\ &= \frac{abc^2(4m_c^2 + a^2 + b^2 + c^2)}{2m_c(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{3abc^2}{2m_c(a^2 + b^2 + c^2)}, \end{aligned}$$

где в процессе преобразования была использована формула для длины медианы

$$4m_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2.$$

Теперь все сомножители в правой части формулы (33) нам известны:

$$B_2C_2 = \frac{BC}{LB} \cdot LC_2 = \frac{a \cdot 3abc^2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}{2acm_b \cdot 2m_c (a^2 + b^2 + c^2)} = \frac{3ab}{4m_b m_c}. \quad (38)$$

Совершенно аналогично из подобия треугольников  $ALC$  и  $A_2LC_2$  найдем, что

$$A_2C_2 = \frac{3ab}{4m_a m_c}, \quad (39)$$

а из подобия треугольников  $ALB$  и  $A_2LB_2$ :

$$A_2B_2 = \frac{3ab}{4m_a m_b}. \quad (40)$$

Подставляя формулы (38)-(40) в основную формулу (29), приходим к искомому выражению для площади треугольника  $A_2B_2C_2$ :

$$S_{A_2B_2C_2} = S \cdot \frac{3abc}{4m_b m_c} \cdot \frac{3abc}{4m_a m_c} \cdot \frac{3abc}{4m_a m_b} = \frac{27}{64} S \left( \frac{abc}{m_a m_b m_c} \right)^2. \quad (41)$$

### Исследование треугольников, порожденных точкой Брокара

Внутренняя точка треугольника  $P$  ( $Q$ ) называется первой (второй) точкой Брокара (в честь французского геометра Анри Брокара, первым опубликовавшим в 1875 году процесс ее построения), если  $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA = \varphi_1$  ( $\angle QAB = \angle QCA = \angle QBC = \varphi_2$ ) (см. рис.9).

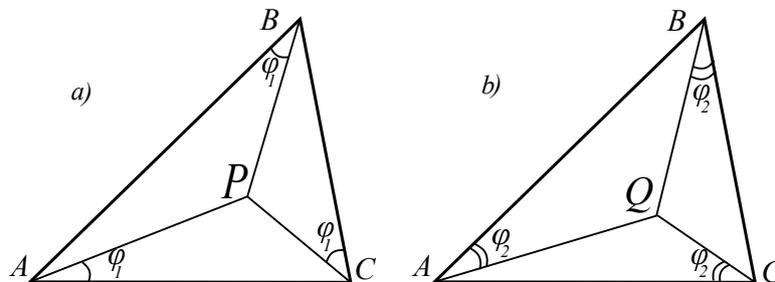


Рис. 9. На рисунке показаны первая (рис.а) и вторая (рис.б) точки Брокара [Figure 9. The figure shows the first (fig.a) and second (fig.b) Brocard points]

Известно [8], что оба угла Брокара равны, т.е.  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ , при этом угол  $\varphi$  определяется для данного треугольника однозначно и для него справедливо

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \varphi &= \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma, \\ \sin^3 \varphi &= \sin(\alpha - \varphi) \sin(\beta - \varphi) \sin(\gamma - \varphi), \end{aligned} \quad (42)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы треугольника.

Заметим к слову, что в настоящей работе мы приведем исследование не только некоторых свойств треугольников, порожденных первой точкой Брокара (для второй результаты вполне аналогичны), но и получим общее выражение для синуса

угла Брокара через стороны треугольника. При этом на чертежах точку Брокара ( $X(39)$  по нумерации ЕТС [2]) будем обозначать буквой  $P$ . При исследовании свойств треугольников  $A_1B_1C_1$ ,  $A_2B_2C_2$  и  $MNF$  (см. рис.1) нам весьма важно знать и способ построения этой точки, который подробно изложен в [8], а именно точка Брокара находится на пересечении отрезков, соединяющих вершины треугольника с соответствующими свободными вершинами треугольников, подобных данному треугольнику и построенных на его сторонах (см. рис. 10).

