МАТЕМАТИКА

УДК 517.956 Научная статья

Краевая задача для уравнения смешанного типа с эллиптическим оператором высокого порядка

Р. Р. Ашуров[1], *М. Б. Мурзамбетова*[2]

[1] Институт Математики имени В. И. Романовского Академии наук Узбекистана, 100170, г. Ташкент, ул. Университетская 9, Республика Узбекистан

[2] Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза, 230100, г. Нукус, ул. П.Сейтов, 104, Республика Узбекистан

E-mail: ashurovr@gmail.com, mehri_8282@mail.ru

В данной работе рассматривается одна краевая задача для уравнения смешанного типа с положительным формально самосопряженным эллиптическим оператором высокого порядка. Результаты работы получены с использованием метода Фурье. Доказаны теоремы о существовании и единственности классического решения задачи. При этом положительность эллиптического оператора оказалось существенным. В конце работы рассмотрено уравнение смешанного типа с неотрицательным эллиптическим оператором, и показан, что решение соответствующей задачи не единственно.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, эллиптический оператор, краевая задача, метод Фурье.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-7-19

Поступила в редакцию: 06.06.2022 В окончательном варианте: 08.07.2022

Для цитирования. Ашуров Р. Р., Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения смешанного типа с эллиптическим оператором высокого порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 39. № 2. С. 7-19. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-7-19

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

© Ашуров Р. Р., Мурзамбетова М. Б., 2022

Введение и постановка задачи

Впервые на важность уравнений смешанного типа обратил внимание А.С.Чаплыгин еще в 1902 году. Им было указано на то, что движение газа в условиях перехода от дозвуковой к сверхзвуковой скорости описывается

Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

уравнением смешанного типа. Это уравнение в настоящее время имеет названию уравнения Чаплыгина. Различные краевые задачи (нелокальные краевые задачи) для уравнения Чаплыгина были предложены и изучены в работах Ф. И. Франкля при решении газодинамической задачи об обтекании профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения [1]-[2].

Один из фундаментальных результатов теории краевых задач для уравнений смешенного типа был получен А.В. Бицадзе [3] в 1958 году. Он доказал некорректность задачи Дирихле для уравнения $u_{xx} + sgn y\, u_{yy} = 0$. Причем некорректность задачи Дирихле не зависит от малости меры гиперболической части области.

В настоящее время теория краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из развивающихся разделов теории уравнений в частных производных. Опубликованы многочисленные теоретические исследования [4]-[14] и монографии. В качестве классических монографий по уравнениям смешанного типа отметим работы А.В. Бицадзе [15], М.М. Смирнова [16] и В.Н. Врагова [17].

В данной заметке остановимся лишь на некоторые работы в этом направлении.

В работах Т.Ш.Кальменова [4] и К.Б. Сабитова [5] также рассмотрены задачи Дирихле для уравнения второго порядка смешанного типа в прямоугольной области. А именно, в [4] рассматривается полупериодическая задача, и доказано что существует сильное решение поставленной задачи. А в [5] установлены критерий единственности и существования решения задачи Дирихле для уравнения второго порядка.

В работе Р. Р. Ашурова и С. З. Джамалова [6] исследуются обратные задачи с нелокальными краевыми условиями. Доказывается однозначная разрешимость обратной задачи для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка.

Работа [10] посвящена к исследованию краевой задачи для уравнения смешенного типа со спектральным параметром, эллиптическая часть которого имеет четвертый порядок. Автору удалось найти условия на спектральный параметр, которые гарантируют и существование и единственность решения рассматриваемой задачи.

Отметим, также работы [11]-[12], в которых исследуются краевые задачи для нагруженного параболо-гиперболического дифференциального уравнения третьего порядка в различных областях.

Следует отметить, что во всех перечисленных выше работах эллиптическая часть смешанного уравнения является уравнением второго или четвертого порядка. В настоящей работе рассматривается краевая задача для уравнения смешанного типа с эллиптическим оператором произвольного порядка, определенный в произвольной N-мерной области (с достаточно гладкой границей).

