Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 39. №2. C. 62-77. ISSN 2079-6641

УДК 517.97 Научная статья

Об одной задаче управления для уравнения субдиффузии с дробным производным в смысле Капуто

Ю. Э. Файзиев

Национальный университет Узбекистана Узбекистана, 100174,
г. Ташкент, ВУЗ городок, Республика Узбекистан
E-mail: fayziev.yusuf@mail.ru

В прямоугольнике Ω для дифференциального уравнения дробного порядка в смысле Капуто исследуется задача управления с помощью функции источника. Другими словами, задача заключается в нахолждении функции источника $f(x,y)$ таким образом, чтобы в результате в момент времени $t=\theta$ температура изучаемого обьекта должна быть распределена как заданная функция $\Psi(x,y)$. Найдены достаточные условия на функцию $\Psi(x,y)$, которые обеспечивают и существование и единственность решения задачи управления.

Ключевые слова: производные дробного порядка в смысле Капуто, уравнения теплопроводности, задача управления.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-62-77

Поступила в редакцию: 20.06.2022 В окончательном варианте: 12.08.2022

Для цитирования. Файзиев Ю. Э. Об одной задаче управления для уравнения субдиффузии с дробным производным в смысле Капуто // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 39. № 2. C. 62-77. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-62-77

Введение

Многие физические, биологические и инженерные задачи моделируются уравнениями дробного порядка. Настоящая работа посвящена изучению разрешимости первой краевой задачи и задачи управления функцией источника для дифференциальных уравнений дробного порядка. Методы решения дифференциальных уравнений дробного порядка, удовлетворяющих краевым и начальным условиям, можно найти в книгах [1], [2].

Впервые подробное изложение задач управления описываемых уравнениями с частными производными, было дано в книге [3].

Финансирование. Здесь указывается финансовая поддержка

В последние годы возрастает интерес к изучению задач управления процессами, описываемых с различными дифференциальными уравнениями. В работах В. А. Ильина и Е. И. Моисеева [4] - [6] исследованы вопросы граничного управления различными системами, описываемыми волновым уравнением.

Из результатов, относящихся к проблеме управления процессами, описываемыми уравнениями параболического типа, и, в частности, процессом теплообмена, можно отметить работы [7] - [8]. В случае целого порядка, задача управления процессом теплообмена изучена в работах академика Ш.О. Алимова (см. [9] - [13]) и в неоднородном случае - в работах [14] - [16].

Основные определения и формулировка проблемы

Прежде чем привести основные результаты, введем некоторые определения.

Пусть m - положительное целое число и $m-1 < \alpha \le m$. Дробная производная Капуто порядка α определяется следующим образом (см.[2]):

$$D^{\alpha}f(t) := I^{m-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}f(t),\ t>0, \tag{1}$$

где интеграл

$$I^{\beta}f(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{\beta-1}f(\tau)d\tau,\ t>0,\ \beta>0, \tag{2}$$

называется дробным интегралом Римана - Лиувилля порядка β и $I^0 f(t) := f(t)$.

Пусть $\Omega = (0;l_1)\times(0;l_2)$ и пусть $0<\alpha\le 1$.

Рассмотрим следующее неоднородное уравнение дробного порядка α

$$D_t^{\alpha}u = \Delta u + f(x,y,t), \quad 0<x<l_1, \quad 0<y<l_2, \quad 0<t<T, \tag{3}$$

с граничными условиями

$$u(0,y,t)=0, u(l_1,y,t)=0, u(x,0,t)=\mu(t), u(x,l_2,t)=0, \quad 0\le t\le T, \tag{4}$$

и начальным условием

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y), \quad 0\le x\le l_1, \quad 0\le y\le l_2, \tag{5}$$

где $\varphi(x,y)$ – заданная функция, $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}$ – оператор Лапласа, $\mu(t)$ – ограниченная, монотонная функция, $\mu'(t)\le M_1$ и $\mu(0)=0$.

Отметим, что условия (4) означают следующее: в стороне $y=0$ граничное условие задано функцией $\mu(t)$, а на остальных сторонах значение функции равно нулю.

Определение. Функцию $u(x,y,t)$ будем называть решением задачи (3) - (5), если ее производные по x и y до второго порядка и $D_t^{\alpha}u$ непрерывны в $\bar{\Omega}\times(0,T]$ и удовлетворяют уравнению (3) в $\Omega\times(0,T]$ и условиям (4), (5).

Сначала будемь решать задачу (3) - (5) для более общей правой части $f(x,y,t)$ и произвольной функции $\mu(t)$. Затем, при исследовании задачи управления, будем предпологать, что правая часть имеет вид: $f(x,y,t)=f(x,y)$, т.е. f не зависить от t и предположим, что $\mu(t)=0$.

