МАТЕМАТИКА

УДК 517.958 Научная статья

Инвариантные многообразия и глобальный аттрактор обобщенного нелокального уравнения Гинзбурга-Ландау в случае однородных краевых условий Дирихле

А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова, 150003, г. Ярославль, ул. Советская 14, Россия

E-mail: anat_kulikov@mail.ru,kulikov_d_a@mail.ru

Рассматриваются два варианта обобщенного нелокального уравнения Гинзбурга-Ландау. Оба эти варианта изучаются вместе с однородными краевыми условиями Дирихле. Для соответствующих начально-краевых задач показано существование решений при всех положительных значениях эволюционной переменной. Для решений начально-краевых задач получены явные формулы в виде рядов Фурье. Изучены свойства решений соответствующих начально-краевых задач. Во второй части работы рассмотрен вопрос о существовании глобальных аттракторов для решений изучаемых краевых задач. Изучен вопрос о свойствах глобальных аттракторов. В частности, дан ответ о евклидовой размерности таких аттракторов. Приведены достаточные условия, при которых глобальный аттрактор будет конечномерным. Выделен вариант нелокального уравнения Гинзбурга-Ландау, когда глобальный аттрактор будет бесконечномерным.

Ключевые слова: нелокальное уравнение Гинзбурга-Ландау, краевые и начально-краевые задачи, глобальная разрешимость, инвариантные многообразия, глобальные аттракторы, размерность, структура глобальных аттракторов.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-38-1-9-27

Поступила в редакцию: 01.02.2022 В окончательном варианте: 18.04.2022

Для цитирования. Куликов А. Н., Куликов Д. А. Инвариантные многообразия и глобальный аттрактор обобщенного нелокального уравнения Гинзбурга-Ландау в случае однородных краевых условий Дирихле // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2022. Т. 38. № 1. C. 9-27. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-38-1-9-27

Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2022-886).

Введение

В математической физике можно отметить несколько нелинейных уравнений с частными производными, исследование которых в достаточной степени актуальны. Одним из таких является следующее нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными

$$u_t = \gamma u - (d + ic)u|u|^2 + (a + ib)u_{xx}, \tag{1}$$

где $\gamma, d, c, a, b \in \mathbb{R}, d > 0, a \geq 0$, $u = u(t,x) = u_1(t,x) + iu_2(t,x)$ – комплекснозначная функция, $|u|^2 = u_1^2 + u_2^2$. Уравнение (1) принято называть комплексным уравнением Гинзбурга-Ландау [1,2]. Свою популярность это уравнение получило прежде всего как математическая модель, которая используется во многих разделах физики (см., например, [3-6]). В связи с рядом приложений рассматривают различные обобщения и модификации уравнения (1).

Одной из таких модификаций будет интегро-дифференциальное уравнение

$$u_t = \gamma u - (d + ic)uV(u) + (a + ib)u_{xx}, \tag{2}$$

где

$$V(u) = \frac{1}{l}\int_0^l |u(t,x)|^2 dx,$$

если $x \in [0,l], l > 0$. Уравнение (2) и его варианты возникают при изучении такого явления как ферромагнетизм [7,8]. Уравнение (2) получило название "нелокальное уравнение Гинзбурга-Ландау". Это же название будет использовано для модификаций уравнения (2).

В статье [9] уравнение (2) изучалось вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + l) = u(t,x). \tag{3}$$

При этом без нарушения общности можно считать, что после перенормировки пространственной переменной $l = 2\pi$.

В работе [10] была рассмотрена краевая задача (КЗ) (2), (3) в случае, если $a = 0$. Такой вариант уравнений (1),(2), обычно, называют слабодиссипативным вариантом уравнения Гинзбурга-Ландау, если речь идет об уравнении (1), то иногда его называют обобщенным кубическим уравнением Шредингера. Действительно, если в уравнении (1) положить равным нулю не только коэффициент a, но также d и γ, то получим одну из версий кубического уравнения Шредингера.

В данной работе будет рассмотрено уравнение, которое является обобщенным вариантом уравнения (2). При этом это уравнение будет дополнено однородными краевыми условиями Дирихле. Для такой КЗ будет рассмотрен аналогичный круг вопросов, изученных ранее в работах авторов [9,10] для КЗ (2), (3). В статьях [9,10] КЗ (2), (3) была дополнена начальным условием

$$u(0,x) = f(x) \tag{4}$$

и для начально-краевой задачи (2), (3), (4) было доказано существование решений при всех $t > 0$, а также существование глобального аттрактора в смысле определений и концепций, изложенных в первых главах монографий [11,12]. При этом оказалось, что если в уравнении (2) $a > 0$, то глобальный аттрактор имеет конечную евклидову размерность и он бесконечномерный при $a = 0$.

Постановка задачи

Далее будем рассматривать обобщенный вариант нелокального уравнения Гинзбурга-Ландау (НУГЛ), который после нормировок $x \to \gamma_1 x, t \to \gamma_2 t, u \to \gamma_3 u$, может быть записан в следующей форме

$$u_t = \gamma u - (1+ic)uV(u) + (a+ib)u_{xx} - (d+ig)u_{xxxx}. \qquad (5)$$

В уравнении (5) $u = u(t,x), x \in [0,\pi], \gamma, c, a, b, d, g \in \mathbb{R}$ и можно считать, что $\gamma = \pm 1$ или 0. Будем также считать, что при выборе коэффициентов возможны следующие три варианта:

1) $d > 0$, коэффициент a может быть любым;
2) $d = 0$, $a > 0$;
3) $d = 0$, $a = 0$.

Сразу подчеркнем, что третий вариант требует отдельного изучения. Наконец, теперь в уравнении (5)

$$V(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |u(t,x)|^2 dx.$$

В данной работе интегро-дифференциальное уравнение (5) будем рассматривать вместе с краевыми условиями

$$u(t,0) = u(t,\pi) = u_{xx}(t,0) = u_{xx}(t,\pi) = 0. \qquad (6)$$

Обычно краевые условия (6) называются однородными краевыми условиями Дирихле. В теории упругости краевые условия (6) принято называть условиями шарнирного опирания. Естественно, это уравнение (5) может быть дополнено иными краевыми условиями. Например,

$$u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = u_{xxx}(t,0) = u_{xxx}(t,\pi) = 0 \qquad (7)$$

или периодическими краевыми условиями

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x).$$

Краевые условия (7) часто называют однородными краевыми условиями Неймана.