Пусть $\Omega \subset R^N$ – произвольная ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, а $A(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ – произвольный положительный формально самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка $m = 2l$ с достаточно гладкими в Ω коэффициентами $a_\alpha(x)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ – мультииндекс и $D = (D_1, D_2, ..., D_N)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Рассмотрим уравнение

$$A(x,D)u(x,t) + sgn(t)\frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t),\ x \in \Omega, t \in [-L,0) \cup (0,L],\ L \equiv const > 0, \quad (1)$$

с условиям склеивания

$$u(x,+0) = u(x,-0),\ u_t(x,+0) = u_t(x,-0),\ x \in \Omega, \quad (2)$$

и с краевыми условиями

$$B_j u(x,t) = \sum_{|\alpha| \le m_j} b_{\alpha,j}(x) D^\alpha u(x,t) = 0,\ \ 0 \le m_j \le m-1,\ j = 1,2,...,l;\ x \in \partial\Omega. \quad (3)$$

Здесь $f(x,t)$ и коэффициенты $b_{\alpha,j}(x)$ - заданные функции.

Следуя О.А. Ладыженской (см. [13], стр. 71) *решением задачи* (1)-(3) назовём функцию $u(x,t)$, которая непрерывна в области $\overline{\Omega} \times ([-L,0) \cup (0,L])$ вместе с производными, входящие в уравнение (1) и удовлетворяющая всем условиям задачи в обычном классическом смысле.

Обратим внимание на то, что требование непрерывности в замкнутой области $\overline{\Omega}$ функции $u(x,t)$ и всех ее производных, входящих в уравнение (1), определяемого решения $u(x,t)$, не вызвано существом дела. Однако, с одной стороны единственность именно такого решения доказывается достаточно просто, а с другой стороны, решение, найденное методом Фурье, удовлетворяет указанным выше условиям.

Применение метода Фурье к задаче (1)-(3) приводит нас к рассмотрению следующей спектральной задачи

$$A(x,D)v(x) = \lambda v(x), x \in \Omega; \quad (4)$$

$$B_j v(x) = 0,\ j = 1,2,...,l;\ \ x \in \partial\Omega. \quad (5)$$

В работе С. Агмона [19] найдены достаточные условия на границу $\partial\Omega$ области Ω и на коэффициенты операторов A и B_j, обеспечивающие существование полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системы собственных функций $\{v_k(x)\}$ и счетного множества положительных собственных значений λ_k задачи (4)-(5). Далее будем считать, что эти условия выполнены.

Единственность решения задачи

Теорема 1. *Если решение задачи* (1)-(3) *существует, то оно единственно.*

Доказательство. Для этого достаточно показать, что однородная задача (1)-(3) имеет только тривиальное решение $u(x,t) \equiv 0$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -A(x,D)u(x,t),\ t > 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x,D)u(x,t),\ t<0. \tag{7}$$

Пусть v_k – произвольная собственная функция спектральной задачи (4)-(5), соответствующая собственному числу λ_k. Рассмотрим функции

$$\alpha_k(t) = \int_\Omega u(x,t)v_k(x)dx,\ k=1,2,...\ t>0, \tag{8}$$

$$\beta_k(t) = \int_\Omega u(x,t)v_k(x)dx,\ k=1,2,...\ t<0. \tag{9}$$

Дифференцируя под знаком интеграла (8) и (9) по t, и учитывая (6) и (7), получаем уравнения (заметим, что, в силу определения решения, $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $A(x,D)u$ непрерывны в $\overline{\Omega}$.)

$$\alpha_k'(t) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}v_k(x)dx = -\int_\Omega A(x,D)u(x,t)v_k(x)dx,\ \ t>0,$$
$$\beta_k'(t) = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}v_k(x)dx = \int_\Omega A(x,D)u(x,t)v_k(x)dx,\ t<0,$$

или интегрируя по частям (при этом учитываем формально самосопряженность дифференциального выражения $A(x,D)$ и граничные условия (3),

$$\alpha_k'(t) = -\int_\Omega A(x,D)u(x,t)v_k(x)dx = -\lambda_k\int_\Omega u(x,t)v_k(x)dx = -\lambda_k\alpha_k(t),\ \ t>0,$$

$$\beta_k'(t) = \int_\Omega A(x,D)u(x,t)v_k(x)dx = \lambda_k\int_\Omega u(x,t)v_k(x)dx = \lambda_k\beta_k(t),\ \ t<0.$$