Используя метод Фурье доказывается существование решения задачи (3) - (5). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $f(x,y,t) \in C^{2,2,1}_{x,y,t}(\bar{\Omega} \times [0,T])$, $\varphi(x,y) \in C^{2,2}_{x,y}(\bar{\Omega})$. *Если функции* $f(x,y,t)$, $\varphi(x,y)$ *и их вторые производные по* x,y *и первые производные по* t *равны нулю на границе* Ω *и* f'''_{xxy}, f'''_{xyy}, φ'''_{xxy}, φ'''_{xyy} *- ограниченные функции,* $f^{(4)}_{xxyy}$, $\varphi^{(4)}_{xxyy}$, f'''_{txy} *- интегрируемые функции в* $\bar{\Omega}$, *тогда решение задачи (3) - (5) существует и имеет вид*

$$u(x,y,t) = U(x,y,t) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\bar{f}_{nm}(t) + \varphi_{nm}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2 t^{\alpha})\right]\sin\alpha_n x \cdot \sin\beta_m y, \quad (6)$$

где

$$U(x,y,t) = \begin{cases} \dfrac{l_2 - y}{l_2}\mu(t), & 0 < x < l_1; \\ 0, & x = 0 \quad \text{and} \quad x = l_1, \end{cases}$$

$$\bar{f}_{nm}(t) = \frac{4}{l_1 l_2}\int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\left[f(\xi,\eta,\tau) + \frac{\eta - l_2}{l_2}D^{\alpha}\mu(t)\right]\sin\alpha_n\xi\sin\beta_m\eta \times$$

$$\times (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^{\alpha})d\eta d\xi d\tau, \quad (7)$$

$$\varphi_{nm} = \frac{4}{l_1 l_2}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\varphi(\xi,\eta)\sin\frac{\pi n\xi}{l_1}\sin\frac{\pi m\eta}{l_2}d\eta d\xi, \quad (8)$$

$$\lambda_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{l_2}\right)^2}, \quad (9)$$

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{l_1}, \ \beta_m = \frac{\pi m}{l_2}, \quad (10)$$

$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ - *функция Миттаг-Леффлера.*

Далее, рассмотрим следующую задачу управления:

Задача 1. *Пусть задана функция* $\Psi(x,y)$, *найти функцию источника* $f(x,y)$ *такую, что решение задачи (3) - (5) удовлетворяет равенству*

$$u(x,y,\theta) = \Psi(x,y). \quad (11)$$

Замечание. Другими словами, мы должны выбрать функцию источника $f(x,y)$ таким образом, чтобы в результате в момент времени $t = \theta$ температура должна быть распределена как $\Psi(x,y)$ в области Ω.

Разрешимость первой краевой задачи

В этом пункте докажем теорему 1. Для этого используем метод Фурье. Прежде чем доказать теорему 1, докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть числа* $a_{ij}, b_i,$ *и* c_i *удовлетворяют условиям:*

1) $a_{ij} \geq 0,\ a_{ij} \to 0$ *при* $i^2+j^2 \to \infty$,

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i \leq M_1, \quad \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \leq M_2$.

Тогда ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}b_ic_j \tag{12}$$

сходится.

Доказательство. Пусть $S_{nm} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}b_ic_j, \quad B_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i, \quad C_m = \sum\limits_{j=1}^{m} c_j$. Тогда используя $b_i = B_i - B_{i-1}$ и $c_j = C_j - C_{j-1}$ имеем

$$I = \sum_{i=n+1}^{n+p}\sum_{j=m+1}^{m+l} a_{ij}b_ic_j = \sum_{i=n+1}^{n+p-1}\sum_{j=m+1}^{m+l-1}(a_{ij} - a_{i(j+1)} - a_{(i+1)j} + a_{(i+1)(j+1)})B_iC_j +$$

$$+\sum_{j=m+1}^{m+l-1}(a_{(n+p)j} - a_{(n+p)(j+1)})B_{n+p}C_j - \sum_{j=m+1}^{m+l-1}(a_{(n+1)j} - a_{(n+1)(j+1)})B_nC_j +$$

$$+\sum_{i=n+1}^{n+p-1}(a_{i(m+l)} - a_{(i+1)(m+l)})B_iC_{m+l} - \sum_{i=n+1}^{n+p-1}(a_{i(m+1)} - a_{(i+1)(m+1)})B_iC_m +$$

$$+a_{(n+p)(m+l)}B_{n+p}C_{m+l} - a_{(n+1)(m+l)}B_nC_{m+l} - a_{(n+p)(m+1)}B_{n+p}C_m + a_{(n+1)(m+1)}B_nC_m.$$

Отсюда, в силу условий леммы 1, имеем

$$|I| \leq 4M_1M_2a_{(n+1)(m+1)} < 4M_1M_2\varepsilon.$$

По критерию Коши ряд (12) сходится. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть* $f(x,y,t) \in C^{2,2,0}_{x,y,t}(\bar{\Omega}\times[0,T])$. *Если функция* $f(x,y,t)$ *и её вторые производные по* x, y *равны нулю на границе* Ω *и* f'''_{xxy}, f'''_{xyy} *- ограниченные функции,* $f^{(4)}_{xxyy}$ *- интегрируемая функция в* Ω, *то справедливо следующее неравенство*

$$\left|\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(\xi,\eta,\tau)\sin\frac{\pi n\xi}{l_1}\sin\frac{\pi m\eta}{l_2}d\eta d\xi\right| \leq \frac{L}{n^2m^2}, \tag{13}$$

где число $L > 0$.

Доказательство. Доказательство леммы легко вытекает из интегрирования по частям. □

Следствие 1. Пусть $\varphi(x,y) \in C^{2,2}_{x,y}(\bar{\Omega})$. Если функция $\varphi(x,y)$ и её вторые производные равны нулю на границе Ω и φ'''_{xxy}, φ'''_{xyy} - ограниченные функции, $\varphi^{(4)}_{xxyy}$ - интегрируемая функция в Ω, то справедливо следующее неравенство

$$|\varphi_{nm}| \leq \frac{\Phi}{n^2m^2}, \tag{14}$$

где число $\Phi > 0$.