В данной работе сосредоточим внимание на изучении КЗ (5), (6). Дополним КЗ (5),(6) начальным условием

$$u(0,x) = f(x). \qquad (8)$$

Будут изучены вопросы:

1) о существовании решений при всех $t > 0$ начально-краевой задачи (5), (6), (8);

2) о существовании и свойствах глобального аттрактора A_g у этой же КЗ.

Следуя определениям из монографий [11,12], множество A_g назовем глобальным аттрактором, если оно обладает следующими свойствами:

1) оно является инвариантным, т.е. из включения $f(x) \in A_g$ следует, что решение $u(t,x) \in A_g$ при всех $t > 0$;

2) все решения начально-краевой задачи с начальными условиями $f(x) \notin A_g$ с течением времени приближаются к A_g в смысле естественной нормы пространства начальных условий.

Замечание 1. В некоторых случаях эти последние два пункта определения глобального аттрактора дополняют иным требованием. Например, замкнутости A_g, конечномерности и т.д. Их будем в данной работе относить к свойствам глобального аттрактора A_g.

О глобальной разрешимости начально-краевой задачи

В этом разделе рассмотрим начально-краевую задачу (5), (6), (8) в первых двух случаях выбора коэффициентов уравнения (5), т.е. далее считаем, что $d > 0$ или $d = 0, a > 0$. Основное внимание будет уделено варианту $d > 0$. При выполнении условий $d = 0, a > 0$ построения в целом повторяются, разнятся в непринципиальных деталях.

Для решений начально-краевой задачи (5), (6), (8) справедливо представление в виде ряда Фурье

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx, \tag{9}$$

где $u_n(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} u(t,x)\sin nx dx, n = 1,2,3,\ldots$ Аналогичное разложение возможно для функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin nx, \; f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Если теперь подставить ряд (9) в уравнение (5), то для $u_n(t)$ получим бесконечную последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_n' = (a_n + ib_n)u_n - (1+ic)u_n V(u), \tag{10}$$

которую можно дополнить в силу (8) начальными условиями

$$u_n(0) = f_n. \tag{11}$$

После перехода от КЗ (5), (6), (8) к записи ее в виде бесконечной последовательности задач Коши (10), (11) получаем в силу равенства Парсеваля, что $V(u) = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)|^2$. Наконец, $a_n = \gamma - an^2 - dn^4, b_n = -bn^2 - gn^4$.

Замечание 2. Отметим, что условие $f_k = 0$ для $k \in \mathbb{N}_*$ – некоторого подмножества множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ выделяет инвариантное подпространство в пространстве решений задачи Коши (10), (11).

Действительно, условие $f_k = 0$ влечет выполнение равенств $u_k(t) = 0$ при $t > 0$ для тех k, которые принадлежат $\mathbb{N}_*$.

Положим

$$u_n(t) = \rho_n(t)\exp(i\varphi_n(t)),\ f_n = r_n\exp(i\psi_n), \tag{12}$$

где $\rho_n(t) > 0, r_n > 0, \varphi_n(t), \psi_n \in \mathbb{R}$. В результате получим две последовательности задач Коши для $\rho_n(t), \varphi_n(t)$ соответственно

$$\rho_n' = a_n\rho_n - \rho_n V, \tag{13}$$

$$\rho_n(0) = r_n, \tag{14}$$

$$\varphi_n' = b_n - cV, \tag{15}$$

$$\varphi_n(0) = \psi_n, \tag{16}$$

где теперь $V = V(\rho) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n^2$. Случай, когда $r_k = 0$ или $\rho_k(t_0) = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$ и $t = t_0$ можно исключить в силу замечания 2, которое предшествует замене (12).

Пусть $k \neq 1$. Рассмотрим два уравнения системы дифференциальных уравнений (13) с номерами k и 1 соответственно

$$\rho_k' = a_k\rho_k - \rho_k V,\ \rho_1' = a_1\rho_1 - \rho_1 V. \tag{17}$$

Если теперь первое из этих уравнений домножить на ρ_1, а второе на ρ_k и после этого вычесть из второго уравнения первое, то получим равенство

$$\rho_k'\rho_1 - \rho_k\rho_1' = \beta_k\rho_k\rho_1,$$

где $\beta_k = a_k - a_1$ или иначе $\beta_k = a(1-k^2) + d(1-k^4) = (1-k^2)(a + d(1+k^2))$. После преобразований получим дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{\rho_k}{\rho_1}\right)' = \beta_k\frac{\rho_k}{\rho_1},\ k = 2, 3, \ldots$$

Откуда заключаем, что с учетом начальных условий справедливы равенства

$$\rho_k(t) = \frac{r_k}{r_1}\rho_1(t)\exp(\beta_k t),\ k = 2, 3, \ldots \tag{18}$$

Равенство (18) позволяет записать уравнение с номером $k = 1$ системы дифференциальных уравнений (13) в виде

$$\rho_1' = a_1\rho_1 - \frac{\rho_1^3}{r_1^2}S(t), \tag{19}$$

где, естественно, $\rho_1(0)=r_1$. Наконец, $S(t)=\sum_{k=1}^{\infty} r_k^2\exp(2\beta_k t)$. Очевидно, что $\lim_{k\to\infty}\beta_k=-\infty$ и, следовательно, ряд $S(t)$ сходится, если, считать, что $f(x)$ как минимум принадлежит $\mathbb{L}_2(0,\pi)$, состоящим из тех функций, для которых $\int_0^{\pi}|f(x)|^2dx<\infty$.

Пусть на первом этапе справедливо предположение, что $a_k\neq 0$ при всех k (β_k отлично от $-a_1$ при всех k). Найдем в таком случае решение уравнения Бернулли (19) с учетом начального условия $\rho_1(0)=r_1$. Для $y_1(t)=1/\rho_1^2(t)$ имеем линейное дифференциальное уравнение

$$y_1'=-2a_1y_1+2S(t)\frac{1}{r_1^2}\ \left(y_1(0)=\frac{1}{r_1^2}\right).$$

Откуда находим, что

$$y_1(t)=\frac{\exp(-2a_1t)}{r_1^2}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r_m^2}{a_m}(\exp(2a_mt)-1)\right).$$

Следовательно,

$$\rho_1(t)=\frac{r_1\exp(a_1t)}{\sqrt{1+Q(t)}}.$$

Наконец, из равенства (18) вытекает, что

$$\rho_k(t)=\frac{r_k\exp(a_kt)}{\sqrt{1+Q(t)}},\ k=2,3,\ldots$$

В последних двух равенствах и далее используется обозначение

$$Q(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k^2}{a_k}(\exp(2a_kt)-1).$$

Отметим справедливость следующих свойств функции $Q(t)$:

1) функция $Q(t)$ имеет производные любого порядка, если $t>0$;
2) $Q'(t)>0$ при $t>0$;
3) $Q(0)=0, Q(t)>0$, если $t\in(0,\infty)$.