Решения полученных дифференциальных уравнений соответственно запишутся в виде

$$\alpha_k(t) = a_k e^{-\lambda_k t},\ k=1,2,...,\ \ t>0,$$
$$\beta_k(t) = b_k e^{\lambda_k t},\ k=1,2,...,\ \ t<0.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов a_k, b_k воспользуемся непрерывностью функции $u(x,t)$ в области $\overline{\Omega}$, условиями (2), которые переходят в следующие: $\alpha_k(0)=\beta_k(0)$, $\alpha_k'(0)=\beta_k'(0)$. При этом из первого равенства имеем $a_k=b_k$, а из второго следует $-\lambda_k a_k = \lambda_k b_k$, и поскольку $\lambda_k>0$ для всех k, то $a_k=b_k=0$, $k\geq 1$. Тогда правые части (8) и (9) будут равны нулю. Отсюда следует ортогональность $u(x,t)$ к полной системе $\{v_k(x)\}$ как при $t>0$, так и при $t<0$. Следовательно, в силу условий склеивания, $u(x,t)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}\times[-L,L]$. □

Замечание 1. Рассматриваемый оператор $A(x,D)$ положительный. Следовательно, $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots$. Если же оператор неотрицательный, то первое собственное значение может равнятся нулю: $\lambda_1=0$. Тогда, легко убедиться, что решение находиться с точностью до константы.

Существование решения задачи

Для того, что бы сформулировать теорему о существовании решения задачи (1)-(3), нам необходимо ввести некоторые определения.

Для произвольного действительного числа τ в пространстве $L_2(\Omega)$ введем оператор $\hat{A}^{\tau}$, действующей по правилу

$$\hat{A}^{\tau}g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\tau} g_k \nu_k(x), \ g_k = (g, \nu_k).$$

Легко убедиться, что данный оператор $\hat{A}^{\tau}$, с областью определения

$$D\left(\hat{A}^{\tau}\right) = \left\{ g \in L_2(\Omega) : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2\tau} |g_k|^2 < \infty \right\},$$

является самосопряженным. Если через A обозначить оператор в $L_2(\Omega)$ действующей по правилу $Ag(x) = A(x, D)g(x)$ и с областью определения $D(A) = \left\{ g \in C^m(\overline{\Omega}) : B_j g(x) = 0, \, j = 1, ..., l, \, x \in \partial D \right\}$, то оператор $\hat{A} \equiv \hat{A}^1$ является самосопряженным расширением в $L_2(\Omega)$ оператора A.

Теорема 2. *Пусть* $\sigma > \frac{N}{2m}$ *и* $f(x,t) \in D(\hat{A}^{\sigma})$, *причем функция*

$$F(t) = ||\hat{A}^{\sigma} f(x,t)||_{L_2(\Omega)}$$

непрерывна на $[0, T]$. *Тогда существует решение* $u(x,t)$ *задачи* (1)-(3) *и оно представимо в виде рядов* (10), *которые сходятся абсолютно и равномерно в* $x \in \overline{\Omega}$ *для всех* $t \in [-L, L]$.

Доказательство. Рассуждения здесь во многом будут опираться на методику, развитую в монографии [20] (см. также, [21], [22]). Основную роль в этой методике играет следующая лемма [[20], с. 453].

Лемма 1. *Пусть* $\tau > 1 + \frac{N}{2m}$. *Тогда для любого* $|\alpha| \le m$ *оператор* $D^{\alpha}\hat{A}^{-\tau}$ *(вполне) непрерывно действует из* $L_2(\Omega)$ *в* $C(\overline{\Omega})$ *и справедлива оценка*

$$||D^{\alpha}\hat{A}^{-\tau}g||_{C(\Omega)} \le C||g||_{L_2(\Omega)}.$$

Применяя метод Фурье, составим следующие ряды (заметим, что $\lambda_k > 0$ для всех k), которые формально удовлетворяют всем условиям задачи (1)-(3):

$$u(x,t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\nu_k(x)}{\lambda_k} f_k(0) e^{-\lambda_k t} + \nu_k(x) \int_0^t f_k(\tau) \, e^{-\lambda_k (t-\tau)} d\tau \right), \ t > 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\nu_k(x)}{\lambda_k} f_k(0) e^{\lambda_k t} + \nu_k(x) \int_t^0 f_k(\tau) \, e^{-\lambda_k (\tau - t)} d\tau, \right) \ t < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь $f_k(t)$ – коэффициенты Фурье функции $f(x,t)$ по системе собственных функции $\{\nu_k(x)\}$ определяемые как скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Для доказательства теоремы остается показать равномерную сходимость рядов (10), и что этих рядов можно необходимое число раз дифференцировать и полученные ряды также сходятся равномерно.