Следствие 2. Пусть $\Psi(x,y) \in C^{4,4}_{x,y}(\bar{\Omega})$, $0 \leq i+j \leq 7$ и если $i+j$ четные $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}\Psi(x,y)$ равны нулю на границе Ω и если $i+j$ нечетные $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}\Psi(x,y)$ - ограниченные функции, и $\frac{\partial^8}{\partial x^4 \partial y^4}\Psi(x,y)$ - интегрируемая функция в Ω. Тогда справедливо следующее неравенство

$$|\Psi_{nm}| \leq \frac{V}{n^4m^4}, \tag{15}$$

где число $V > 0$.

Доказательство. Докажем Теорему 1, используя метод разделения переменных и решение уравнения дробного порядка [1], найдем решение уравнения (3), удовлетворяющее условиям (4)-(5). Тогда получим (6) и представим его в следующем виде

$$u(x,y,t) = U(x,y,t) + u_1(x,y,t) + u_2(x,y,t) + u_3(x,y,t), \tag{16}$$

где

$$u_1(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \hat{f}_{nm}(t)\sin\alpha_n x \cdot \sin\beta_m y, \tag{17}$$

$$u_2(x,y,t) = \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\frac{\eta - l_2}{l_2}\sin\alpha_n\xi\sin\beta_m\eta\, d\eta\, d\xi\right] \times$$

$$\times\left[\int_0^t D^\alpha\mu(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^\alpha)\,d\tau\right]\sin\alpha_n x\sin\beta_m y, \tag{18}$$

$$u_3(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\varphi_{nm}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2 t^\alpha)\sin\alpha_n x \cdot \sin\beta_m y, \tag{19}$$

$$\hat{f}_{nm}(t) = \frac{4}{l_1 l_2}\int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(\xi,\eta,\tau)\sin\frac{\pi n\xi}{l_1}\sin\frac{\pi m\eta}{l_2}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^\alpha)\,d\eta\, d\xi\, d\tau. \tag{20}$$

Докажем, что эти ряды и их производные сходятся.

Используя (17), (20) и лемму 2, получим

$$|u_1(x,y,t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\hat{f}_{nm}(t)| \leq$$

$$\leq \frac{4}{l_1 l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\int_0^t\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(\xi,\eta,\tau)\sin\frac{\pi n\xi}{l_1}\sin\frac{\pi m\eta}{l_2}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^{\alpha})d\eta d\xi d\tau\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L}{l_1 l_2 n^2 m^2}\int_0^t\left|(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^{\alpha})\right|d\tau \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4L}{l_1 l_2 n^2 m^2}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\frac{1}{1+(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^{\alpha}}d\tau \leq$$

$$\leq C_1\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln(1+\lambda_{nm}^2 t^{\alpha})}{n^2 m^2\lambda_{nm}^2} \leq C_2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_{nm}^{2\varepsilon}}{n^2 m^2\lambda_{nm}^2} \leq$$

$$\leq C_2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 m^2(2nm)^{1-\varepsilon}} \leq C_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-\varepsilon}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{3-\varepsilon}},$$

где $0<\varepsilon<1$. Поэтому эти ряды сходятся. Следовательно, ряд для $u_1(x,y,t)$ сходится равномерно. Покажем, что его производные тоже равномерно сходятся. Сначала введем следующее обозначение

$$g_{nm}(t) = \int_0^t f(\xi,\eta,\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^{\alpha})d\tau.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$g_{nm}(t) = f(\xi,\eta,0)t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(-(\lambda_{nm})^2 t^{\alpha})+$$

$$+\int_0^t f'_{\tau}(\xi,\eta,\tau)(t-\tau)^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(-(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^{\alpha})d\tau.$$

Вычислим производную функций $g_{nm}(t)$

$$D^{\alpha}g_{nm}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{g'_{nm}(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds = f(\xi,\eta,0)E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2 t^{\alpha})+$$

$$+\int_0^t f'_{\tau}(\xi,\eta,\tau)E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^{\alpha})d\tau.$$

Для оценки $D^{\alpha}u_1(x,y,t)$ используем (13), имеем

$$|D^{\alpha}u_1(x,y,t)| \leq \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}D^{\alpha}g_{nm}(t)\sin\alpha_n\xi\sin\beta_m\eta d\eta d\xi\right]\sin\alpha_n x\sin\beta_m y\right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f(\xi,\eta,0)\sin\alpha_n\xi\sin\beta_m\eta d\eta d\xi\right| E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2t^\alpha)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^t\left|\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} f'_\tau(\xi,\eta,\tau)\sin\alpha_n\xi\sin\beta_m\eta d\eta d\xi\right| E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^\alpha)d\tau.$$

Используя условия теоремы 1, что $|f_t(x,y,t)| \leq F_1$, леммы 2 и оценки функции Миттаг - Леффлера, получим

$$|D^\alpha u_1(x,y,t)| \leq C_1\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{L}{n^2m^2}\frac{1}{1+\lambda_{nm}^2t^\alpha}+C_2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{nm}\frac{F_1}{\lambda_{nm}^2}t^{1-\alpha}$$

$$\leq C_3\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^2m^2}=C_3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}.$$

Следовательно, продифференцированный ряд сходится равномерно.