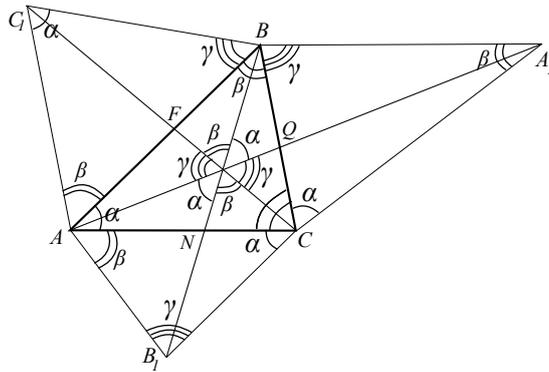


Рис. 10. Треугольники  $ACB_1$ ,  $A_1BC$ ,  $ABC_1$  подобны треугольнику  $ABC$ . Прямые  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , пересекаются в точке Брокара

[Figure 10. Triangles  $ACB_1$ ,  $A_1BC$ ,  $ABC_1$  are similar to triangle  $ABC$ . The lines  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , intersect at the Brocard point]

При внимательном анализе рис. 10 становится понятным (см. [8]), что, во-первых, точка Брокара является точкой пересечения трех окружностей, каждая из которых описана вокруг одного из треугольников  $ACB_1$ ,  $A_1BC$ ,  $ABC_1$ , а, во-вторых, мы имеем параллельность следующих отрезков  $BA_1 \parallel AC$ ,  $CB_1 \parallel AB$  и  $AC_1 \parallel BC$  (см. рис. 11).

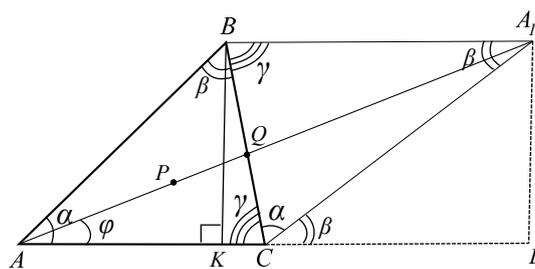


Рис. 11.  $P$  – точка Брокара,  $\varphi$  – угол Брокара  
[Figure 11.  $P$  – Brocard point,  $\varphi$  – Brocard angle ]

Именно параллельность отрезков будет играть важную роль при выяснении некоторых свойств чевиан, проходящих через точку Брокара.

### Деление противоположной стороны

В качестве примера подробно разберем этот вопрос для стороны  $BC$ , которую чевиана  $AP$  пересекает в точке  $Q$ . Согласно теореме синусов для треугольника

В  $\triangle A_1C$  имеем:

$$BA_1 = \frac{a \sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Воспользовавшись теперь подобием треугольников  $\triangle BA_1Q$  и  $\triangle ACQ$  найдем, что

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{BA_1}{AC},$$

или

$$\frac{BC - QC}{QC} = \frac{a \sin \alpha}{\sin \beta \cdot b},$$

откуда

$$\begin{aligned} QC &= \frac{ab \sin \alpha}{a \sin \alpha + b \sin \beta}, \\ QB &= a - QC = a - \frac{ab \sin \alpha}{a \sin \alpha + b \sin \beta} = \frac{a^2 \sin \alpha}{a \sin \alpha + b \sin \beta}. \end{aligned} \tag{43}$$

Подставляя сюда формулы

$$\sin \alpha = \frac{2S}{bc}, \sin \beta = \frac{2S}{ac}, \sin \gamma = \frac{2S}{ab},$$

после простых преобразований получим:

$$QC = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}, \quad QB = \frac{a^3}{a^2 + b^2}, \quad \frac{QB}{QC} = \frac{a^2}{b^2}. \tag{44}$$

Совершенно аналогично, рассматривая пары подобных треугольников  $\triangle B_1NC \sim \triangle ANB$  и  $\triangle C_1AF \sim \triangle BCF$  (см. рис.10), приходим к аналогичным выводам:

$$\begin{aligned} AN &= \frac{bc^2}{a^2 + c^2}, \quad NC = \frac{b^3}{a^2 + c^2}, \quad \frac{AN}{NC} = \frac{c^2}{b^2}, \\ BF &= \frac{ca^2}{a^2 + c^2}, \quad AF = \frac{c^3}{a^2 + c^2}, \quad \frac{BF}{AF} = \frac{a^2}{c^2}. \end{aligned} \tag{45}$$

### Деление чевиан $AQ, BN, CF$ точкой Брокара

Исследуем этот вопрос воспользовавшись теоремой ван Обеля.

