УДК 517.95 Научная статья

Об одном аналоге задачи Трикоми для «точечно» нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа

К. У. Хубиев

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А, Россия
E-mail: khubiev_math@mail.ru

Для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа исследуется однозначная разрешимость аналога задача Трикоми. Нагрузка определена в фиксированных точках области искомых решений, в том числе и во внутренних точках. Найдены условия существования и единственности регулярного решения задачи.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, уравнение смешанного типа, гиперболо-параболическое уравнение, задача Трикоми.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-29-39

Поступила в редакцию: 04.08.2021 В окончательном варианте: 09.10.2021

Для цитирования. Хубиев К. У. Об одном аналоге задачи Трикоми для «точечно» нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2021. Т. 36. № 3. С. 29-39. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-29-39

Введение

Рассмотрим нагруженное [1] уравнение гиперболо-параболического типа

$$\begin{cases} u_{xx}-u_y=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i u(x_i,y_i), \qquad y>0, \\ u_{xx}-u_{yy}=\sum\limits_{i=m+1}^{n}\mu_i u(x_i,y_i), \quad y<0 \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками прямых $x=0$, $x=r$, $y=T>0$ при $y>0$, характеристиками $x+y=0$, $x-y=r$ уравнения (1) при $y<0$; $u=u(x,y)$ – искомая функция, $(x_i,y_i)\in\Omega_1$, если $i=1,\dots,m$; $(x_i,y_i)\in\Omega_2$, если $i=m+1,\dots,n$; Ω_1 и Ω_2 – параболическая и гиперболическая части смешанной области Ω соответственно; λ_i,μ_i,m,n – заданные постоянные.

Финансирование. Исследование выполнено в рамках государственного задания Минобрнауки РФ АААА-А19-119013190078-8 на выполнение фундаментальных научных исследований на 2019-2021 гг.

Многие важные задачи математической физики и биологии, например, задачи оптимального управления агроэкосистемой, связанные с прогнозированием и регулированием уровня грунтовых вод и почвенной влаги в особенности [1, С. 95], описания процесса распространения тепла в одномерной ограниченной среде, в которой имеется источник тепла, мощность которого пропорциональна значению температуры [2], математические модели теории популяции [3, С. 128] приводят к краевым задачам для линейных нагруженных уравнений с частными производными.

Нагруженные уравнения смешанного типа играют весьма важную роль в теории тепломассопереноса в составных средах с фрактальной организацией и памятью (см., например, [1, С. 182]). Впервые на необходимость изучения задач с условиями сопряжения дня волнового уравнения в одной части области и уравнения диффузии в остальной части области было указано в 1959 году И.М. Гельфандом [4]. Он рассматривал пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой, при этом в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его - уравнением диффузии. Также оказалось, что к задачам для уравнений смешанного гиперболо-параболического типа приводит изучение электрических колебаний в проводах, движения жидкости в канале, окруженном пористой средой, изучение задач в теории распространения электромагнитных полей [5], [6], [7] и в ряде других областей физики и математической биологии [3].

«Точечные» нагруженные слагаемые, присутствующие в уравнении (1), определяют дискретное воздействие на процесс в точках «нагружения» [8].

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u(x,y)$ из класса $C(\bar{\Omega})\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_1)\cap C^2(\Omega_2)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1\cup\Omega_2$, такую, что $u_y(x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на концах интервала $0<x<r$ прямой $y=0$.

Для уравнения (1) непосредственным аналогом задачи Трикоми будет следующая

Задача T. *Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям:*

$$u(0,y)=\varphi_0(y),\quad u(r,y)=\varphi_r(y),\quad 0\le y\le T, \tag{2}$$

$$u(x/2,-x/2)=\psi(x),\quad 0\le x\le r, \tag{3}$$

где $\varphi_0(y),\varphi_r(y),\psi(x)$ – заданные функции, причем $\varphi_0(0)=\psi(0)$.

Отличительной особенностью уравнения (1) является то, что нагруженные слагаемые могут попадать как на границу области и на линию изменения типа, так и во внутренние точки области, а также то, что нагрузка является «точечной».

