УДК 519.2 Научная статья

Задача с начальными данными для уравнения, связанного с перидинамической моделью в двумерной области

А. В. Юлдашева

Филиал МГУ в г. Ташкенте, г. Ташкент, ул. Амира Темура 22, 100060, Республика Узбекистан

E-mail: yuasv86@mail.ru

В настоящей работе доказывается единственность и существование решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения, связанного с перидинамической моделью механики твёрдого тела с двумя пространственными переменными

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, перидинамика, интегральный оператор, метод Фурье, пространство Соболева.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-45-52

Поступила в редакцию: 17.10.2021 В окончательном варианте: 27.11.2021

Для цитирования. Юлдашева А. В. Задача с начальными данными для уравнения, связанного с перидинамической моделью в двумерной области // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 37. № 4. С. 45-52. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-45-52

1. Введение

Рассмотрим задачу с начальными данными для интегро-дифференциального уравнения перидинамики

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \int\limits_{\Omega} K(x,y)\,[u(x,t)-u(y,t)]\,dy = f(x,t), \quad x\in\Omega,\ t>0, \tag{1.1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad x\in\Omega, \tag{1.2}$$

где $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ – область с кусочно-гладкой границей .

В данной работе рассматривается симплифицированная модель, в которой предполагается, что неизвестная функция $u:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$, ядро $K:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ и внешняя сила $f:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$ являются скалярными функциями.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства инновациований Республики Узбекистан (проект № ФЗ-2020093065)

Интегральный оператор в правой части уравнения (1.1) имеет специальное сильно сингулярное ядро, определение которого приводится ниже. Особенность этого ядра заключается в том, что вблизи диагонали $x=y$ оно имеет вид

$$K(x,y) \;=\; \frac{c}{|x-y|^2} \;+\; \gamma(x,y),$$

где $\gamma(x,y)$ интегрируемая функция, и выполняется граничное условие

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x} K(x,y) \;=\; 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega. \tag{1.3}$$

Здесь $\nu = \nu(x)$ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω в точке $x \in \partial\Omega$.

$$\|u\|_s^2 \;=\; \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Соответствующий интегральный оператор

$$Av(x) \;=\; \int\limits_{\Omega} K(x,y)[v(x)-v(y)]\,dy \tag{1.4}$$

является неограниченным и гиперсингулярным в классических функциональных пространствах, таких, как $L_p(\Omega)$ или соболевские пространства $W_p^l(\Omega)$.

При решении задачи мы воспользуемся самосопряжённым расширением оператора Лапласа $-\Delta$, порождённым граничными условиями Неймана. Спектр этого расширения состоит из обственных значений $\{\lambda_k\}$, а собственные функции $\{v_k(x)\}$ удовлетвряют соотношениям:

$$-\Delta v_k(x) = \lambda_k v(x), \; x \in \Omega, \qquad \frac{\partial v_k(s)}{\partial \nu} = 0, \; s \in \partial\Omega, \quad k = 0,1,2,... \tag{1.5}$$

Решение спектральной задачи (1.5) мы понимаем в смысле $W_2^1(\Omega)$.

Определим вне диагонали $x=y$ ядро

$$K(x,y) \;=\; (-\Delta_y)\,L(x,y), \quad x \in \Omega, \; y \in \Omega, \tag{1.6}$$

где

$$L(x,y) \;=\; \frac{1}{2}\ln^2|x-y| \;+\; \eta(x,y), \tag{1.7}$$

функция $\eta(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области $\Omega \times \Omega$.

Ниже показано, что такая функция существует, бесконечно дифференцируема вне диагонали $x=y$.

В данной работе доказывается справедливость следующего утверждения.

Для любых $T>0$ и $m=0,1,\ldots$ и произвольного банахова пространства B обозначим символом $C^m\{[0,T] \to B\}$ пространство m раз непрерывно дифференцируемых отображений отрезка $[0,T]$ в B.

Решением задачи (1.1)-(1.2) из класса $H^\beta(\Omega)$ назовём функцию $u \in C^2\{[0,T] \to H^\beta(\Omega)\}$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и начальным условиям (1.2).