Рассмотрим случай когда $t>0$, а случай $t<0$ рассматривается совершенно аналогично. Для того чтобы доказать сходимость и дифференцируемость ряда (10) при $t>0$, изучим следующие две суммы:

$$S_k^1(x,t)=\sum_{j=1}^{k}\frac{\nu_k(x)}{\lambda_k}f_k(0)e^{-\lambda_k t}, \tag{11}$$

$$S_k^2(x,t)=\sum_{j=1}^{k}\nu_k(x)\int_0^t f_k(\tau)\,e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau. \tag{12}$$

Пусть $f(x,t)$ удовлетворяет всем условиям Теоремы 2. Тогда, если обозначить $\tau=\sigma+1$, то условия на функцию $f(x,t)$ означают равномерную сходимость по $t\in[0,L]$ ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{2\tau-2}\left|f_j(t)\right|^2<C_f<\infty.$$

Поскольку $\hat{A}^{-\tau}\nu_j(x)=\lambda_j^{-\tau}\nu_j(x)$, то сумму (11) можно переписать в виде

$$S_k^1(x,t)=\hat{A}^{-\tau}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^{\tau-1}\nu_j(x)f_j(0)e^{-\lambda_j t}. \tag{13}$$

Для любого α, $|\alpha|\le m$, в силу Леммы 1 получаем оценку

$$\left\|D^\alpha S_k^1(x,t)\right\|_{C(\Omega)}=\left\|D^\alpha\hat{A}^{-\tau}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^{\tau-1}\nu_j(x)f_j(0)e^{-\lambda_j t}\right\|_{C(\Omega)}\le$$
$$\le C\left\|\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^{\tau-1}\nu_j(x)f_j(0)e^{-\lambda_j t}\right\|_{L_2(\Omega)}. \tag{14}$$

Отсюда, в силу ортонормированности системы $\{\nu_j\}$, будем иметь

$$\left\|D^\alpha S_k^1(x,t)\right\|^2_{C(\Omega)}\le C\sum_{j=1}^{k}\left|\lambda_j^{\tau-1}f_j(0)e^{-\lambda_j t}\right|^2\le C\sum_{j=1}^{k}\left|\lambda_j^{\tau-1}f_j(0)\right|^2\le CC_f.$$

Таким образом, сумма (13) сама сходиться равномерно и продифференцированный ряд также сходится равномерно. С другой стороны, сумма (14) сходится при любой перестановке его членов, так как эти члены взаимно ортогональны. Отсюда следует абсолютная сходимость продифференцированной суммы (13) по переменным x_j.

Повторяя аналогичная рассуждения, устанавливаем что для сумм (12), определяющей функцию $S_k^2(x,t)$, справедливы такие же утверждения.

Равномерная и абсолютная сходимость продифференцированного ряда (13) по t первого порядка доказывается с помощью аналогичных рассуждении.

Теорема доказано полностью. □

Частный случай оператора $A(x, D)$.

При применении теоремы 2 естественно возникает вопрос: как проверить принадлежность заданной функции $f(x,t)$ области определения $D(\hat{A}^\sigma)$? Отметим, что в работе [23] рассмотрены произвольные самосопряжённые расширения в $L_2(\Omega)$ эллиптических операторов, первоначально определенных в $C_0^\infty(\Omega)$. Естественно, рассмотренное нами самосопряжённое расширение $\hat{A}$ также входит в число этих расширений. Согласно результатам работы [23] функции из классов Соболева $L_2^{\sigma m}(\Omega)$ имеющие компактный носитель в Ω, входят в область определения оператора $\hat{A}^\sigma$. Естественно, вопрос принадлежности функции $f(x,t)$ в класс $L_2^{\sigma m}(\Omega)$ проверяется достаточно просто.

В общем случае ослабить дополнительное условие компактности носителя – вопрос достаточно сложный и связан он изучением поведения так называемого ядра дробного порядка, для чего необходимы оценки функции Грина вплоть до границы области Ω. Однако в некоторых конкретных случаях данное дополнительное условие удается снять. В качестве примера рассмотрим изученную выше краевую задачу на N-мерном торе $T^N = (0, 2\pi]^N$ для оператора с постояннимы коэффициентами. Пусть $A(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ – однородный эллиптический симметрический дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Напомним, эллиптичность дифференциального выражения означает выполнения условия

$$A(in) > 0, \ n \neq 0.$$

Отсюда в частности вытекает, что такое выражение имеет четный порядок.