Исследованию краевых задач для нагруженных уравнений с частными производными посвящено много работ (см., например, [1], [9] и библиографию там). Вопросы разрешимости задачи Коши в классической постановке для нагруженных дифференциальных уравнений и систем вида

$$\frac{\partial^m u}{\partial t^m}=Au+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}(x,t)u(x_i,t_j)+f(x,t),\ x=(x_1,...,x_n),$$

где A – дифференциальный оператор, не содержащий производных по временной переменной t порядка выше $m-1$, затронуты в [10], там же приведены необходимые и достаточные условия разрешимости однородной задачи Коши для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения $u^{(m)}(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_iu(t_i)+f(t)$.

В [11] исследована задача Дирихле для "точечно" нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. В [12] строится численное решение задачи с многоточечными условиями для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Задача Коши для уравнения (1) при $y<0$ исследована в [8].

В работе [13] исследованы аналоги задачи Трикоми для модельных нагруженных гиперболо-параболических уравнений второго и третьего порядка в области с нехарактеристической и характеристической линией изменения типа соответственно. Аналог задачи Трикоми для характеристически нагруженного уравнения (1) и для модельного уравнения смешанного гиперболо-параболического типа с производной при нагрузке исследован в [14] и [15]. В [16] исследован аналог задачи Трикоми для характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа общего вида с переменными коэффициентами.

Среди работ, близких по тематике к исследуемой задаче, отметим также работы [17] – [26], в которых исследуются краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных.

1. Функциональные соотношения на линии изменения типа

Пусть существует решение задачи T. Обозначим через

$$u(x,0)=\tau(x),\quad 0\le x\le r, \tag{4}$$

$$u_y(x,0)=\nu(x),\quad 0<x<r, \tag{5}$$

а из условия (2) задачи получим

$$\tau(0)=\varphi_0(0), \tau(r)=\varphi_r(0). \tag{6}$$

Функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ для уравнения (1), принесенное из параболической части Ω_1 области Ω будет иметь вид

$$\tau''(x)-\nu(x)=\lambda, \tag{7}$$

где $\lambda=\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i u(x_i,y_i)=const$, $u(x_i,y_i)\in\Omega_1$.

Легко показать, что решение задачи в Ω_2 представимо в виде

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}-\frac{1}{2}\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(\xi)\,d\xi-\frac{\mu y^2}{2}, \tag{8}$$

где $\mu=\sum\limits_{i=m+1}^{n}\mu_i u(x_i,y_i)=const$, $u(x_i,y_i)\in\Omega_2$.

Удовлетворяя (8) условию (3), получим

$$2u(x/2,-x/2)=\tau(x)+\tau(0)-\int\limits_{0}^{x}\nu(\xi)\,d\xi-\frac{\mu x^2}{4}=2\psi(x),$$

откуда после дифференцирования имеем

$$\tau'(x)-\nu(x)=2\psi'(x)+\frac{\mu x}{2}. \tag{9}$$

Исключая $\nu(x)$ из (7) и (9), получим уравнение

$$\tau''(x)-\tau'(x)=f(x), \tag{10}$$

где $f(x)=-2\psi'(x)+\lambda-\frac{\mu x}{2}$.

Считая пока λ и μ известными константами, решение двухточечной задачи Дирихле (6) для уравнения (10) запишем в виде

$$\tau(x)=\int\limits_0^r G_0(x,\xi)f(\xi)d\xi-G_{0\xi}(x,0)\varphi_0(0)+G_{0\xi}(x,r)\varphi_r(0), \tag{11}$$

где функция Грина задачи (10), (6) имеет вид

$$G_0(x,\xi)=\begin{cases}\frac{(e^x-e^r)(1-e^{-\xi})}{e^r-1} & 0\le\xi\le x,\\ \frac{(e^{r-\xi}-1)(1-e^x)}{e^r-1} & x\le\xi\le r,\end{cases}$$

$$G_{0\xi}(x,0)=\frac{e^x-e^r}{e^r-1},\quad G_{0\xi}(x,r)=\frac{e^x-1}{e^r-1}.$$

Выражение (11) можно переписать в виде

$$\tau(x)=\lambda\int\limits_0^r G_0(x,\xi)d\xi-\frac{\mu}{2}\int\limits_0^r\xi G_0(x,\xi)d\xi+F(x), \tag{12}$$

где $F(x)=-2\int\limits_0^r G_0(x,\xi)\psi'(\xi)d\xi-G_{0\xi}(x,0)\varphi_0(0)+G_{0\xi}(x,r)\varphi_r(0)$ – известная функция.

Очевидно, что функция $\tau(x)\in C[0,r]\cap C^2]0,r[$, если $\psi(x)\in C[0,r]\cap C^2]0,r[$, и определяется однозначно в зависимости от λ и μ.