Их проверка достаточно стандартна и основывается на нескольких простых замечаниях.

Во-первых, почленное дифференцирование ряда для $Q(t)$ приводит к следующим равенствам

$$Q^{(p)}(t)=2^p\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{p-1}r_k^2\exp(2a_kt),$$

где $p=1,2,\ldots$. При любом $p\in\mathbb{N}$ и $t\in[t_1,t_2], 0<t_1<t_2$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{p-1}r_k^2\exp(2a_kt)$$

сходится равномерно. В свою очередь, проверка последнего замечания использует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r_k^2$, а также то обстоятельство, что

$$a_k \leq -\frac{d}{2}k^4,$$

если $k \geq m(d)$.

Во-вторых, $Q'(t) = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} r_k^2 \exp(2a_k t)$ и поэтому $Q'(t) > 0$.

Наконец, равенство $Q(0) = 0$ очевидно.

Подчеркнем, что $V(\rho) = \dfrac{1}{1+Q(t)}\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_k^2 \exp(2a_k t)$, а также, что правые части уравнений (15) не зависят от φ_k. Простым интегрированием находим, что из уравнений (15) и начальных условий (16) вытекает равенство

$$\varphi_k(t) = \xi_k(t) + \psi_k,\ \xi_k(t) = b_k t - \frac{c}{2}\ln(1+Q(t)).$$

Следовательно,

$$u_k(t) = \frac{f_k}{\sqrt{1+Q(t)}}\exp(a_k t + i\xi_k(t)), \tag{20}$$

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k \exp(a_k t + i\xi_k(t))}{\sqrt{1+Q(t)}}\sin kx. \tag{21}$$

В формулах (20), (21) было использовано равенство $f_k = r_k \exp(i\psi_k)$. Достаточно стандартным образом проверяется, что при $t > 0$ функция $u(t,x)$ определенная рядом (21) имеет производные любого порядка, а также, что

$$\lim_{t\to+0} u(t,x) = f(x),$$

где последний предел понимаем в смысле нормы в пространстве $\mathbb{L}_2(0,\pi)$, т.е. выполнено предельное равенство $\lim\limits_{t\to+0} ||u(t,x) - f(x)||_{\mathbb{L}_2(0,\pi)} = 0$.

Замечание 3. Был рассмотрен вариант, когда $a_k \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Возможны варианты, если $a_k = 0$ при некоторых k. Очевидно, что таких вариантов может быть только два:

1) $a_m = 0$, при одном $m \in \mathbb{N}$;

2) $a_{m_1} = a_{m_2} = 0$, где $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$.

Эти два особых варианта рассматриваются аналогично и все формулы, полученные ранее сохраняются с небольшими изменениями:

1) Если $a_m = 0$ при одном $m \in \mathbb{N}$, то во всех последних формулах $Q(t)$ следует заменить на

$$Q_1(t) = \sum_{k\neq m} \frac{r_k^2}{a_k}(\exp(2a_k t) - 1) + r_m^2 t.$$

2) Если $a_{m_1} = a_{m_2} = 0$, то $Q(t)$ следует заменить на

$$Q_2(t) = \sum_{k\neq m_1, k\neq m_2} \frac{r_k^2}{a_k}(\exp(2a_k t) - 1) + (r_{m_1}^2 + r_{m_2}^2)t.$$

Итак, справедливо утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $d > 0$ *или* $d = 0, a > 0$, *а* $f(x) \in \mathbb{L}_2(0,\pi)$. *Тогда начально-краевая задача (5), (6), (8) имеет решение* $u(t,x)$, *для которого справедлива формула (21). Функция* $u(t,x)$ *при* $t > 0$ *имеет производные любого порядка* ($u(t,x) \in \mathbb{C}^\infty$). *Наконец,*

$$\lim_{t\to+0} u(t,x) = f(x)$$

и этот предел понимаем в смысле нормы в пространстве $\mathbb{L}_2(0,\pi)$.

Если же $f(x) \in \mathbb{W}_2^p[0,\pi]$, *то предельный переход понимаем в смысле нормы в пространстве Соболева* $\mathbb{W}_2^p[0,\pi]$.

В заключении этого раздела напомним, что $a_n = \gamma - an^2 - dn^4$, т.е. при всех γ ($\gamma = \pm 1$ или 0) справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^4} = -d < 0.$$

В частности, это свойство последовательности $\{a_n\}$ обеспечивает сходимость ряда в правой части равенства (21). Детальное исследование сходимости ряда в правой части равенства (21) повторяет основные моменты проверки сходимости ряда при выводе формулы для решения первой КЗ уравнения теплопроводности в случае однородных краевых условий (см., например, [13]).

О разрешимости начально-краевой задачи в слабодиссипативном случае.

Рассмотрим вопрос о разрешимости начально-краевой задачи (5), (6), (8), если $a = d = 0$. В основной части этого раздела предполагаем, что $\gamma \neq 0$. В данном случае $a_n = \gamma$, $b_n = -bn^2 - gn^4$.