Далее докажем, что ряд для $u_2(x,y,t)$ также равномерно сходится. Учитывая,

$$I_{nm}(t)=\int_0^t D^\alpha\mu(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^\alpha)d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\int_0^\tau\frac{\mu'(s)}{(\tau-s)^\alpha}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^\alpha)dsd\tau=$$

$$=\int_0^t\mu'(s)E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2(t-s)^\alpha)ds$$

и $|\mu'(\tau)| \leq M_1$,

$$\int_0^{l_1}\sin\alpha_n\xi d\xi=\frac{l_1}{\pi n}[1-(-1)^n], \tag{21}$$

$$\int_0^{l_2}\frac{\eta-l_2}{l_2}\sin\beta_m\eta d\eta=-\frac{l_2}{\pi m}, \tag{22}$$

мы имеем

$$|u_2(x,y,t)| \leq \frac{4}{l_1l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{nm}\int_0^t E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm}a)^2(t-\tau)^\alpha)d\tau \leq$$

$$\leq \frac{4}{l_1l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{nm}\frac{1}{1+\lambda_{nm}^2t^\alpha} \leq C\frac{4}{l_1l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^2m^2}.$$

Следовательно, ряд для $u_2(x,y,t)$ сходится. Докажем, что его производная тоже сходится. Для этого вычислим производную функции $I_{nm}(t)$:

$$D^{\alpha}I_{nm}(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{I'_{nm}(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\mu'(s)+\int_0^s\mu'(\tau)\frac{\partial}{\partial s}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2(s-\tau)^{\alpha})d\tau}{(t-s)^{\alpha}}ds$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\mu'(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds+$$

$$+\frac{\lambda_{nm}^2}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\int_0^s\frac{\mu'(\tau)(s-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_{nm})^2(s-\tau)^{\alpha})d\tau}{(t-s)^{\alpha}}ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\mu'(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds+$$

$$+\lambda_{nm}^2\int_0^t\mu'(\tau)E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^{\alpha})d\tau.$$

Тогда

$$D^{\alpha}u_2(x,y,t)=-\frac{4}{l_1l_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{l_1}{\pi n}[1-(-1)^n]\frac{l_2}{\pi m}D^{\alpha}I_{nm}(t)\sin\alpha_n x\cdot\sin\beta_m y=$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{mn}[A_1(t)+\lambda_{nm}^2A_{nm}(t)]\sin\alpha_n x\cdot\sin\beta_m y,$$

где

$$A_1(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{\mu'(s)}{(t-s)^{\alpha}}ds,$$

$$A_{nm}(t)=\int_0^t\mu'(\tau)E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2(t-\tau)^{\alpha})d\tau.$$

Очевидно, $A_1(t)\geq 0$, $A_{nm}(t)\geq 0$. Тогда из леммы 1 вытекает, что ряд для $D^{\alpha}u_2(x,y,t)$ равномерно сходится.

Далее докажем, что ряды для $u_3(x,y,t)$ и $D^{\alpha}u_3(x,y,t)$ равномерно сходятся. Используя (14), имеем

$$|u_3(x,y,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_{nm} E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2 t^{\alpha}) \sin\alpha_n x \cdot \sin\beta_m y \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi}{n^2 m^2} \frac{1}{1+\lambda_{nm}^2 t^{\alpha}}.$$

Этот ряд сходится. Следовательно, ряд $u_3(x,y,t)$ равномерно сходится. Учитывая, что $D^{\alpha}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2 t^{\alpha}) = -\lambda_{nm}^2 E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2 t^{\alpha})$ и используя (14), имеем

$$|D^{\alpha}u_3(x,y,t)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{nm} D^{\alpha}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2 t^{\alpha}) \sin\alpha_n x \cdot \sin\beta_m y\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{nm} \lambda_{nm}^2 E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2 t^{\alpha}) \sin\alpha_n x \cdot \sin\beta_m y\right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi}{n^2 m^2} \frac{\lambda_{nm}^2}{1+\lambda_{nm}^2 t^{\alpha}}.$$

Этот ряд также равномерно сходится. Следовательно, ряд для $D^{\alpha}u_3(x,y,t)$ равномерно сходится.

Теперь покажем сходимость производных по x и y рассмотренных выше рядов. Имеем

$$|\Delta u_1(x,y,t)| \le \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_{nm}^2 \hat{f}_{nm}(t) \sin\alpha_n x \cdot \sin\beta_m y\right| \le$$

$$\le \frac{4L}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{nm}^2}{n^2 m^2} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_{nm} a)^2 (t-\tau)^{\alpha}) d\tau \right| \le$$

$$\le \frac{4L}{l_1 l_2} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_{nm}^2}{n^2 m^2} \frac{1}{1+\lambda_{nm}^2 t^{\alpha}} \right| \le$$

$$\le C_1 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nm}^{2\varepsilon}}{n^2 m^2} \le C_2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-2\varepsilon} m^2} + C_2 \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 m^{2-2\varepsilon}},$$

где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Очевидно, последние два ряда сходятся. Отсюда вытекает равномерная сходимость ряда для $\Delta u_1(x,y,t)$.