2. Представление решения задачи в Ω_1 и Ω_2

После определения $\tau(x)$, в Ω_2 из (9) получим, что $\nu(x)=\tau'(x)-2\psi'(x)-\dfrac{\mu x}{2}$, откуда

$$\int\limits_{x+y}^{x-y}\nu(\xi)d\xi=\tau(x-y)-\tau(x+y)-2\psi(x-y)+2\psi(x+y)+\mu xy. \tag{13}$$

Подставляя (12) и (13) в (8), получаем, что решение задачи (1)-(3) в Ω_2 задается формулой

$$u(x,y)=r(x,y)-\lambda p(x,y)-\mu q(x,y), \tag{14}$$

где $p(x,y)=-\int\limits_0^r G_0(x+y,\xi)d\xi,\quad q(x,y)=\frac{1}{2}\int\limits_0^r\xi G_0(x+y,\xi)d\xi+\frac{y}{2}(x+y),$

$r(x,y)=F(x+y)+\psi(x-y)-\psi(x+y)$ – известные функции.

С другой стороны, если $\varphi_0(y),\varphi_0(y)\in C[0,T]$, в параболической части области Ω_1 решение задачи (1)-(3) можно представить как решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности, которое имеет вид [3, с. 267]:

$$u(x,y)=\int\limits_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_0(\eta)d\eta-\int\limits_0^y G_\xi(x,y;r,\eta)\varphi_r(\eta)d\eta+$$

$$+\int_0^r G(x,y;\xi,0)\tau(\xi)d\xi-\lambda\int_0^y\int_0^r G(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{15}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{\sqrt{4\pi(y-\eta)}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[\frac{(x-\xi+2rk)^2}{4(\eta-y)}\right]-\exp\left[\frac{(x+\xi+2rk)^2}{4(\eta-y)}\right]\right\}$$

– функция Грина первой краевой задачи для уравнения Фурье.

После несложных преобразований (15) с учетом (12) можно записать в виде

$$u(x,y)=\rho(x,y)-\lambda g(x,y)-\mu h(x,y), \tag{16}$$

где $g(x,y),h(x,y),\rho(x,y)$– известные функции: $h(x,y)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^r\int_0^r G(x,y;\xi,0)sG_0(\xi,s)dsd\xi$,

$$g(x,y)=\int_0^y\int_0^r G(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta-\int_0^r\int_0^r G(x,y;\xi,0)G_0(\xi,s)dsd\xi,$$

$$\rho(x,y)=\int_0^y G_\xi(x,y;0,\eta)\varphi_0(\eta)d\eta-\int_0^y G_\xi(x,y;r,\eta)\varphi_r(\eta)d\eta+\int_0^r G(x,y;\xi,0)F(\xi)d\xi.$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), зависящее от λ и μ, задается формулой (16) в Ω_1 и формулой (14) в Ω_2.

3. Определение нагруженных слагаемых уравнения

Для удобства введем следующие обозначения:

$$u_i=u(x_i,y_i),\ g_i=g(x_i,y_i),\ h_i=h(x_i,y_i),\ \rho_i=\rho(x_i,y_i),\ 1\le i\le m,$$
$$u_i=u(x_i,y_i),\ p_i=p(x_i,y_i),\ q_i=q(x_i,y_i),\ r_i=r(x_i,y_i),\ m+1\le i\le n.$$

Полагая теперь $(x,y)=(x_i,y_i)$ в $\Omega_1(i=1,2,\dots,m)$ и в $\Omega_2(i=m+1,m+2,\dots,n)$, получим систему n линейных уравнений относительно неизвестных u_i вида

$$u_i=\begin{cases}\rho_i-\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_ju_jg_i-\sum\limits_{j=m+1}^{n}\mu_ju_jh_i, & 1\le i\le m,\\ r_i-\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_ju_jp_i-\sum\limits_{j=m+1}^{n}\mu_ju_jq_i, & m+1\le i\le n.\end{cases}$$

Систему можно переписать в виде

$$u_i+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}u_j=\gamma_i,\quad i=\overline{1,n}, \tag{17}$$