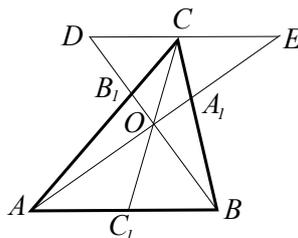


Рис. 12. Чевианы  $AQ, BN, CF$  пересекаются в точке Брокара  
 [Figure 12. The Cevians  $AQ, BN, CF$  intersect at the Brocard point]

Действительно, согласно теореме ван Обеля можно записать следующие три равенства:

$$\frac{BP}{PN} = \frac{BF}{FA} + \frac{BQ}{QC}, \quad \frac{CP}{PF} = \frac{CQ}{QB} + \frac{CN}{NA}, \quad \frac{AP}{PQ} = \frac{AF}{FB} + \frac{AN}{NC}.$$

Подставив сюда соотношения (44) и (45), после простых преобразований, получим:

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PN} &= a^2 \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \right), \\ \frac{CP}{PF} &= b^2 \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \right), \\ \frac{AP}{PQ} &= c^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Теперь мы можем вычислить площадь треугольника, вершинами которого служат основания чевиан, проходящих через точку Брокара. В соответствии с таблицей, на рис. 13 эти точки обозначены как  $A_1, B_1, C_1$ :

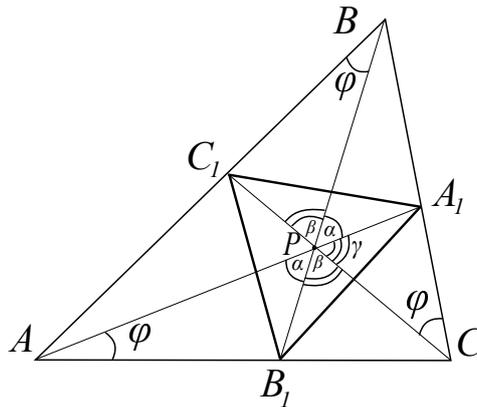


Рис. 13. Треугольник  $A_1B_1C_1$  образован основаниями чевиан, проходящих через точку Брокара

[Figure 13. The triangle  $A_1B_1C_1$  is formed by the bases of the cevians passing through the Brocard point]

Из рис. 13 следует, что

$$S_{A_1B_1C_1} = S - S_{A_1B_1C} - S_{A_1BC_1} - S_{AB_1C_1}, \quad (47)$$

причем с учетом (44) и (45):

$$\begin{aligned} S_{A_1B_1C} &= \frac{1}{2} CA_1 \cdot CB_1 \sin \gamma = \frac{S \cdot b^4}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)}, \\ S_{AB_1C_1} &= \frac{1}{2} AB_1 \cdot AC_1 \sin \alpha = \frac{S \cdot c^4}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)}, \\ S_{A_1BC_1} &= \frac{1}{2} BA_1 \cdot BC_1 \sin \beta = \frac{S \cdot a^4}{(a^2 + c^2)(b^2 + a^2)}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные равенства в (47) и проводя некоторые алгебраические преобразования, приходим к искомому результату:

$$S_{A_1B_1C_1} = S \cdot \frac{2a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)}.$$

Приведем теперь вычисление площади подерного треугольника относительно точки Брокара (рис. 14):