Пусть дифференциальное уравнение и условия склеивания имеют вид

$$A(D)u(x,t) + sgn\,(t)\frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t), \ x \in T^N, t \in [-L, 0) \cup (0, L], \ L \equiv const > 0, \tag{15}$$

$$u(x, +0) = u(x, -0), \ u_t(x, +0) = u_t(x, -0). \tag{16}$$

Вместо граничных условий (3) будем требовать, чтобы искомая функция $u(x,t)$ являлась 2π -периодическими по каждой переменной x_j.

Обозначим через A оператор $A(D)$, определенный на 2π— периодических функциях из $C^m(R^N)$. Замыкание $\hat{A}_T$ этого оператора в $L_2(T^N)$ является самосопряжённым. Оператор $\hat{A}_T$ имеет полную ортонормированную в $L_2(T^N)$ систему собственных функций $\{(2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{inx}\}$, отвечающих собственных значениям $A(in)$, $n \in Z^N$, что проверяется непосредственным вычислением. Поэтому в силу спектральной теоремы Фон-Неймана, для $\tau \geq 0$ оператор $\hat{A}^\tau$ действует по правилу $\hat{A}_T^\tau g(x) = \sum_{n \in Z^N} A^\tau(in) g_n e^{inx}$, где g_n— коэффициенты Фурье по тригонометрической системе $\{(2\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{inx}\}$ функции $g \in L_2(T^N)$:

$$g_n = (2\pi)^{-N} \int\limits_{T^N} g(x) e^{-inx} dx.$$

Область определения этого оператора определяется из условия $\hat{A}_T^\tau g(x) \in L_2(T^N)$ и имеет вид

$$D(\hat{A}_T^{\tau}) = g \in L_2(T^N): \sum_{n \in Z^N} A^{2\tau}(in)\, |g_n|^2 < \infty. \qquad (17)$$

Для того, чтобы задать область определения оператора $\hat{A}_T^{\tau}$ в терминах пространств Соболева, напомним определение этих пространств (см., например, [24]) говорят, что функция $g \in L_2(T^N)$ принадлежит пространству Соболева $L_2^a(T^N)$ с действительным числом $a > 0$, если конечна норма

$$\|g\|^2_{L_2^a(T^N)} = \left\| \sum_{n \in Z^N} (1 + |n|^2)^{\frac{a}{2}} g_n e^{inx} \right\|^2_{L_2(T^N)} = \sum_{n \in Z^N} (1 + |n|^2)^a g_n^2. \qquad (18)$$

Нетрудно проверить, что, в силу эллиптичности и однородности оператора $A(D)$, существуют константы C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \left(1 + |n|^2\right)^{m\tau} \le 1 + A(in)^2 \le C_2 \left(1 + |n|^2\right)^{m\tau}$$

Следовательно, сравнивая выражения (17) и (18), убедимся, что $D(\hat{A}_T^{\tau}) = L_2^{m\tau}(T^N)$.

Прежде чем сформулировать теорему о существования решения задачи на T^N, отметим, что оператор $A(D)$ неотрицательный и первое собственное число равно нулю: $\lambda_1 = A(0) = 0$. Поэтому, в силу Замечания 1, решение находится с точностью до константы.

Теорема 3. *Пусть* $a > \frac{N}{2}$ *и* $f(x,t) \in L_2^a(T^N)$, *причем функция*

$$F(t) = \|f(x,t)\|_{L_2^a(T^N)}$$

непрерывна на $[0,T]$. *Тогда существует решение* $u(x,t)$ *задачи* (15)-(16) *и оно представимо в виде рядов*

$$u(x,t) = \begin{cases} c_0 + \sum\limits_{n \neq 0} \frac{e^{inx}}{A(in)} f_n(0) e^{-A(in)t} + \sum\limits_{n \in Z^N} e^{inx} \int_0^t f_n(\tau)\, e^{-A(in)(t-\tau)} d\tau, & t > 0, \\ c_0 + \sum\limits_{n \neq 0} \frac{e^{inx}}{A(in)} f_n(0) e^{A(in)t} + \sum\limits_{n \in Z^N} e^{inx} \int_t^0 f_n(\tau)\, e^{-A(in)(\tau-t)} d\tau, & t < 0. \end{cases}$$

которые сходятся абсолютно и равномерно по $x \in T^N$ *для всех* $t \in [-L; L]$. *При этом* c_0 *- произвольная константа.*

Доказательство. Эта теорема доказывается точно так же, как и Теоремы 1 и 2. Однако следует отметить, что в Лемме 1 оператор $\hat{A}$ положителен, а оператор $\hat{A}_T$ неотрицателен. Поэтому при доказательстве Теоремы 3 необходимо применить Лемму 1 к оператору $\hat{A}_T + I$, где I - единичный оператор. $\square$

Следует особо подчеркнуть, что условие на функцию $f(x,t)$ в Теореме 3, является ни только достаточным, но и необходимым. Действительно, в силу теоремы вложения С. Л. Соболева функция $f(x,t) \in L_2^a(T^N)$ при $a > \frac{N}{2}$ является непрерывной. Если же $a = \frac{N}{2}$, то функции $f(x,t) \in L_2^a(T^N)$ можеть быть и неограниченными (см. например, [24]).