Для $\Delta u_2(x,y,t)$ имеем

$$\Delta u_2(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\lambda_{nm}^2}{l_1 l_2} \left[\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \frac{\eta - l_2}{l_2} \sin\alpha_n \xi \cdot \sin\beta_m \eta \, d\eta \, d\xi \right] I_{nm}(t) \sin\alpha_n x \cdot \sin\beta_m y.$$

Используя (21) и (22), получим

$$\Delta u_2(x,y,t) = -\frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{nm}^2 I_{nm}(t)[1-(-1)^n]}{nm} \sin\alpha_n x \sin\beta_m y.$$

По леммы 1 этот ряд сходится равномерно.

Используя (14) будем иметь

$$|\Delta u_3(x,y,t)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_{nm}^2\varphi_{nm}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2t^{\alpha})\sin\alpha_n x\cdot\sin\beta_m y\right| \le$$

$$\le C_3\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi}{n^2m^2}\frac{\lambda_{nm}^2}{1+\lambda_{nm}^2t^{\alpha}} \le C_4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n^2m^2}.$$

Следовательно, ряд для $\Delta u_3(x,y,t)$ сходится равномерно.

Из равномерной сходимости рядов для $u_1(x,y,t)$, $u_2(x,y,t)$, $u_3(x,y,t)$ и их производных вытекает утверждение теоремы 1. Теорема 1 доказана. $\square$

Решение Задачи 1

В данном пункте приведем решение сформулированной Задачи 1. Как отмечено выше, в этом пункте считаем, что функция f не зависит от t и $\mu(t) = 0$, т. е. рассматриваем следующую задачу:

$$D_t^{\alpha}u = \Delta u + f(x,y),\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ t > 0, \tag{23}$$

с граничными условиями

$$u(0,y,t) = 0,\ u(l_1,y,t) = 0,\ u(x,0,t) = 0,\ u(x,l_2,t) = 0,\ t \ge 0, \tag{24}$$

и начальным условием

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ 0 \le x \le l_1,\ 0 \le y \le l_2, \tag{25}$$

Как видно, из постановки Задачи 1, это равносильно обратной задаче нахождения функции источника. В качестве дополнительного условия получаем условие (11). Задачи нахождения функции источника для классических и дробных уравнений в частных производных изучались многими учеными [17] - [36].

Следущая теорема дает решению Задачи 1.

Теорема 2. *Пусть функции φ и Ψ удовлетворяют условиям следствия 1 и 2 соответственно. Для того, чтобы решение задачи (23) - (25) удовлетворяло условию (11), достаточно, чтобы функция $f(x,y)$ определена по следующей формуле*

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\Psi_{nm}}{\theta^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(-(\lambda_{nm})^2\theta^{\alpha})} - \frac{\varphi_{nm}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2\theta^{\alpha})}{\theta^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(-(\lambda_{nm})^2\theta^{\alpha})}\right]\sin\alpha_n x\cdot\sin\beta_m y. \tag{26}$$

Доказательство. Нам известно, что решение (23), удовлетворяющее условиям (24)-(25) определяется по формуле (6), т.е.

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\varphi_{nm}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2t^{\alpha}) + f_{nm}\int_0^t\tau^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_{nm})^2\tau^{\alpha})d\tau\right]\sin\alpha_n x\cdot\sin\beta_m y,$$

где f_{nm} – коэффициенты Фурье функции $f(x,y)$.

Используя равенство

$$\int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-(\lambda_{nm})^2\tau^\alpha)d\tau = t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-(\lambda_{nm})^2 t^\alpha)$$

имеем

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\varphi_{nm}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2 t^\alpha) + f_{nm}t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-(\lambda_{nm})^2 t^\alpha)\right]\sin\alpha_n x\cdot\sin\beta_m y, \tag{27}$$

По условию теоремы решение (27) должно удовлетворять условию (11):

$$u(x,y,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\varphi_{nm}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2\theta^\alpha) + f_{nm}\theta^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-(\lambda_{nm})^2\theta^\alpha)\right]\sin\alpha_n x\cdot\sin\beta_m y = \Psi(x,y).$$

Отсюда вытекает, что

$$\varphi_{nm}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2\theta^\alpha) + f_{nm}\theta^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-(\lambda_{nm})^2\theta^\alpha) = \Psi_{nm}$$

где

$$\Psi_{nm} = \int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\Psi(x,y)\sin\alpha_n x\cdot\sin\beta_m y\, dy dx d\tau.$$

из приведенного выше равенства, имеем

$$f_{nm} = \frac{\Psi_{nm}}{\theta^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-(\lambda_{nm})^2\theta^\alpha)} - \frac{\varphi_{nm}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2\theta^\alpha)}{\theta^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-(\lambda_{nm})^2\theta^\alpha)}$$

Следовательно, функция $f(x,y)$ определяется формальной формулой (26). Теперь покажем, что этот ряд сходится. Для этого используем следующую асимптотическую оценку функции Миттаг-Леффлера:

$$E_{\rho,\rho+1}(-t) = \frac{1}{t}\left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad t > 1, \tag{28}$$

и получим следующее равенство

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_{nm}^2\theta^\alpha\Psi_{nm}}{\theta^\alpha(1+O(\frac{1}{\lambda_{nm}^2\theta^\alpha}))} - \frac{\lambda_{nm}^2\theta^\alpha\varphi_{nm}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2\theta^\alpha)}{\theta^\alpha(1+O(\frac{1}{\lambda_{nm}^2\theta^\alpha}))}\right]\sin\alpha_n x\cdot\sin\beta_m y.$$

Запишем этот ряд как разность двух рядов следующим образом

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_{nm}^2\Psi_{nm}}{1+O(\frac{1}{\lambda_{nm}^2\theta^\alpha})}\sin\alpha_n x\cdot\sin\beta_m y -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_{nm}^2\varphi_{nm}E_{\alpha,1}(-(\lambda_{nm})^2\theta^\alpha)}{1+O(\frac{1}{\lambda_{nm}^2\theta^\alpha})}\sin\alpha_n x\cdot\sin\beta_m y.$$

Вторая сумма сходится согласно (14). А первая сумма сходится согласно (15). Теорема 2 доказана. □

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответсвенность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Благодарность. Автор приносит глубокую благодарность академику Ш.А. Алимову за обсуждения результатов работы, а также профессору Р.Р.Ашурову за ценные советы.