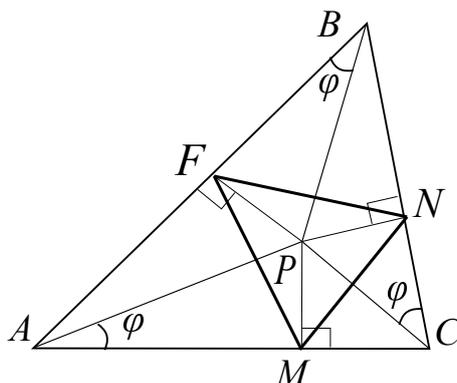


Рис. 14. Треугольник MNF – подерный относительно точки Брокара  
 [Figure 14. Triangle MNF – subdermal with respect to the Brocard point]

Из рис. 14 видно, что

$$S_{MNF} = S_{FPN} + S_{MPN} + S_{MPF}, \tag{48}$$

где

$$\begin{aligned} S_{FPN} &= \frac{1}{2}PN \cdot PM \cdot \sin \gamma, \\ S_{MPN} &= \frac{1}{2}PN \cdot PF \cdot \sin \beta, \\ S_{MPF} &= \frac{1}{2}FP \cdot PM \cdot \sin \alpha. \end{aligned} \tag{49}$$

Чтобы найти расстояния от точки Брокара до сторон треугольника, т.е. отрезки PN, PM, PF, выразим для начала  $\sin \varphi$  через стороны  $AB = c, AC = b, BC = a$ . Из подобия треугольников  $ABB_1$  и  $APB_1$  (см. рис. 13) следует, что

$$\frac{AB_1}{PB_1} = \frac{BB_1}{AB_1}.$$

Откуда

$$AB_1^2 = PB_1 \cdot BB_1. \tag{50}$$

Но поскольку

$$BB_1 = PB_1 + PB,$$

то согласно формуле (46)

$$BP = k \cdot PB_1,$$

где коэффициент

$$k = a^2 \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Поэтому

$$BB_1 = PB_1 \cdot (1 + k).$$

И из (50) получаем

$$AB_1 = PB_1 \cdot \sqrt{1 + k}. \quad (51)$$

Интересующий нас  $\sin \varphi$  найдем из треугольника  $APB_1$ . Согласно теореме синусов имеем:

$$\sin \varphi = \frac{PB_1 \cdot \sin \alpha}{AB_1}.$$

Подставив сюда выражение (51), и учитывая равенства  $k = a^2 \left( \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \right)$  и  $\sin \alpha = \frac{2S}{bc}$ , приходим к результату:

$$\sin \varphi = \frac{2S}{\sqrt{b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2}}. \quad (52)$$

И, таким образом, мы можем теперь приступить к вычислению расстояний от точки Брокера до сторон треугольника, т.е. найти отрезки  $PN, PM, PF$ . В качестве примера остановимся на вычислении  $PF$ . С учетом формулы (51) и формулы (45) можно записать, что

$$BP = \frac{k}{\sqrt{1+k}} \cdot AB_1 = \frac{a^2c}{\sqrt{b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2}}.$$

В свою очередь, из прямоугольного треугольника  $FPB$  следует, что

$$FP = BP \cdot \sin \varphi = \frac{2Sa^2c}{b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2}. \quad (53)$$

Аналогично, используя подобие треугольников  $BPC_1 \sim BVC_1$ , из прямоугольного треугольника  $PNC$  следует, что

$$NP = \frac{2Sb^2a}{b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2}. \quad (54)$$

Точно также для треугольников  $ACA_1 \sim CPA_1$  и  $PAM$  получим

$$MP = \frac{2Sc^2b}{b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2}. \quad (55)$$

Таким образом, формулы (49) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned}
 S_{FPN} &= \frac{1}{2}PN \cdot PM \cdot \sin \gamma = \frac{8S^3b^2c^2}{(b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2)^2}, \\
 S_{MPN} &= \frac{1}{2}PN \cdot PF \cdot \sin \beta = \frac{8S^3b^2a^2}{(b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2)^2}, \\
 S_{MPF} &= \frac{1}{2}FP \cdot PM \cdot \sin \alpha = \frac{8S^3a^2c^2}{(b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2)^2}.
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