Для решений начально-краевой задачи (5), (6), (8) возможна запись в виде ряда (9) и ее сведение к системе дифференциальных уравнений (10), дополненных начальными условиями (11), а также соответствующий переход к задачам Коши (13), (14) и (15), (16). Но теперь $\beta_n = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Поэтому в таком частном варианте получаем, что

$$\rho_k(t) = r_k \frac{\exp(\gamma t)}{\sqrt{1 + Q_0(t)}},$$

где теперь вместо $Q(t)$ в равенствах, определяющих $\rho_k(t)$, используется следующая функция

$$Q_0(t) = (\exp(2\gamma t) - 1)\frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{\infty} r_k^2.$$

Следовательно, $u_k(t) = \dfrac{f_k}{\sqrt{1+Q_0(t)}}\exp(\gamma t + i\nu_k(t))$,

$$u(t,x) = \frac{\exp(\gamma t)}{\sqrt{1+Q_0(t)}}\sum_{k=1}^{\infty} f_k \exp(i\nu_k(t))\sin kx, \qquad (22)$$

где в данном случае $\nu_k(t) = b_k t - (c/2)\ln(1+Q_0(t))$. Подчеркнем, что ряд (22) сходится при всех $t \geq 0$ и имеет производные $u_t, u_{xxxx} \in \mathbb{L}_2(0,\pi)$, если функция $f(x) \in \mathbb{W}_2^4[0,\pi]$ и удовлетворяет краевым условиям (6).

Итак, справедливо утверждение, если, конечно, $a = d = 0$.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in \mathbb{W}_2^4[0,\pi]$ и удовлетворяет краевым условиям (6). Тогда начально-краевая задача (5), (6), (8) имеет решение при всех $t \geq 0$. Это решение может быть представлено в виде ряда (22).*

Особо отметим, что справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0} u(t,x) = f(x)$$

и предельный переход следует понимать в смысле нормы пространства функций, принадлежащих $\mathbb{W}_2^4[0,\pi]$.

При $\gamma = 0$ теорема 2 остается справедливой, но следует изменить формулу (22). В ней функцию $Q_0(t)$ заменяем на $2V_0 t\,(V_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} r_k^2)$.

Инвариантные многообразия и глобальный аттрактор

В данном разделе изучим соответствующие вопросы, если $d > 0$ или $d = 0$, но $a > 0$. Вариант $a = d = 0$ будет изучаться отдельно в следующем пункте.

Как и в двух предыдущих разделах анализ КЗ (5), (6) может быть сведен к изучению системы дифференциальных уравнений (10), а затем к анализу системы дифференциальных уравнений (13), (15).

Сначала рассмотрим вспомогательный вопрос о существовании состояний равновесия у системы дифференциальных уравнений (13). Координаты состояний равновесия следует искать как решения бесконечной системы алгебраических уравнений

$$\rho_k(a_k - V(\rho)) = 0,\ k = 1,2,3,\ldots \qquad (23)$$

Если все $\rho_k = 0$, то получаем нулевое состояние равновесия, которое существует при любом наборе коэффициентов. Иной вариант возможен, если выполнены равенства

$$a_k - V(\rho) = 0\ \ (a_k = \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^2). \qquad (24)$$

Отметим сразу, что последние равенства могут быть выполнены при тех номерах k, когда $a_k > 0$. Более того, для такого набора $k : k_1,\ldots,k_p$ должны быть выполнены равенства $a_{k_1} = a_{k_2} = \ldots = a_{k_p}$. Поэтому возможны лишь следующие варианты:

1) $\rho_m^2 = a_m(\rho_m = \sqrt{\gamma - am^2 - dm^4})$, при одном из допустимых $m(a_m > 0)$ и $a_k = 0, k \neq m$;

2) $a_{m_1} = a_{m_2}(\gamma - am_1^2 - dm_1^4 = \gamma - am_2^2 - dm_2^4)$ и тогда $\rho_{m_1}^2 + \rho_{m_2}^2 = a_{m_1}, a_k = 0, k \neq m_1, m_2$.

Иных вариантов для выбора решений у системы алгебраических уравнений (24) не существует, так как уравнение $\gamma - ax^2 - dx^4 = \mu(\mu \in \mathbb{R})$ не может иметь более двух натуральных корней. Из последних рассуждений следует, что система дифференциальных уравнений (13) может иметь следующие состояния равновесия:

1) $S_0 : \rho_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$;

2) $S_m : \rho_m = \sqrt{a_m}$, если при некотором натуральном m справедливо неравенство $a_m > 0, \rho_k = 0$ при $k \neq m$;

3) $S_{m_1,m_2} : \rho_{m_1}^2 + \rho_{m_2}^2 = a_{m_1}$ или a_{m_2}, если $a_{m_1} = a_{m_2}$ и $a_{m_1} > 0$, а $a_k = 0$ при $k \neq m_1, m_2$.

Состоянию равновесия S_m системы дифференциальных уравнений (13) соответствует цикл C_m системы дифференциальных уравнений (10)

$$u_m(t) = \rho_m \exp(i\omega_m t + i\psi_m), u_k = 0, \tag{25}$$

где $\psi_m \in \mathbb{R}, \omega_m = (-bm^2 - gm^4) - ca_m, k \neq m$, а также одномодовый цикл A_m КЗ (5), (6)

$$A_m : u(t,x) = u_m(t)\sin mx \ (\dim A_m = 1).$$

Однопараметрическому семейству состояний равновесия S_{m_1,m_2} системы дифференциальных уравнений (13) соответствует инвариантное многообразие системы дифференциальных уравнений (10)

$$C_{m_1,m_2} : u_{m_1}(t) = \rho_{m_1}\exp(i\omega_{m_1}t + i\psi_{m_1}),\ u_{m_2}(t) = \rho_{m_2}\exp(i\omega_{m_2}t + i\psi_{m_2}),\ u_k = 0,$$

где $k \neq m_1, m_2, \psi_{m_1}, \psi_{m_2} \in \mathbb{R}$, $\omega_{m_1} = -bm_1^2 - gm_1^4 - ca_{m_1}, \omega_{m_2} = -bm_2^2 - gm_2^4 - ca_{m_2}$, а также инвариантное многообразие A_{m_1,m_2} КЗ (5), (6) сформированное двухмодовыми решениями

$$u(t,x) = \rho_{m_1}\exp(i\omega_{m_1}t + i\psi_{m_1})\sin m_1 x + \rho_{m_2}\exp(i\omega_{m_2}t + i\psi_{m_2})\sin m_2 x, \tag{26}$$

где $\rho_{m_1}^2 + \rho_{m_2}^2 = a_{m_1} = a_{m_2} > 0$. Очевидно, что $\dim A_{m_1,m_2} = \dim C_{m_1,m_2} = 3$. Отметим, что в ситуации общего положения $\omega_{m_1}/\omega_{m_2}$ – иррациональное число и решения, принадлежащие A_{m_1,m_2} по переменной t, будут квазипериодическими функциями с базисом частот $\omega_{m_1}, \omega_{m_2}$.