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы учавствовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление ококнчательной версии статьи в печать. Окончательная форма рукописи была одобрена всеми авторами.

Список литературы

1. Франкль Ф. И. О задачах Чаплыгина для смешанных до и сверхзвуковых течений, *Изв. АН СССР Сер. матем*, 1945. Т. 9, № 2, С. 121–143.
2. Франкль Ф. И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, *Прикладная математика и механика*, 1956. Т. 20, № 2, С. 196–202.
3. Бицадзе А. В. Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях, *Докл. АН СССР*, 1958. Т. 122, № 2, С. 167–170.
4. Кальменов Т. Ш. О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа, *Дифференциальные уравнения*, 1978. Т. 14, № 3, С. 546–548.
5. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области, *Докл РАН*, 2007. Т. 413, № 1, С. 23–26.
6. Джамалов С. З., Ашуров Р. Р. Об одной линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка, *Изв. вузов. Матем*, 2019. Т. 6, С. 11-22, DOI: 10.26907/0021-3446-2019-6-11-22.
7. Сабитов К. Б., Сафина Р. М. Первая граничная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом, *Изв. РАН. Сер. Матем*, 2018. Т. 82, № 2, С. 79–112, DOI: 10.4213/im8596.
8. Джамалов С. З., Ашуров Р. Р.,Рузиев У. Ш. On a Seminonlocal boundary value problem for a miltidimensional loaded mixed type equation of the second kind., *Lobachevskii Jourmal of Mathematics.*, 2021. Т. 42, № 3, С. 536–543, DOI: 10.1134/s1995080221030094.
9. Djamalov S. Z., Ashurov R. R. On a linear inverse problem for multidimensional mixed type equation of second type and second order, *Differential equations*, 2019. Т. 55, № 1, С. 34–44, DOI: 10.1134/s001226611901004X.
10. Мурзамбетова М. Б. Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка со спектральным параметром, *УзМЖ*, 2013. Т. 2, С. 60–71.
11. Islomov B, Baltayeva U. I. Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients, *Electronic journal of differential equations*, 2015. Т. 2015, № 221, С. 1–10, https://ejde.math.unt.edu/Volumes/2015/221/abstr.html..
12. Yuldashev T. K., Islomov B. I, Alikulov E. K. Boundary value problems for a loaded third-order parabolic-hyperbolic equations in infinite three dimensional domains, *Lobachevskii journal of mathematics*, 2020. Т. 41, № 5, С. 926–944, DOI: 10.1134/s1995080220050145.
13. Цыбиков Б. Н. О корректности периодической задачи для многомерного уравнения смешанного типа, *Неклассические уравнения математической физики, Новосибирск*, 1986, С. 201–206.
14. Бицадзе А. В. К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях, *Докл. АН СССР*, 1956. Т. 110, № 6, С. 901–902.
15. Бицадзе А. В. *Уравнение смешанного типа.* М.: АН ССР., 1959. 164 с.
16. Смирнов М. М. *Уравнения смешанного типа.* М.: наука ., 1970. 296 с.
17. Врагов В. Н. *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.* Новосибирск.: НГУ., 1983. 84 с.
18. Ладыженская О. А. *Смешанная задача для гиперболического уравнения.* М.: Гостехиздат, 1953. 281 с.
19. Agmon S. On the ejgenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, *Comm. Pure and Appl. Math*, 1962. Т. 15, № 2, С. 119–143.
20. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. С. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функции.* М.: АН ССР., 1966. 164 с.
21. Ашуров Р. Р., Мухитдинова А. Т. Обратная задача по определению плотности тепловых источников для уравнения субдиффузии, *Дифференциальные уравнения.*, 2020. Т. 56, № 12, С. 1596–1609, DOI: 10.1134/s0374064120120043.

22. Ашуров Р. Р., Мухитдинова А. Т. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений с эллиптическим оператором произвольного порядка, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2020. Т. 30, № 1, С. 8–19, DOI: 10.26117/2079-6641-2020-30-1-8-19.