Список литературы

1. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204. Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, 2006. 540 pp.
2. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка*. Наука: Москва, 2005.
3. Lions J. L. *Control Optimal de Systems Governess par des Equations aux Derivees Partielles*. Paris: Dunod, 1968.
4. Ильин В. А. Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией, *Дифференциалные уравнения*, 2000. Т. 36, № 12, С. 1670–1686.
5. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимальное граничное управление упругой силой на одном конце струны при свободном втором ее конце, *Дифференциалные уравнения*, 2005. Т. 41, № 1, С. 105–115.
6. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Оптимизация граничного управления смещением на одном конце струны, основанная на отыскании минимума интеграла от модуля производной смещения, возведенного в произвольную степень $p > 1$, *ДАН РФ*, 2006. Т. 411, № 6, С. 736–740.
7. Fattorini H. O. Time and norm optimal control for linear parabolic equations: necessary and sufficient conditions., *Control and Estimation of Distributed Parameter Systems. International Series of Numerical Mathematics, Birkhauser, Basel*, 2002. vol. 13, pp. 151–168.
8. Barbu V., Rascanu A., Tessitore G. Carleman estimates and controllability of linear stochastic heat equations, *Appl. Math. Optim.*, 2003. vol. 47, pp. 97–120.
9. Алимов Ш. А. О задачи быстродействия в управлении процессом теплообмена, *Узбекский Математический Журнал*, 2005. № 4, С. 13–21.
10. Алимов Ш. А. Об одной задаче управления процессом теплообмена, *ДАН России*, 2008. Т. 421, № 5, С. 583–585.
11. Alimov Sh. A., Albeverio S. On a Time-Optimal Control Problem Associated with the Heat Exchange Process, *Appl. Math. Optim.*, 2008. no. 57, pp. 58–68.
12. Alimov Sh. A. On a control problem associated with the heat transfer process, *Eurasian mathematical journal*, 2010. vol. 1, no. 2, pp. 17–30.
13. Alimov Sh. A. On the null-controllability of the heat exchange process, *Eurasian mathematical journal*, 2011. vol. 2, no. 3, pp. 5–19.
14. Файзиев Ю. Э., Халилова Н. Об одной задаче управления процессом теплопроводности, *Вестник НУУз*, 2016. № 2/1, С. 49–54.
15. Файзиев Ю. Э., Кучкаров А. Ф., Носирова Д. Е. Об одной задаче управления процессом теплопроводности в прямоугольнике, *Вестник НУУз*, 2017. № 2/2, С. 239–244.
16. Fayziev Yu. E. On the control of heat conduction, *IIUM Engineering Journal*, 2018. vol. 19, no. 1, pp. 168–177.
17. Liu Y., Li Z., Yamamoto M. Inverse problems of determining sources of the fractional partial differential equations, *Handbook of Fractional Calculus with Applications*, 2019. vol. 2, pp. 411–430.
18. Ashurov R., Fayziev Yu. On the Nonlocal Problems in Time for Time-Fractional Subdiffusion Equations, *Fractal and Fractional*, 2022. vol. 6, no. 41, pp. 168–177.