Пусть

$$A_g = E_0 \bigcup_m A_m \bigcup_{m_1,m_2} A_{m_1,m_2},$$

где E_0 – нулевое состояние равновесия, A_m – одномерные инвариантные многообразия (циклы), A_{m_1,m_2} – трехмерные инвариантные многообразия КЗ (5),(6), сформированные одно и двухмодовыми решениями (25) и (26) соответственно (если такие решения существуют). Ясно, что A_g – инвариантное многообразие КЗ (5),(6). Более того, справедливо утверждение.

Теорема 3. *A_g – глобальный аттрактор для решений начально-краевой задачи (5), (6), (8) (в смысле классических определений из гл. 1 монографии [11] и гл. 1 монографии [12]).*

Если при всех натуральных k справедливы неравенства $a_k \leq 0$, то все $\rho_k(t) \to 0$, если $t \to \infty$. Действительно, в таком случае правая часть любого из уравнений системы (13) отрицательна, т.е. $\rho_k' < 0$, если не все $f_k = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} \rho_k(t) = 0$. Поэтому все решения системы дифференциальных уравнений (13) и все решения КЗ (5),(6) стремятся к нулю, т.е. $A_g = E_0$ (остальные компоненты A_g отсутствуют).

Перейдем теперь к более содержательному случаю, когда существуют такие k, что $a_k > 0$. Множества таких a_k обозначим M_+, а набор индексов у его элементов обозначим $N_+ \subset N$. Ясно, что оба множества (M_+ и N_+) имеют конечный набор элементов, так как $a_k \to -\infty$, если $k \to \infty$.

Основным моментов доказательства теоремы 3 будет доказательство вспомогательного и аналогичного утверждения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (13). Пусть $B_g = B_0 \bigcup\limits_m S_m \bigcup\limits_{m_1,m_2} S_{m_1,m_2}$, где B_0 – нулевое состояния равновесия системы дифференциальных уравнений (13), $\bigcup\limits_m S_m$ – объединение всех состояний равновесия первого типа, а $\bigcup\limits_{m_1,m_2} S_{m_1,m_2}$ – объединение всех однопараметрических семейств состояний равновесия второго типа (если, конечно, такие существуют). Подчеркнем, что в ситуации общего положения многообразия S_{m_1,m_2} отсутствуют. Равенства $a_{m_1} = a_{m_2}$, т.е.

$$\gamma - am_1^2 - dm_1^4 = \gamma - am_2^2 - dm_2^4 \text{ или } (m_2^2 - m_1^2)(a + d(m_1^2 + m_2^2)) = 0,$$

где $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ могут быть выполнены при специальном выборе a и d.

Справедливо утверждение.

Лемма. *Множество B_g – глобальный аттрактор для решений системы дифференциальных уравнений (13).*

Для обоснования последнего утверждения достаточно доказать, что все решения задачи Коши (13), (14) при любых начальных условиях стремятся либо к S_m, либо к S_{m_1,m_2}, либо к нулевому состоянию равновесия B_0.

Пусть реализован общий случай, когда S_{m_1,m_2} отсутствуют, но S_m существуют. Множество M_+ можно упорядочить (расположить в порядке убывания):

$$a_{m_1} > a_{m_2} > \ldots > a_{m_s}.$$

Кроме того, будем считать, что $a_l \neq 0$, если $l \notin M_+$. Пусть сначала $r_{m_1} \neq 0$. Тогда все решения системы дифференциальных уравнений (13) приближаются к S_{m_1}, если $t \to \infty$. Напомним, что

$$\rho_n = r_n \frac{\exp(a_n t)}{\sqrt{1 + Q(t)}}, n = 1, 2, \ldots,$$

где $1+Q(t)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{r_n^2}{a_n}(\exp(2a_nt)-1)$. В свою очередь, можно отметить, что

$$1+Q(t)=\exp(2a_{m_1}t)\Big(\frac{r_{m_1}^2}{a_{m_1}}+Q_*(t)\Big),\ Q_*(t)=\exp(-2a_{m_1}t)\Big(1-\frac{r_{m_1}^2}{a_{m_1}}+\sum_{n\neq m_1}\frac{r_n^2}{a_n}(\exp(2a_nt)-1)\Big).$$

Очевидно, что $Q_*(t)\to 0$ при $t\to\infty$, так как, в частности, $a_{m_1}>a_n$ при любом $n\neq m_1$. При этом

$$\lim_{t\to\infty}\rho_n(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{r_n\exp((a_n-a_{m_1})t)}{\sqrt{\frac{r_{m_1}^2}{a_{m_1}}+Q_*(t)}}=0,$$

если $n\neq m_1$. Наконец, если $n=m_1$, то

$$\lim_{t\to\infty}\rho_{m_1}(t)=\sqrt{a_{m_1}}.$$

Пусть теперь $r_{m_1}=0$. Тогда $\rho_{m_1}(t)=0$. Далее рассматриваем систему дифференциальных уравнений (13), в которой "удаляем" уравнение с номером m_1. Если же теперь $r_{m_2}\neq 0, m_2\in\mathbb{N}_+$, то все решения системы дифференциальных уравнений (13) приближаются к S_{m_2}. При $r_{m_2}=0$, но $r_{m_3}\neq 0, m_3\in\mathbb{N}_+$ решения стремятся к S_{m_3} и так далее. Если оказалось, что $M_+=\emptyset$, то все $\rho_n\to 0$, при $t\to\infty$.

Пусть оказалось, что S_{m_1,m_2} существуют и $a_{m_1}=a_{m_2}$, а также $r_{m_1}^2+r_{m_2}^2\neq 0$, то практически дословно повторяя предыдущие построения, получаем что:

$$\lim_{t\to\infty}\rho_n(t)=0, n\neq m_1,m_2;\ \lim_{t\to\infty}\rho_{m_1}(t)=\sqrt{a_{m_1}}\frac{r_{m_1}}{\sqrt{r_{m_1}^2+r_{m_2}^2}};$$

$$\lim_{t\to\infty}\rho_{m_2}(t)=\sqrt{a_{m_2}}\frac{r_{m_2}}{\sqrt{r_{m_1}^2+r_{m_2}^2}}.$$

Очевидно, что $(\sqrt{a_{m_1}}\frac{r_{m_1}}{\sqrt{r_{m_1}^2+r_{m_2}^2}})^2+(\sqrt{a_{m_2}}\frac{r_{m_2}}{\sqrt{r_{m_2}^2+r_{m_2}^2}})^2=a_{m_1}$.