23. Алимов Ш. А. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функции., *Дифференциальные уравнения*, 1972. Т. 8, № 9, С. 1609–1626.

24. Алимов Ш. А., Ашуров Р. Р., Пулатов А. К. Кратные ряды и интегралы Фурье, *Итоги науки и техн. Сер. Совр. Проблемы математики. Фунд. направления.*, 1989. Т. 42, С. 7–104.

25. Соболевский П. Е. О функциях Грина любых (в частности целых) степеней эллиптических операторов, *Докл. АН СССР*, 1962. Т. 142, № 4, С. 804–807.

26. Ильин В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений, *Успехи мат. Наук*, 1960. Т. 15, № 2, С. 97–154.

Ашуров Равшан Раджабович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лаборатории дифференциальных уравнений и их приложений Института математики Академии наук Узбекистана имени В. И. Романовского, г. Ташкент, Республика Узбекистан. 0000-0001-5130-466X.

Мурзамбетова Мехрибан Бегдуллаевна – преподаватель физико-математического факультета Нукусского государственного педагогического института имени Ажинияза, г. Нукус, Республика Узбекистан. 0000-0001-6704-0785.

MATHEMATICS

MSC 35M12 Research Article

Boundary value problem for a mixed-type equation with a higher order elliptic operator

***R. R. Ashurov*[1], *M. B. Murzambetova*[2]**

[1] Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 100174, Tashkent, University str., 9, Uzbekistan

[2] Nukus state pedagogical institute named after Ajiniyaz, 230100, Nukus, P. Seytov str.,104, Uzbekistan

E-mail: ashurovr@gmail.com, mehri_8282@mail.ru

In this paper, we consider a boundary value problem for a mixed-type equation with a positive, formally self-adjoint, high order elliptic operator. The results of the work were obtained using the Fourier method. Theorems on the existence and uniqueness of the classical solution of the problem are proved. In this case, the positivity of elliptic operator turned out to be essential. At the end of the paper, a mixed-type equation with a non-negative elliptic operator is considered, and it is shown that the solution of the corresponding problem is not unique.

Key words: boundary value problem, method Fourier, elliptic operator.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-7-19

Original article submitted: 06.06.2022 Revision submitted: 07.07.2022

For citation. Ashurov R. R., Murzambetova M. B. Boundary value problem for a mixed-type equation with a higher order elliptic operator. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **39**: 2, 7-19. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-7-19

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru)

© Ashurov R. R., Murzambetova M. B., 2022

References

[1] Frankl' F. I. On the problems of Chaplygin for mixed sub-and Supersonic flows, Izv AN SSSR. Ser. matem, 1945, vol. 9, no. 2, pp. 121–143 (In Russian).

The study was carried out without support from foundations.

[2] Frankl' F. I. Subsonic flow about a profile with a supersonic zone terminated by a Direkt shok wave, Prikladnaya matematika i mexanika, 1958, vol. 20, no. 2, pp. 196–202(In Russian).

[3] Bitsadze A. V. Ill-posedness of the Dirichlet problem for equations of mixed type , Dokl. ANN SSSR, 1958, vol. 122, no. 2, pp. 167-170 (In Russian).

[4] Kal'menov T. Sh. The Semiperiodic Dirikhlet problem for a class of equations of mixed type, Differentsial'nie uravneniya, 1978, vol. 13, no. 3, pp. 546–548 (In Russian).

[5] Sabitov K. B., Dirikhlet problem for equations of mixed type in a rectangular domain, Dokl. RAN, 2007, vol. 413, no. 1, pp. 23-26 (In Russian).

[6] Djamalov S. Z., Ashurov R. R. A linear inverse problem for a multidimensional mixed-type second-order equation of the first kind, Russ Math, 2019, vol. 63, pp. 8-18 DOI: 10.3103/S1066369X19060021

[7] Sabitov K. B., Safina R. M. The first boundary value problem for an equation of mixed type with a singular coefficient, Izvestiya: Mathematics, 2018, vol. 82, no. 2:(318), pp. 318–351 http://dx.doi.org/10.1070/IM8596

[8] Djamalov S. Z., Ashurov R. R., Ruziev U. Sh. On a Seminonlocal boundary for a multidimensional loaded mixed type equation of the second kind, Lobachevckii Journal of Mathematics, 2021, vol. 42, no. 3, pp. 536–543 DOI: 10.1134/s1995080221030094

[9] Djamalov S. Z., Ashurov R. R. On a linear inverse problem for multidimensional mixed type equation of second type and second order, Differential equations, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 34–44 DOI: 10.1134/s001226611901004X

[10] Murzambetova M. B. Boundary value problem for the fourth order mixed type partial differential equation with spectral parameter, UzMJ, 2013, vol. 2, pp. 60–71 (In Russian).