19. Ashyralyev A., Urun M. Time-dependent source identification Schrodinger type problem, *International Journal of Applied Mathematics*, 2021. vol. 34, no. 2, pp. 297–310.
20. Niu P., Helin T., Zhang Z. An inverse random source problem in a stochastic fractional diffusion equation, *Inverse Problems*, 2020. vol. 36, no. 4, 045002.
21. Slodichka M. Uniqueness for an inverse source problem of determining a space-dependent source in a non-autonomous time-fractional diffusion equation, *Frac. Cal. and Appl. Anal.*, 6. vol. 2020, no. 23, pp. 1703-1711.
22. Zhang Y., Xu X. Inverse scource problem for a fractional differential equations, *Inverse Probems*, 2011. vol. 27, no. 3, pp. 31–42.
23. Kirane M., Malik A. S. Determination of an unknown source term and the temperature distribution for the linear heat equation involving fractional derivative in time, *Applied Mathematics and Computation*, 2011. vol. 218, pp. 163–170.
24. Kirane M., Samet B., Torebek B. T. Determination of an unknown source term and the temperature distribution for the subdiffusion equation at the initial and final data, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2017. vol. 217, pp. 1–13.
25. Nguyen H. T., Le D. L., Nguyen V. T. Regularized solution of an inverse source problem for a time fractional diffusion equation, *Applied Mathematical Modelling*, 2016. vol. 40, pp. 8244–8264.
26. Li Z., Liu Y., Yamamoto M. Initial-boundary value problem for multi-term time-fractional diffusion equation with positive constant coefficients, *Applied Mathematica and Computation*, 2015. vol. 257, pp. 381–397.
27. Rundell W., Zhang Z. Recovering an unknown source in a fractional diffusion problem, *Journal of Computational Physics*, 2018. vol. 386, pp. 299–314.
28. Malik S. A., Aziz S. An inverse source problem for a two parameter anomalous diffusion equation with nonlocal boundary conditions, *Computers and Mathematics with applications*, 2017. vol. 3, pp. 7–19.
29. Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Torebek B. T. Inverse source problems for positive operators, *J. Inverse Ill-Possed Probl*, 2019. vol. 27, pp. 891–911.
30. Ashurov R. R. Muhiddinova O. Inverse problem of determining the heat source density for the subdiffusion equation, *Differential equations*, 2020. vol. 56, no. 12, pp. 1550–1563.
31. Ashurov R., Fayziev Yu. On construction of solutions of linear fractional differentional equations with constant coefficients and the fractional derivatives, *Uzb. Math. Journ.*, 2017. no. 3, pp. 3–21.
32. Shuang Zh., Saima R., Asia R., Khadija K., Abdullah M. Initial boundary value problems for a multi-term time fractional diffusion equation with generalized fractional derivatives in time, *AIMS Mathematics*, 2021. vol. 6, no. 11, pp. 12114–12132.
33. Ashurov R., Fayziev Yu. Inverse problem for determining the order of the fractional derivative in the wave equation, *Mathematical Notes*, 2021. vol. 110, no. 6, pp. 842–852.
34. Kirane M., Salman A. M. Mohammed A. Al-Gwaiz An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2013. vol. 36, no. 9, pp. 1056-1069.
35. Ashurov R., Fayziev Yu. Determination of fractional order and source term in a fractional subdiffusion equation, *Eurasian Mathematical Journal*, 2022. vol. 13, no. 1, pp. 19–31.
36. Ashurov R., Fayziev Yu. Uniqueness and existence for inverse problem of determining an order of time-fractional derivative of subdiffusion equation, *Lobachevskii journal of mathematics*, 2021. vol. 42, no. 3, pp. 508–516.

Файзиев Юсуф Эргашевич – кандидат физико-математических наук, доцент, физико-математического факультета Национального университета Узбекистана, Узбекистан, ORCID 0000-0002-8361-2525.

MSC 35G15; 35L35 Research Article

On a control problem for the subdiffusion equation with a fractional derivative in the sense of Caputo

Yu. E. Fayziev

National University of Uzbekistan Uzbekistan, 100174, Tashkent city, university campus, Republic of Uzbekistan.

E-mail: fayziev.yusuf@mail.ru

In the rectangle Ω for a differential equation of fractional order in the sense of Caputo, we study the control problem with the help of a source function. In other words, the task is to find the source function $f(x,y)$ in such a way that, as a result, at the time $t=\theta$ the temperature of the object under study should be distributed as a given function $\Psi(x,y)$. Sufficient conditions are found for the function $\Psi(x,y)$, which ensure both the existence and uniqueness of the solution to the control problem.

Key words: fractional derivatives in the sense of Caputo, heat conduction equations, control problem.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-62-77

Original article submitted: 20.06.2022 Revision submitted: 12.08.2022

For citation. Fayziev Yu. E. On one control problem for the equationOn a control problem for the subdiffusion equation with a fractional derivative in the sense of Caputo. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **39**: 2, 62-77. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-62-77

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

References

[1] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006, p. 540.

[2] Pskhu A. V. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Fractional Partial Differential Equations], Moscow, Nauka, 2005 (In Russian).

[3] Lions J. L. Control Optimal de Systems Governess par des Equations aux Derivees Partielles, Paris, Dunod, 1968.

Funding. Financial support is indicated here

[4] Il'in V. A. Boundary Control of Oscillations at One Endpoint with the Other Endpoint Fixed in Terms of a Finite-Energy Generalized Solution of the Wave Equation, Differential Equations, 2000, vol. 36, pp. 1832–1849.

[5] Il'in V. A., Moiseev E. I. Optimal boundary control of a string by an elastic force applied at one end, the other end being free, Differential Equations, 2005, vol. 41, pp. 110–120..

[6] Il'in V. A., Moiseev E. I. Optimization of a boundary control by a displacement at one end of a string based on minimization of the integral of the modulus of the derivative of the displacement raised to an arbitrary power $p > -1$, Doklady Mathematics, 2006, vol. 74, no 3, pp. 878-882.

[7] Fattorini H. O. Time and norm optimal control for linear parabolic equations: necessary and sufficient conditions, Control and Estimation of Distributed Parameter Systems. International Series of Numerical Mathematics, 2002, vol. 13, pp. 151–168.

[8] Barbu V., Rascanu A., Tessitore G. Carleman estimates and controllability of linear stochastic heat equations, Appl. Math. Optim., 2003, vol. 47, pp. 97–120.

[9] Alimov Sh. A. O zadachi bystrodeystviya v upravlenii protsessom teploobmena, Uzbek Mathematical Journal, 2005, no. 4. pp. 13–21 (In Russian.).

[10] Alimov Sh. A. Ob odnoy zadache upravleniya protsessom teploobmena, Doklady akademii nauk, 2008, vol. 421, no 4, pp. 583–585 (In Russian.).

[11] Alimov Sh. A., Albeverio S. On a Time-Optimal Control Problem Associated with the Heat Exchange Process, Appl. Math. Optim., 2008, no. 572, pp. 58–68.