Теорема 1.1. *Пусть $0<\alpha<1$ и $0<\beta<\alpha/2$. Для любого $T>0$ и любых $\varphi \in W_2^\alpha(\Omega)$, $\psi \in W_2^\alpha(\Omega)$ и $f \in C\{[0,T] \to W_2^\alpha(\Omega)\}$ существует, и при том единственное, решение задачи (1.1)-(1.2) из класса $C^2\{[0,T] \to H^\beta(\Omega)\}$.*

Отметим, что данная задача при $n \geq 3$ рассмотрена в работе [1], а в работах [2-5] изучались задачи Коши для перидинамических моделей, допускающих разрывы первого рода по пространственным переменным, исключаемые моделями, описываемыми дифференциальными уравнениями.

2. Преобразование ядра уравнения (1.1)

Сначала преобразуем задачу (1.1)-(1.2).

Для этого введём функцию $\chi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, невозрастающую и такую, что

$$\chi(r) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{если} \quad r \leq 1/2, \\ 0, & \text{если} \quad r \geq 1. \end{cases}$$

Зафиксируем произвольное число $\delta > 0$ и для любой точки $x \in \Omega$ положим

$$R = R(x) = \min\{\delta, \operatorname{dis}(x, \partial\Omega)\},$$

где $\operatorname{dis}(x, \partial\Omega)$ о- расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$.

Рассмотрим следующую функцию :

$$L_0(x,y) \;=\; \frac{1}{2}\ln^2|x-y| \cdot \chi\left(\frac{|x-y|}{R}\right), \quad x \in \Omega, \quad y \in \Omega, \tag{2.1}$$

Найдем коэффициенты Фурье функции $L_0(x,y)$, считая x параметром:

$$a_k(x) \;=\; \int\limits_{\Omega} L_0(x,y)\, v_k(y)\, dy \;=$$

$$=\; \frac{1}{2} \int\limits_{|x-y|\leq R} \ln^2|x-y| \chi\left(\frac{|x-y|}{R}\right) \cdot v_k(y)\, dy.$$

Перейдя к сферическим координатам с центром в точке x, получим

$$a_k(x) \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_0^R r dr \int_0^{2\pi} \ln^2 r \chi(r/R)\, v_k(x + r\theta)\, d\theta \;=$$

$$=\; \alpha \int\limits_0^R \ln^2 r \chi(r/R)\, r\, dr \int\limits_0^{2\pi} v_k(x + r\theta)\, d\theta. \tag{2.2}$$

Далее применим формулу среднего значения ([6]), имеем

$$a_k(x) \;=\; v_k(x) \cdot (\pi) \int\limits_0^R r \ln^2 r J_0(r\sqrt{\lambda_k})\, \chi(r/R)\, dr.$$

Под интегралом сделаем замену $t = r\sqrt{\lambda_k}$. Тогда

$$a_k(x) \;=\; v_k(x) \cdot \frac{\pi}{\lambda_k} \int\limits_0^{R\sqrt{\lambda_k}} t \ln^2\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k}}\right) J_0(t)\, \chi\left(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}}\right) dt. \tag{2.3}$$

Интегрируя по частям, находим

$$a_k(x) \ = \ v_k(x)\cdot\frac{\pi}{\lambda_k}(t\ln^2(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k}})J_1(t)\,\chi(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}})|_{t=0}^{t=R\sqrt{\lambda_k}}-$$

$$-2\int\limits_0^{R\sqrt{\lambda_k}}\ln(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k}})J_1(t)\,\chi(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}})dt-\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_0^{R\sqrt{\lambda_k}}t\ln^2(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k}})J_1(t)\,\chi'(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}})dt).$$

Далее

$$a_k(x) \ = \ \frac{-2v_k(x)\pi}{\lambda_k}\int\limits_0^{R\sqrt{\lambda_k}}\ln(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k}})J_1(t)\,\chi(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}})dt-$$

$$\frac{v_k(x)\pi}{R\lambda_k\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_{\frac{R\sqrt{\lambda_k}}{2}}^{R\sqrt{\lambda_k}}t\ln^2(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k}})J_1(t)\,\chi'(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}})dt.$$

Преобразуем первый интеграл из правой части последнего выражения

$$\int\limits_0^{R\sqrt{\lambda_k}}\ln(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k}})J_1(t)\,\chi(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}})dt=$$

$$\int\limits_0^{\infty}\ln(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k}})J_1(t)\,dt-\int\limits_{\frac{R\sqrt{\lambda_k}}{2}}^{\infty}\ln(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k}})J_1(t)\,[1-\chi(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}})]dt.$$