[11] Islomov B., Baltaeva U. I. Boundary value problems for a third-order loaded parabolic hyperbolic equation with variable coefficients, Electron. J. Diff. Equ., 2015, vol. 2015,no. 221, pp. 1–10. https://ejde.math.unt.edu/Volumes/2015/221/abstr.html.

[12] Yuldashev T. K., Islomov B. I., Alikulov E. K. Boundary value problems for a loaded parabolic-hyperbolic equatons in infinite three dimensional domains third-order, Lobachevckii Journal of Mathematics, 2020, vol. 41, no. 5, pp. 926–944. DOI: 10.1134/s1995080220050145

[13] Tsybikov V. N. Well-Posedness of a Periodic problem for a multidimensional equation of mixed type,(In: Nonlocal partial defferential equations) Neklassicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki, Novosibirsk, 1985, pp. 201–205 (In Russian).

[14] Bitsadze A. V. On the problem for a multidimensional equation of mixed type, Dokl. AN. SSSR, 1956, vol. 110, no. 6, pp. 901–902 (In Russian).

[15] Bitsadze A. V. Uravnenie smeshannogo tipa [Mixed type equations], M. AN. SSSR, 1959, p. 164 (In Russian).

[16] Smirnov M. M. Uravneniya smeshannogo tipa [Mixed type equations], M. Nauka, 1970, p. 296 (In Russian).

[17] Vragov V. N. Kraevie zadachi dlya neklassicheskix uravnenii matematicheskoy fiziki [Boundary value problems for a non-classical equations of mathematical physics], Novosiborsk.: NGU, 1983, p. 84(In Russian).

[18] Ladijenskaya O. A. Smeshannaya zadacha dlya giperbolisheskogo uravnenie [Boundary value problems for Hyperbolic equations], M. Gostexizdat, 1953, p. 281 (In Russian).

[19] Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. Pure anf Appl. Math, 1962, vol. 15, no. 2, pp. 119–143.

[20] Krasnosel'skii M. A., Zabreyko P. P., Pustil'nik E. I., Sobolevskiy P. S. Integral'nie operatori v prostranstvax summiruemix funktcii [Integral operators in the spaces of integral functions]. M. AN. SSSR, 1966, p. 164 (In Russian).

[21] Ashurov R. R., Muxitdinova A. T. Inverse problem of determimg the heat source density for the subdiffusion equation, Differential equationd, 2020, vol. 56, no. 12, pp. 1550–1563. DOI: 10.1134/S00122661200120046

[22] Ashurov R. R., Muxitdinova A. T. Initial-boundary value problem for hyperbolic equations with an arbitrary order elliptic operator. Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki, 2020, vol. 30, no. 1, pp. 8–19. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-30-1-8-19 (In Russian).

[23] Alimov Sh. A. Fractional powers of elliptic operators and isomorphism of classes of differentiable functions, Differentsial'nie uravneniya, 1972, vol. 8, no. 9, pp. 1609–1626 (In Russian).

[24] Alimov Sh. A., Ashurov R. R., Pulatov A. K. Kratnie ryadi i integrali Fur'e [Multiple series and Fourier integrals], Itogi nauki i texn. Ser. Sovr. Problemi matematiki. Fund. napravleniya, 1989, vol. 42, pp. 7–104 (In Russian).

[25] Sobolevskiy P. E. About functions of Green of any (in particular, integer) powers of elliptic operators, Dokl. AN SSSR, 1962, vol. 142, no. 4, pp. 804–807 (In Russian).

[26] Il'in V. A. On the solvability of power problems for the Hiperbolic and parabolic equations, Uspexi mat. Nauk, 1960, vol. 15, no. 2, pp. 97–154 (In Russian).

Ashurov Ravshan Radjabovich – D. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Head of Laboratory of Differential equations and their applications, Institute of Mathematics, Academy of sciences of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0000-0001-5130-466X.

Murzambetova Mexriban Begdullaevna – Teacher of the Faculty of Physics and Mathematics of the Nukus State pedagogical Institute named after Ajiniyaz, Nukus, Uzbekistan, ORCID 0000-0001-6704-0785.