где

$$\beta_{ij}=\begin{cases}\lambda_j g_i=\lambda_j\left(\int\limits_0^{y_i}\int\limits_0^{r}G(x_i,y_i;\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^{r}\int\limits_0^{r}G(x_i,y_i;\xi,0)G_0(\xi,s)dsd\xi\right),\ i,j=\overline{1,m},\\ \mu_j h_i=\frac{\mu_j}{2}\int\limits_0^{r}\int\limits_0^{r}G(x_i,y_i;\xi,0)sG_0(\xi,s)dsd\xi,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{m+1,n},\\ \lambda_j p_i=-\lambda_j\int\limits_0^{r}G_0(x_i+y_i,\xi)d\xi,\quad i=\overline{m+1,n},\quad j=\overline{1,m},\\ \mu_j q_i=\frac{\mu_j}{2}\left(\int\limits_0^{r}\xi G_0(x_i+y_i,\xi)d\xi+y_i(x_i+y_i)\right),\quad i,j=\overline{m+1,n},\end{cases}$$

$\gamma_i=\begin{cases}\rho_i, & 1\leq i\leq m,\\ r_i, & m+1\leq i\leq n.\end{cases}$ Вычислив определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+\beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n}\\ \beta_{21} & 1+\beta_{22} & \dots & \beta_{2n}\\ . & . & \dots & .\\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & 1+\beta_{nn}\end{vmatrix},\tag{18}$$

получим, что при выполнении условия $\Delta\neq 0$ решение системы будет иметь вид $u_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ_i — определители матриц, полученных из матрицы системы (17) заменой i-го столбца на столбец свободных членов (γ_i).

Таким образом, после нахождения неизвестных u_i, $i=\overline{1,n}$, мы найдем λ и μ, и функция $\tau(x)$ полностью определяется формулой (12), причем $\tau(x)\in C[0,r]\cap C^2]0,r[$.

Далее решение задачи (1)-(3) выписывается по формулам (16) и (14) в Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Если* $\varphi_0(y),\varphi_r(y)\in C[0,T]$, $\psi(x)\in C[0,r]\cap C^2]0,r[$, $\Delta\neq 0$, *где* Δ *определяется формулой (18), то задача T имеет, и притом единственное решение.*

4. Некоторые частные случаи уравнения (1)

4.1. $m=0$, $n\neq 0$

Рассмотрим нагруженное только в гиперболической части области Ω уравнение

$$\begin{cases}u_{xx}-u_y=0, & y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}=\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i u(x_i,y_i), & y<0.\end{cases}\tag{19}$$

В этом случае формулы (12) и (14) примут вид

$$\tau(x)=-\frac{\mu}{2}\int\limits_0^r\xi G_0(x,\xi)d\xi+F(x),\quad u(x,y)=r(x,y)-\mu q(x,y),$$

где функции $F(x)$, $q(x,y)$ и $r(x,y)$ останутся без изменений. В системе уравнений (17) элементы $\beta_{ij}=\mu_j q_i=\dfrac{\mu_j}{2}\left(\int\limits_0^r\xi G_0(x_i+y_i,\xi)d\xi+y_i(x_i+y_i)\right)$, $\gamma_i=r_i$, $i,j=\overline{1,n}$. Далее нам понадобится лемма из [8].

Лемма. *Если определитель*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_1 & \dots & \alpha_n\beta_1 \\ \alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_2 & \dots & \alpha_n\beta_2 \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_1\beta_n & \alpha_2\beta_n & \dots & 1+\alpha_n\beta_n \end{vmatrix},$$

то $\Delta_n = 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i$, *а алгебраические дополнения элемента* i*–ой строки и* j*–того столбца определителя равны*

$$\Delta_n^{i,j} = \begin{cases} 1+\sum\limits_{k=1,k\neq i,j}^{n}\alpha_k\beta_k, & i=j, \\ -\alpha_i\beta_j, & i\neq j. \end{cases}$$

Доказательство леммы (см. [11]) проводится по индукции, используя известные свойства определителей.

По лемме в случае $m=0$ определитель системы (17) $\Delta = 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_{ii} = 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i q_i$. Условие $\Delta\neq 0$ однозначной разрешимости задачи T будет иметь вид:

$$1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{2}\left(\int\limits_0^r \xi G_0(x_i+y_i,\xi)d\xi + y_i(x_i+y_i)\right)\neq 0, \tag{20}$$

при выполнении которого нагруженные слагаемые будут определяться по формуле

$$u_i = u(x_i,y_i) = \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n}\Delta^{i,j}r_j,$$