Складывая все три равенства (56) и, учитывая формулу  $S = \frac{abc}{4R}$ , приходим к доказательству еще одной формулы из Таблицы 1:

$$\begin{aligned}
 S_{MNF} &= 4S^3 \frac{b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2}{(b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2)^2} = 4S \cdot \frac{a^2b^2c^2}{16R^2} \cdot \frac{1}{b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2} = \\
 &= \frac{S}{4R^2} \cdot \frac{1}{\frac{b^2c^2 + a^2b^2 + a^2c^2}{a^2b^2c^2}} = \frac{S}{4R^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}.
 \end{aligned}$$

**Простое вычисление площади треугольника  $A_2B_2C_2$**

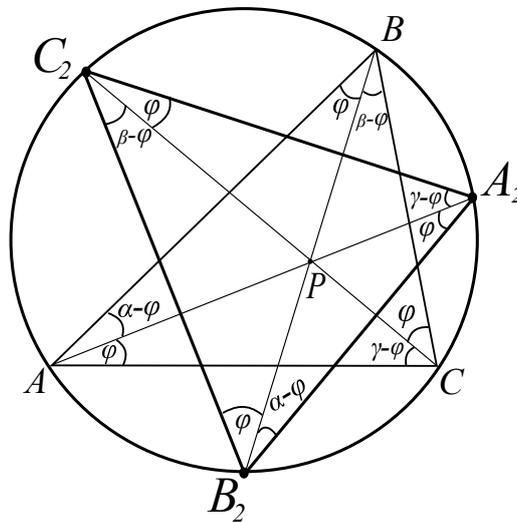


Рис. 15. На рисунке показаны равные между собой вписанные углы  
 [Figure 15. The figure shows equal inscribed angles]

Согласно теореме о вписанном угле точка P является первой точкой Брокара для треугольника ABC и второй точкой Брокара для треугольника  $A_2B_2C_2$  (см. рис. 15). Из этого будут следовать очевидные соотношения для соответствующих сторон треугольников ABC и  $A_2B_2C_2$ :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a_2}{\sin \gamma} = 2R, \quad \frac{b}{\sin \beta} = \frac{b_2}{\sin \alpha} = 2R, \quad \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{c_2}{\sin \beta} = 2R.$$

Это означает, что

$$\frac{a_2}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}, \quad \frac{b_2}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \frac{c_2}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Откуда имеем:

$$\frac{a_2}{a} \cdot \frac{b_2}{b} \cdot \frac{c_2}{c} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 1. \quad (57)$$

И точно также, как и при решении аналогичной задачи для точки Лемуана можно записать, что

$$S_2 = \frac{a_2}{a} \cdot \frac{b_2}{b} \cdot \frac{c_2}{c} \cdot S.$$

Откуда после применения соотношения (57) следует искомое утверждение:

$$S = S_2.$$

## Заключение

В заключение работы обратим еще раз внимание на основные моменты проведенного исследования.

1. Проведено исследование некоторых геометрических свойств треугольников, порожденных точками Лемуана и первой точкой Брокара;
2. Продемонстрирована «работа» теоремы ван Обеля для некоторых примеров с чевианами треугольника.
3. Подробно изучены свойства симедиан и чевиан, проходящих через первую точку Брокара.

**Конкурирующие интересы.** Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

**Авторский вклад и ответственность.** Все авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательная форма рукописи была одобрена всеми авторами.

## Список литературы

1. Федоров В. П., Богданова С. Б., Гладков С. О. О некоторых неизвестных результатах, связанных с нетривиальными свойствами обычных треугольников. Ч. I., *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 37, № 4, С. 216–234.
2. <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html>.
3. Понарин Я. П. *Элементарная геометрия: Планиметрия, преобразования плоскости*, Т. 1. М.: МЦНМО, 2004. 312 с.
4. Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии*, В 2 ч.. М.: Наука, 1991. 320 с.
5. Ефремов Д. Д. *Новая геометрия треугольника*. М.: URSS, 2015. 352 с.
6. Шарыгин И. Ф. *Решение задач*, Учеб. пособие для 10 кл. М.: Просвещение, 1994. 252 с.

7. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. *Факультативный курс по математике. Решение задач*, Учебное Пособие для 11 кл. М.: Просвещение, 1991. 384 с.
8. Прасолов В. В. *Точки Брокера и изогональное сопряжение*. М.: МЦМНО, 2000. 24 с.



*Федоров Борис Павлович (1931-2003)* — преподаватель кафедры математики (1967 по 2000) Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуева, Россия.



*Богданова Софья Борисовна*✉ — кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры Прикладные программные средства и математические методы, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия,  0000-0001-8503-1794.



*Гладков Сергей Октябрьевич*✉ — доктор физико-математических наук, профессор, доцент кафедры Прикладные программные средства и математические методы, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия,  ORCID 0000-0002-2755-9133.

---

EDUCATIONAL-METHODOLOGICAL MATERIALS

MSC 97G40

Research Article

## On some unknown results related to the nontrivial properties of ordinary triangles. Part 2

**B. P. Fedorov**, S. B. Bogdanova, S. O. Gladkov

Moscow Aviation Institute, 125993, Moscow, Volokolamskoe sh., 4, Russia

E-mail: sonjaf@list.ru

It was given the detailed solution of a number of original problems formulated by B.P. Fedorov a spell ago. These problems flow organically from the study of the nontrivial properties of Euclidean triangles, including its poorly understood properties, provided with Lemoine point and Brocard point.

*Key words: triangle properties, division of the sections, Lemoine point, Brocard point, Van Obel theorem.*

 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-197-221

Original article submitted: 11.06.2022

Revision submitted: 15.09.2022

**For citation.** **Fedorov B. P.**, Bogdanova S. B., Gladkov S. O. On some unknown results related to the nontrivial properties of ordinary triangles. Part 2. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **39**: 2, 197-221.  DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-197-221

**Competing interests.** The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

**Contribution and Responsibility.** All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

*The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)*

© **Fedorov B. P.**, Bogdanova S. B., Gladkov S. O., 2022

## References

- [1] **Fedorov B. P.**, Bogdanova S. B., Gladkov S. O. On some unknown results related to the nontrivial properties of ordinary triangles. Part 1. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, vol.37, no. 4, 216-234 (In Russian)
- [2] <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html> (In Russian)
- [3] Ponarin Ya. P. *Elementarnaya geometriya [Elementary geometry]*, vol.1: *Planimetriya, preobrazovaniya ploskosti [Planimetry, plane transformations]*, Москва, MTsNMO, 2004, p. 312 (In Russian)

**Funding.** The work was done without financial support

- [4] Prasolov V. V. Zadachi po planimetrii [Problems in planimetry], Moscow, Nauka, 1991, p. 320 (In Russian)
- [5] Yefremov D. D. Novaya geometriya treugol'nika [New triangle geometry], Moscow, URSS, 2015, p. 352 (In Russian)
- [6] Sharygin I. F. Resheniye zadach.: Ucheb. posobiye dlya 10 klassa [Problem solving.: Textbook for 10 classes], Moscow, Prosveshcheniye, 1994, p. 252 (In Russian)
- [7] Sharygin I. F., Golubev V. I. Fakul'tativnyy kurs po matematike. Resheniye zadach. Uchebnoye Posobiye dlya 11 kl [Optional course in mathematics. Problem Solving: Textbook for Grades 11 classes], Moscow, Prosveshcheniye, 1991, p. 384 (In Russian)
- [8] Прасолов В. В. Точки Брокара и изогональное сопряжение [Brocard points and isogonal conjugation], Moscow, MTsNMO, 2000, p. 24 (In Russian)



*Fedorov Boris Pavlovich (1931-2003)* – Lecturer at the Department of Mathematics (1967 to 2000) at the State Humanitarian and Technological University, Orekhovo-Zueva, Russia.



*Bogdanova Sofya Borisovna* ✉ – Ph.D. (Phys. & Math.), Associate Professor, Associate Professor of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia,  0000-0001-8503-1794.



*Gladkov Sergey Oktyabrinovich* ✉ – D.Sc. (Phys. & Math.), Professor, Associate Professor of the Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia,  ORCID 0000-0002-2755-9133.