Учитывая, что состоянию равновесия S_{m_1} соответствует цикл A_{m_1} КЗ (5), (6), а семейству состояний равновесия S_{m_1,m_2} трехмерное инвариантное многообразие A_{m_1,m_2}, то можно завершить доказательство теоремы 3.

Вторая часть доказательства теоремы 3 детализируется достаточно стандартно. Отметим также, что она изложена достаточно подробно в статье [9], где рассматривалась периодическая КЗ для первоначального варианта НУГЛ. Но в этой части доказательства теоремы 3 изменение краевых условий и модификация уравнения уже не играет принципиальной роли.

Из доказательства теоремы 3, в частности, вытекает следующее. Все решения КЗ (5), (6) (начально-краевой задачи (5), (6), (8)) с течением времени приближаются к одной из компонент A_g. В ситуации общего положения к компоненте A_{m_1}, где ее номер равен номеру коэффициента $a_{m_1}=$

$\max\limits_{j\in\mathbb{N}+} a_j$, если этот максимум реализуется на одном элементе или к A_{m_1,m_2}, если $a_{m_1} = \max\limits_{j\in\mathbb{N}+}(a_j)$ и $a_{m_2} = \max\limits_{j\in\mathbb{N}+}(a_j)$, т.е. к компоненте, которую можно назвать доминирующей. Это инвариантное многообразие (A_{m_1}, например) и будет притягивающим (асимптотически устойчивым) в смысле определения устойчивости для инвариантных многообразий. Остальные, компоненты (если, конечно, существуют) будут в строгом смысле седловыми. Но их присутствие в A_g не устранимо, так как есть решения КЗ (5), (6), которые к ним стремятся.

Наконец, пусть $f(x)$ таковы, что все $f_m = 0$, где f_m коэффициенты Фурье с номерами $m \in \mathbb{N}_+$. Тогда, повторив предшествующие построения, можно показать, что:

1) $u_m(t) = 0$, если $m \in \mathbb{N}_+$;
2) $\lim\limits_{t\to\infty} u_k(t) = 0$, если $k \notin \mathbb{N}_+$.

Откуда заключаем о том, что для соответствующего решения КЗ (5),(6) справедливо равенство $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x) = 0$, т.е. эти решения стремятся к E_0, где E_0 – нулевое состояние равновесия КЗ (5), (6).

Глобальный аттрактор в слабодиссипативном случае

В данном разделе рассмотрим вопрос о существовании глобального аттрактора в случае, если $a = d = 0$. От КЗ (5), (6), как и ранее, можно перейти к системе дифференциальных уравнений (10), а затем к системам (13), (15), в которых $a_n = \gamma, b_n = -bn^2 - gn^4$.

Итак, в этом случае система дифференциальных уравнений (13) может быть записана в следующем виде

$$\rho_j' = \rho_j(\gamma - V(\rho)), j = 1,2,\ldots$$

Если $\gamma = 0$ или -1, то $\rho_j' < 0$ и поэтому $\lim\limits_{t\to\infty} \rho_j(t) = 0$ при любом j. Следовательно, при $\gamma = 0$ или $\gamma = -1$ глобальным аттрактором будет нулевое состояния равновесия КЗ (5), (6). Содержательный случай возникает, если $\gamma = 1$.

Как и ранее начнем с анализа системы дифференциальных уравнений (13). Пусть $\rho_j(0) = r_j$ и рассмотрим многообразие, выделяемое равенством $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j^2 = 1$. Его обозначим S_∞. Данное многообразие, конечно, будет инвариантным для системы дифференциальных уравнений (13) в случае, когда $a, d = 0$. Действительно, в таком случае, если $\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_j^2 = 1, \rho_j' = 0$ и, следовательно, $\rho_j(t) = r_j$ при всех $t \geq 0$ и $j \in \mathbb{N}$.

Наконец, система дифференциальных уравнений (15) приобретает вид

$$\varphi_j' = \sigma_j,\ \sigma_j = b_j - c = -bj^2 - gj^4 - c.$$

После ее интегрирования получаем, что

$$\varphi_j(t) = \sigma_j t + \psi_j, \psi_j \in \mathbb{R}.$$

Поэтому, решения с начальными условиями, принадлежащими S_∞, соответствуют решениям системы дифференциальных уравнений (10) вида

$$u_j(t) = r_j \exp(i\sigma_j t + i\psi_j),\ j = 1,2,\ldots \tag{27}$$

Для этих решений справедливо равенство $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |u_j(t)|^2 = 1$ при всех $t \geq 0$. Наконец, решениям (27) соответствуют следующие решения уже КЗ (5), (6) $(a = d = 0)$

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \exp(i\sigma_j t) \sin jx,\ f_j = r_j \exp(i\psi_j). \tag{28}$$

Решения (28) формируют инвариантные многообразия A_∞ КЗ (5), (6).

Теорема 4. *Множество $A_{gl} = \{0\} \bigcup A_\infty$ является глобальным аттрактором для решений начально-краевой задачи (5), (6), (8).*

Ранее было показано, что A_{gl} является инвариантным многообразием. Для того чтобы доказать, что A_{gl} – глобальный аттрактор осталось показать, что все решения начально-краевой задачи (5), (6), (8) с начальными условиями $f(x) = u(0,x) \notin A_{gl}$ стремятся к A_{gl}, если $t \to \infty$.

Доказательство последнего утверждения может быть проведено как и в работе [10] с минимальными изменениями, несмотря на то, что в этой работе рассматривалась КЗ

$$u_t = u - (1+ic)u\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(t,x)|^2 dx - ibu_{xx},$$

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x).$$

Отметим, что как и в работе [10], основным моментом доказательства будет проверка того, что все решения системы (13) с начальными условиями, которые не принадлежат S_∞ и отличны от нуля хотя бы при некотором $j \in \mathbb{N}$ стремятся к S_∞. Как и в работе [10] в данном случае все решения КЗ (5), (6) стремятся к A_∞ и при этом в норме фазового пространства, т.е. в норме пространства Соболева $\mathbb{W}_2^4[0,\pi]$.