Имеем

$$\int\limits_0^{\infty}\ln(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k}})J_1(t)\,dt=-\ln(\frac{\sqrt{\lambda_k}}{2})$$

$$\int\limits_{\frac{R\sqrt{\lambda_k}}{2}}^{\infty}\ln(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k}})J_1(t)\,[1-\chi(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}})]dt=\int\limits_{\frac{R\sqrt{\lambda_k}}{2}}^{\infty}J_0(t)\,[1-\chi(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}})]t^{-1}dt-$$

$$-\frac{1}{R\sqrt{\lambda_k}}\int\limits_{\frac{R\sqrt{\lambda_k}}{2}}^{\infty}\ln(\frac{t}{\sqrt{\lambda_k}})J_0(t)\,\chi'(\frac{t}{R\sqrt{\lambda_k}})dt.$$

В итоге получаем соотношение

$$a_k(x) \ = v_k(x)[\frac{\pi\ln\lambda_k}{\lambda_k}-\frac{2\pi\ln 2}{\lambda_k}+O(\lambda_k^{-N})],$$

из которого вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.1. *Разложение функции (2.1) в ряд Фурье по собственным функциям задачи (1.5) имеет вид*

$$L_0(x,y) \ = \ \sum_{\lambda_k>0}\frac{\ln\lambda_k}{\lambda_k}v_k(x)\,v_k(y) \ +$$

$$+ \gamma \sum_{\lambda_k>0} \frac{v_k(x)\, v_k(y)}{\lambda_k} \ + \ \sum_{k=1}^{\infty} d_k(x) v_k(x) v_k(y), \tag{2.4}$$

где коэффициенты $d_k(x)$ для любого номера N удовлетворяют условию

$$|d_k(x)| \ \leq \ \frac{C_N(x)}{(1+\lambda_k)^N}, \tag{2.5}$$

а величины $C_N(x)$ ограничены по x равномерно на каждом компактном подмножестве области Ω

Обозначим символом $G(x,y)$ обобщённую функцию Грина, связанную с задачей (1.5):

$$G(x,y) \ = \ \sum_{\lambda_k>0} \frac{v_k(x) v_k(y)}{\lambda_k}.$$

Далее положим

$$R(x,y) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) v_k(x) v_k(y).$$

Из оценки (2.5) следует, что функция $R(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области $\Omega \times \Omega$.

Введём функцию

$$L(x,y) \ = \ L_0(x,y) \ - \ \gamma G(x,y) \ - \ R(x,y). \tag{2.6}$$

Лемма 2.2. *Ряд Фурье функции $L(x,y)$, определённой равенством (2.6), имеет вид*

$$L(x,y) = \sum_{\lambda_k>0} \frac{\ln \lambda_k}{\lambda_k}\, v_k(x)\, v_k(y).$$

Причем, функция $L(x,y)$ бесконечно дифференцируема вне диагонали $x = y$ и равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega$ эта функция бесконечно дифференцируема вне диагонали $x = y$ и равномерно на каждом компакте $K \subset \Omega$

3. Исследование основного уравнения

Лемма 3.1. *Для любой функции $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$ выполняется равенство*

$$Au(x) \ = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \lambda_k \cdot (u, v_k)\, v_k(x), \quad x \in \Omega. \tag{3.1}$$

Будем искать решение уравнения (1.1) в виде ряда по собственным функциям краевой задачи (1.5):

$$u(x,t) \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) v_k(x), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0. \tag{3.2}$$

Тогда, согласно лемме 3.1,

$$Au(x,t) \ = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \ln \lambda_k\, v_k(x).$$

В таком случае, из уравнения (1.1) получаем:

$$c_0''(t) \ = \ f_0(t), \tag{3.3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k''(t)v_k(x) \ + \ \sum_{k=1}^{\infty} \ln\lambda_k c_k(t)v_k(x) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)v_k(x).$$

где $f_k(t)$– коэффициенты ряда Фурье функции $f(x,t)$ по собственным функциям задачи (1.5).