[12] Alimov Sh. A. On a control problem associated with the heat transfer process, Eurasian mathematical journal, 2010, vol. 1. no. 2, pp. 17–30.

[13] Alimov Sh. A. On the null-controllability of the heat exchange process, Eurasian mathematical journal, 2011, vol. 2, no. 3, pp. 5–19.

[14] Fayziyev Yu. E., Khalilova N. Ob odnoy zadache upravleniya protsessom teploprovodnosti, Vestnik NUUz, 2016, no 2/1, pp. 49–54 (In Russian).

[15] Fayziyev YU. E., Kuchkarov A. F., Nosirova D. E. Ob odnoy zadache upravleniya protsessom teploprovodnosti v pryamougol'nike, Vestnik NUUz, 2017, no. 2/2, pp. 239–244 (In Russian).

[16] Fayziev Yu. E. On the control of heat conduction, IIUM Engineering Journal, 2018, vol. 19, no. 1, pp. 168–177.

[17] Liu Y., Li Z., Yamamoto M. Inverse problems of determining sources of the fractional partial differential equations, Handbook of Fractional Calculus with Applications, 2019, vol. 2, pp. 411–430.

[18] Ashurov R., Fayziev Yu. On the Nonlocal Problems in Time for Time-Fractional Subdiffusion Equations, Fractal and Fractional, 2022, vol. 6, no. 41, pp. 168–177.

[19] Ashyralyev A., Urun M. Time-dependent source identification Schrodinger type problem, International Journal of Applied Mathematics, 2021, vol. 34. no. 2. pp. 297–310.

[20] Niu P., Helin T., Zhang Z. An inverse random source problem in a stochastic fractional diffusion equation, Inverse Problems, 2020, vol. 36, no. 4, 045002.

[21] Slodichka M. Uniqueness for an inverse source problem of determining a space-dependent source in a non-autonomous time-fractional diffusion equation, Frac. Cal. and Appl. Anal. 2020, vol. 23, no. 6, pp. 1703-1711.

[22] Zhang Y., Xu X. Inverse scource problem for a fractional differential equations, Inverse Probems, 2011, vol. 27. no. 3, pp. 31–42.

[23] Kirane M., Malik A. S. Determination of an unknown source term and the temperature distribution for the linear heat equation involving fractional derivative in time, Applied Mathematics and Computation, 2011, vol. 218, pp. 163–170.

[24] Kirane M., Samet B., Torebek B. T. Determination of an unknown source term and the temperature distribution for the subdiffusion equation at the initial and final data, Electronic Journal of Differential Equations, 2017, vol. 217, pp. 1–13.
[25] Nguyen H. T., Le D. L., Nguyen V. T. Regularized solution of an inverse source problem for a time fractional diffusion equation, Applied Mathematical Modelling, 2016, vol. 40, pp. 8244–8264.
[26] Li Z., Liu Y., Yamamoto M. Initial-boundary value problem for multi-term time-fractional diffusion equation with positive constant coefficients, Applied Mathematica and Computation, 2015, vol. 257, pp. 381–397.
[27] Rundell W., Zhang Z. Recovering an unknown source in a fractional diffusion problem, Journal of Computational Physics, 2018, vol. 386, pp. 299–314.
[28] Malik S. A., Aziz S. An inverse source problem for a two parameter anomalous diffusion equation with nonlocal boundary conditions, Computers and Mathematics with applications, 2017, vol. 3, pp. 7–19.
[29] Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Torebek B. T. Inverse source problems for positive operators, J. Inverse Ill-Possed Probl, 2019, vol. 27, pp. 891–911.
[30] Ashurov R. R. Muhiddinova O. Inverse problem of determining the heat source density for the subdiffusion equation, Differential equations, 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1550–1563.
[31] Ashurov R., Fayziev Yu. On construction of solutions of linear fractional differentional equations with constant coefficients and the fractional derivatives, Uzb. Math. Journ., 2017, no. 3, pp. 3–21.
[32] Shuang Zh., Saima R., Asia R., Khadija K., Abdullah M. Initial boundary value problems for a multi-term time fractional diffusion equation with generalized fractional derivatives in time, AIMS Mathematics, 2021, vol. 6, no. 11, pp. 12114–12132.
[33] Ashurov R., Fayziev Yu. Inverse problem for determining the order of the fractional derivative in the wave equation, Mathematical Notes, 2021, vol. 110, no. 6. pp. 842–852..
[34] Kirane M., Salman A. M. Mohammed A. Al-Gwaiz An inverse source problem for a two dimensional time fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions, Math. Meth. Appl. Sci. 2013, vol. 36, no. 9, pp. 1056-1069.
[35] Ashurov R., Fayziev Yu. Determination of fractional order and source term in a fractional subdiffusion equation, Eurasian Mathematical Journal, 2022, vol. 13, no. 1, pp. 19–31.
[36] Ashurov R., Fayziev Yu. Uniqueness and existence for inverse problem of determining an order of time-fractional derivative of subdiffusion equation, Lobachevskii journal of mathemtics, 2021, vol. 42, no. 3, pp. 508–516.

Fayziev Yusuf Ergashevich – PhD (Phys. & Math.), Associate Professor, Faculty of Physics and Mathematics, National University of Uzbekistan, Uzbekistan, ORCID 0000-0002-8361-2525.