Подчеркнем, что в изучаемом здесь случае для КЗ (5),(6) $(a = d = 0)$, решение $u(t,x) \in A_{gl}(A_\infty)$, если $f(x) \in A_\infty \cap W_2^4[0,\pi]$. Наконец, уместно отметить, что при $u(0,x) = f(x) \notin A_{gl}$ соответствующие решения $u(t,x)$ стремятся к A_∞ и нулевое решение включено в A_{gl} по формальным причинам (см. определения глобального аттрактора из двух известных монографий [11,12]).

Заключение

В работе было показано, что при $d > 0$ (или $d = 0, a > 0$) КЗ (5), (6) имеет конечномерный аттрактор. В ситуации общего положения он имеет конечный набор одномерных компонент, каждая из которых сформирована одномодовыми периодическими решениями вида

$$u(t,x) = \eta \exp(i\omega t + i\varphi)\sin kx,$$

$k \in \mathbb{N}, \varphi \in \mathbb{R}$ и произвольно, т.е. будет циклом. Если $d > 0$, то в некоторых случаях этой компонентой может оказаться трехмерное инвариантное многообразие, заполненное квазипериодическими по t решениями. Нетрудно, привести пример, когда реализуется такая ситуация. Пусть $\gamma = -1, d = 3/4, a = -15/4$, а величины коэффициентов b и g произвольны. Тогда $a_1 = 2, a_2 = 2, a_j < 0$, если $j \geq 3$. В таком случае КЗ (5),(6) имеет решения

$$u(t,x) = \eta_1 \exp(i\omega_1 t + i\psi_1)\sin x + \eta_2 \exp(i\omega_2 t + i\psi_2)\sin 2x,$$

где $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 2, \omega_1 = -b - g - 2c, \omega_2 = -4b - 16g - 2c, \psi_j \in \mathbb{R}, j = 1,2$ и произвольны. В результате получили трехпараметрическое семейство решений. Подчеркнем, что в данном примере $m_1 = 1, m_2 = 2$.

Тем не менее в любом случае компоненты A_g – это многообразия размерности равной 1 или 3. При этом речь идет об эвклидовой размерности, а не фрактальной или размерности Хаусдорфа как это, обычно, бывает в работах посвященных изучению вопроса о существовании и свойствах глобальных аттракторов эволюционных уравнений с частными производными (см., например, [12]).

В данной работе также было показано, что при $a = d = 0$ (т.е. в слабодиссипативном варианте) глобальный аттрактор также существует. Этот аттрактор $A_{gl} = \{0\} \bigcup A_\infty$ является ограниченным и замкнутым множеством в $\mathbb{L}_2(0,\pi)$, но его евклидова размерность равна бесконечности и он не является компактным. Более того, множество A_∞ не является ограниченным в смысле нормы фазового пространства решений КЗ (5), (6), если $a = d = 0$ (в слабодиссипативном случае). Действительно, можно указать такую последовательность решений КЗ (5), (6), что:

1) $u_m(t,x) \in A_\infty$ при всех $t \geq 0$;

2) $||u_m(t,x)||_{\mathbb{W}_2^4[0,\pi]} \to \infty$, если $t = t_0 > 0$, когда $m \to \infty$.

Пусть соответствующее решение представимо в виде

$$u = u_m(t,x) = \exp(i\sigma_m t + imx)\sin mx,\ \sigma_m = -bm^2 - gm^4 - c.$$

Ясно, что $u_m(t,x) \in A_\infty$ при всех $t \geq 0$ и $m \in \mathbb{N}$. Но с другой стороны

$$||u_m(t,x)||^2_{\mathbb{W}_2^4[0,\pi]} = \frac{\pi(1 + m + m^2 + m^3 + m^4)}{2} \to \infty \text{ при } m \to \infty.$$

Такая ситуация не совсем удивительна, так как при $a = d = 0$ КЗ (5), (6) может быть проинтерпретирована как абстрактное дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве гиперболического типа в смысле определений (классификации) из работ [14,15]. Если $d > 0\,(d = 0, a > 0)$, то КЗ (5), (6) может быть включена в класс абстрактных параболических уравнений в смысле определений из работ [16,17]. Это различие приводит к достаточно разным результатам при анализе общего случая $(d > 0$ или $d = 0, a > 0)$ и слабодиссипативного варианта для НУГЛ.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы

[1] Kuramoto Y. Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 158 p.

[2] Aronson I. S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation // Rev. Mod. Phys. 2002. vol. 74. pp. 99–143. DOI:10.1103/RevModPhys.74.99.

[3] Bartuccelli M., Constantin P., Doering C. R., Gibbon J. D., Gisselfalt M. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg-Landau equation // Physica D. 1990. vol. 44. no. 3. pp. 421-444. pp. 99–143. DOI:10.1016/0167-2789(90)90156-J.

[4] Scheuer J., Malomed B. A. Stable and chaotic solutions of the complex Ginzburg–Landau equation with periodic boundary conditions // Physica D. 2002. vol. 161. no. 1-2. pp. 102-115. pp. 99–143. DOI:10.1016/S0167-2789(01)00363-3.

[5] Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. Нелинейная динамика. Подходы, результаты, надежды. М.: Едиториал УРСС, 2006. 280 с.

[6] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

[7] Elmer F. J. Nonlinear and nonlocal dynamics of spatially extended systems: stationary states, bifurcations and stability // Physica D. 1998. vol. 30. no. 3. pp. 321-341. pp. 99–143. DOI:10.1016/0167-2789(88)90024-3.

[8] Duan J., Hung V.L. Titi E.S. The effect of nonlocal interactions on the dynamics of the Ginzburg–Landau equation // ZAMP. 1996. vol. 47. pp. 432-455. DOI:10.1007/BF00916648.

[9] Kulikov A., Kulikov D. Invariant varieties of the periodic boundary value problem of the nonlocal Ginzburg–Landau equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. vol. 44. pp. 11985-11997. DOI: 10.1002/mma.7103.

[10] Куликов А. Н., Куликов Д. А. Инвариантные многообразия слабодиссипативного варианта нелокального уравнения Гинзбурга–Ландау // Автоматика и Телемеханика. 2021. Т. 2. С. 94-110. DOI: 10.31857/S0005231021020069.

[11] Temam R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. New-York: Springer-Verlag, 1997. 650 p.

[12] Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989. 293 с.

[13] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М.: Наука, 1977. 504 с.