Из этого следует, что

$$|A[\widehat{u}](\xi,t)-A[\widehat{v}](\xi,t)|^2 \ \leq \ C^4(\xi)\frac{t^3}{3}\int_0^t |B[\widehat{u}](\xi,\tau)-B[\widehat{v}](\xi,\tau)|^2\,d\tau.$$

Следовательно, при $k \geq 1$ выполняется уравнение

$$c_k''(t) \ +\ln\lambda_k c_k(t) \ = \ f_k(t).$$

Пусть

$$\mu_k^2 \ = \ \ln\lambda_k\ , \quad k=1,2,... \tag{3.4}$$

тогда

$$c_k''(t) \ + \ \mu_k^2 c_k(t) \ = \ f_k(t). \tag{3.5}$$

Из (3.3) и (3.5) получаем

$$c_0(t) \ = \ a_0+b_0t+\int_0^t (t-s)f_0(s)\,ds,$$

и

$$c_k(t) \ = \ a_k\cos\mu_k t+b_k\sin\mu_k t+\frac{1}{\mu_k}\int_0^t \sin\mu_k(t-s) \ f_k(s)\,ds.$$

Принимая во внимание начальные условия (1.2), мы приходим к следующим соотношениям для коэффициентов Фурье искомого решения задачи :

$$c_0(t) \ = \ (\varphi,v_0) \ + \ (\psi,v_0)t \ + \ \int_0^t (t-s)(f,v_0)(s)\,ds\ , \tag{3.6}$$

$$c_k(t) \ = \ (\varphi,v_k)\cos\mu_k t \ + \ (\psi,v_k)\frac{\sin\mu_k t}{\mu_k} \ + \ \frac{1}{\mu_k}\int_0^t \sin\mu_k(t-s) \ f_k(s)\,ds\ , \quad k=1,2,..., \tag{3.7}$$

Из (3.3) и (3.5) следует, что вторая производная по переменной t, входящая в уравнение (1.1), формально разлагается в следующий ряд Фурье:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \ = \ (f,v_0)(t)v_0(x) \ +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2 c_k(t)\,v_k(x)\;+\;\sum_{k=1}^{\infty}(f,v_k)(t)\,v_k(x). \qquad (3.8)$$

Для доказательства существования решения достаточно убедиться в сходимости в метрике пространства $H^{\beta}(\Omega)$ рядов (3.8).

Согласно Лемме 4.1 из работы [1] и условий Теоремы 1.1 все вышеуказанные ряды сходятся равномерно.

Заключение

Доказана однозначная разрешимость задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения, связанного с линейной моделью перидинамики.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответсвенность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

1. Алимов Ш. А., Юлдашева А. В. О разрешимости перидинамического уравнения с сингулярным ядром // *Дифференциальные уравнения*, 2021. Т. 57, № 3, С. 375-386. [Alimov Sh. A., Yuldasheva A. V. O razreshimosti peridinamicheskogo uravneniya s singulyarnym yadrom // *Differentsial'nyye uravneniya*, 2021. vol. 57, no. 3, pp. 375-386 (In Russian)].
2. Du Q., Kamm J. R., Lehoucq R. B., Parks Michael L. A new approach for a nonlocal, nonlinear conservation law // *SIAM J. Appl. Math.*, 2012. vol. 72, no. 1, pp. 464–487.
3. Alimov S. A., Cao Y., Ilhan O. A. On the problems of peridynamics with special convolution kernels // *J. of Integral Equations and Applications*, 2014. vol. 26, pp. 301-321.
4. Alimov S. A., Sheraliev S. On the solvability of the singular equation of peridynamics // *Complex Variables and Elliptic Equations*, 2019. № 5, С. 873-887.
5. Yuldasheva A. V. On Solvability of One Singular Equation of Peridynamics // *Lob. J. Math.*, 2020. vol. 41, no. 6, pp. 1131–1136.
6. Nikol'skiy S. M. *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*. Grundl. Math. Wissensch: New York: Springer-Verlag, 1975.

MSC 60J80 Research Article

Initial data problem for an equation related to a peridynamic model in a two-dimensional domain

A. V. Yuldasheva

M. V. Lomonosov Moscow State University Tashkent Branch, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: yuasv86@mail.ru

In this paper the uniqueness and existence of a solution of Cauchy problem for an integro-differential equation associated with a peridynamic model of solid mechanics in a two-dimensional domain are proved.

Key words: integro-differential equation, peridynamic, integral operator, Fourier method, Sobolev space.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-45-52

Original article submitted: 17.10.2021 Revision submitted: 27.11.2021

For citation. Yuldasheva A. V. Initial data problem for an equation related to a peridynamic model in a two-dimensional domain. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **37**: 4, 45-52. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-45-52

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. This work was supported by Fund of innovative development of Republic of Uzbekistan OTF4-(88) and OT-F4-(36/32).