[14] Segal I. Nonlinear semigroups // Ann. of Mathematics. 1963. vol. 78. pp. 339-364.

[15] Якубов С. Я. Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Труды ММО. 1970. Т. 23. С. 37-60.

[16] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

[17] Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Труды ММО. 1961. Т. 19. С. 297-350.

Куликов Анатолий Николаевич доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия, ORCID 0000-0003-0251-9562.

Куликов Дмитрий Анатольевич кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия, ORCID 0000-0002-6307-0941.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2022. vol. 38. no. 1. pp. 9–27. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

MSC 34K19,35A01,35Q56 Research Article

Invariant manifolds and the global attractor of the generalized nonlocal Ginzburg-Landau equation in the case of homogeneous Dirichlet boundary conditions

A. N. Kulikov, D. A. Kulikov

Demidov Yaroslavl State University, 150003, Yaroslavl, Sovetskaya st. 14, Russia
E-mail: anat_kulikov@mail.ru,kulikov_d_a@mail.ru

Two versions of the generalized nonlocal Ginzburg-Landau equation are considered. Both of these options are studied together with the homogeneous Dirichlet boundary conditions. For the corresponding initial-boundary value problems, the existence of solutions is shown for all positive values of the evolution variable. For solutions of initial-boundary value problems, explicit formulas are obtained in the form of Fourier series. The properties of solutions of the corresponding initial-boundary value problems are studied. In the second part of the work, the question of the existence of global attractors for solutions of the studied boundary value problems is considered. The question of the properties of global attractors is studied. In particular, an answer is given about the Euclidean dimension of such attractors. Sufficient conditions are given under which the global attractor will be finite-dimensional. A variant of the nonlocal Ginzburg-Landau equation is distinguished, when the global attractor is infinite-dimensional.

Key words: nonlocal Ginzburg-Landau equation, boundary and initial boundary value problems, global solvability, invariant manifolds, global attractors, dimension, structure of global attractors.

DOI: 10.26117/2079-6641-2022-38-1-9-27

Original article submitted: 01.02.2022 Revision submitted: 18.04.2022

For citation. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Invariant manifolds and the global attractor of the generalized nonlocal Ginzburg-Landau equation in the case of homogeneous Dirichlet boundary conditions. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2022, **38**: 1, 9-27. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-38-1-9-27

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

This work was carried out within the framework of a development programme for the Regional Scientific and Educational Mathematical Center of the Yaroslavl State University with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Agreement on provision of subsidy from the federal budget No. 075-02-2022-886).

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Acknowledgments. The authors are deeply grateful to the referee for a number of comments that contributed to the improvement of the article.

References

1. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence.* Berlin.: Springer-Verlag, 1984. 158 pp.
2. Aronson I. S., Kramer L. The world of the complex Ginzburg-Landau equation, *Rev. Mod. Phys.*, 2002. vol. 74, pp. 99–143 DOI: 10.1103/RevModPhys.74.99.
3. Bartuccelli M., Constantin P., Doering C. R., Gibbon J. D., Gisselfalt M. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg-Landau equation, *Physica D*, 1990. vol. 44, no. 3, pp. 421–444 DOI: 10.1016/0167-2789(90)90156-J.
4. Scheuer J., Malomed B.A. Stable and chaotic solutions of the complex Ginzburg–Landau equation with periodic boundary conditions, *Physica D*, 2002. vol. 161, no. 1-2, pp. 102-115 DOI: 10.1016/S0167-2789(01)00363-3.
5. Malinetskiy G. G., Potapov A. B., Podlazov A. V. *Nelineyniya dinamica. Podchody, resultaty, nadezhdy [Nonlinear dynamics. Approaches, results, hopes]*. Moscow: Editorial URSS, 1971. 436 c. (In Russian)
6. Whitham G. B. *Lineyniye i nelineyniye volny [Linear and Nonlinear Waves]*. Moscow: Mir, 1977. 622 c. (In Russian)
7. Elmer F. J. Nonlinear and nonlocal dynamics of spatially extended systems: stationary states, bifurcations and stability, *Physica D*, 1998. vol. 30, no. 3, pp. 321-341 DOI: 10.1016/0167-2789(88)90024-3.
8. Duan J., Hung V.L. Titi E.S. The effect of nonlocal interactions on the dynamics of the Ginzburg–Landau equation, *ZAMP*, 1996. vol. 47, pp. 432-455 DOI: 10.1007/BF00916648.
9. Kulikov A., Kulikov D. Invariant varieties of the periodic boundary value problem of the nonlocal Ginzburg–Landau equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021. vol. 44, pp. 11985-11997 DOI: 10.1002/mma.7103.
10. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Invariant Manifolds of a Weakly Dissipative Version of the Nonlocal Ginzburg–Landau Equation, *Automation and Remote Control*, 2021. Т. 82, №2, С. 264-277 DOI: 10.1134/S0005117921020065.
11. Temam R. *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.* New-York: Springer-Verlag, 1997. 650 pp.
12. Babin A. V., Vishik M. I. *Attractory evolutsionych uravneliy [Attractors of Evolution Equations]*. Moskva: Nauka, 1989. 293 c. (In Russian)
13. Mizohata S. *Teoriya uravneniy s chastnimi proisvodnymi [The Theory of Partial Differential Equations]*. Moscow: Nauka, 1977. 504 c. (In Russian)
14. Segal I. Nonlinear semigroups, *Ann. of Mathematics*, 1963. vol. 78, pp. 339-364.
15. Solvability of the Cauchy problem for abstract second-order quasilinear hyperbolic equations and their applications, *Trudy MMO*, 1970. Т. 23, С. 37-60 (In Russian).
16. *Lineyniye differentsialniye uravneniya v banachovom prostranstve [Linear differential equations in a Banach space]*. Moskva: Nauka, 1967. 464 c. (In Russian)
17. Sobolevskii P. E. On equations of parabolic type in a Banach space, *Trudy MMO*, 1961. Т. 19, С. 297-350 (In Russian).

Kulikov Anatoliy Nicolaevich D. Sci. (Phys & Math.), Prof. of Differ. Equation Depart. of Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia, ORCID 0000-0003-0251-9562.

Kulikov Dmitriy Anatolievich Ph. D. (Phys & Math.), Associate Professor of Differ. Equation Depart. of Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia, ORCID 0000-0002-6307-0941.