где алгебраические дополнения элемента i–ой строки и j–того столбца определителя равны

$$\Delta^{i,j} = \begin{cases} 1+\sum\limits_{k=1,k\neq i,j}^{n}\mu_k q_k, & i=j, \\ -\mu_j q_i, & i\neq j. \end{cases}$$

Таким образом, при выполнении условия (20) задача (2)-(3) для уравнения (19) всегда имеет единственное решение, которое получено в явном виде. Выполнение условия (20) легко проверить, кроме того, например, при $\mu_i\leq 0$ оно всегда выполняется:

$$\Delta = 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{2}\left(\int\limits_0^r \xi G_0(x_i+y_i,\xi)d\xi + y_i(x_i+y_i)\right) > 0.$$

4.2. $m=n$

В этом случае нагруженные слагаемые будут присутствовать только в параболической части Ω_1 области Ω:

$$\begin{cases} u_{xx}-u_y = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i u(x_i,y_i), & y>0, \\ u_{xx}-u_{yy}=0, \quad y<0. \end{cases}$$

Формулы (12) и (16) примут вид

$$\tau(x) = \lambda \int\limits_0^r G_0(x,\xi)d\xi + F(x), \quad u(x,y) = \rho(x,y) - \lambda g(x,y).$$

В этом случае к получившейся матрице системы уравнений (17) также применима лемма. Условие $\Delta \neq 0$ однозначной разрешимости задачи Т будет иметь вид:

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i = 1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\int\limits_0^{y_i} \int\limits_0^{r} G(x_i, y_i; \xi, \eta) d\xi d\eta - \int\limits_0^{r} \int\limits_0^{r} G(x_i, y_i; \xi, 0) G_0(\xi, s) ds d\xi \right) \neq 0,$$

при выполнении которого нагруженные слагаемые будут определяться по формуле

$$u_i = u(x_i, y_i) = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} \Delta^{i,j} \rho_j,$$

где алгебраические дополнения элемента i–ой строки и j–того столбца определителя равны

$$\Delta^{i,j} = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{k=1, k \neq i,j}^{n} \lambda_k g_k, & i = j, \\ -\lambda_j g_i, & i \neq j. \end{cases}$$

4.3. $m = 1$, $n = 2$

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y = \lambda_1 u(x_1, y_1), & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} = \mu_2 u(x_2, y_2), & y < 0. \end{cases}$$

В этом случае условие однозначной разрешимости задачи Т будет иметь вид

$$1 + \lambda_1 g_1 + \mu_2 q_2 + \lambda_1 \mu_2 (g_1 q_2 - h_1 p_2) \neq 0.$$

Замечание В заключение отметим, что все проведенные рассуждения верны и в случае переменных коэффициентов, т.е. если $\lambda_i = \lambda_i(x,y)$, $\mu_i = \mu_i(x,y)$, в том числе и для вышеприведенных частных случаев, но известные функции из формул (14) и (16) будут иметь более сложный вид.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

1. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применение*. М.: Наука, 2012. 232 с. [Nakhushev A. M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie* [Loaded equations and their applications]. Moscow: Nauka, 2012. 232 pp. (In Russian)]

2. Дикинов Х. Ж., Керефов А. А., Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // *Дифференц. уравнения*, 1976. Т. 12, № 1, С. 177–179. [Dikinov Kh. Zh., KerefovA. A. , Nakhushev A. M. A certain boundary value problem for a loaded heat equation // *Differ. Equ.*, 1976. vol. 12, no. 1, pp. 191—192].

3. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высш. шк., 1995. 301 с. [Nakhushev A. M. *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of mathematical biology]. Moscow: Vysshaya shkola, 1995. 301 pp. (In Russian)]

4. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // *УМН*, 1959. Т. 14, № 3(87), С. 3–19. [Gel'fand I. M. Nekotorye voprosy analiza i differentsial'nykh uravneniy [Some questions of analysis and differential equations] // *Uspekhi Mat. Nauk*, 1959. vol. 14, no. 3(87), pp. 3–19 (In Russian)].

5. Стручина Г. М. Задача о сопряжении двух уравнений // *Инженерно-физический журнал*, 1961. Т. 4, № 11, С. 99–104. [Struchina G. M. Zadacha o sopryazhenii dvukh uravneniy // *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 1961. vol. 4, no. 11, pp. 99–104 (In Russian)].

6. Уфлянд Я. С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // *Инженерно-физический журнал*, 1964. Т. 7, № 1, С. 89–92. [Uflyand Ya. S. K voprosu o rasprostranenii kolebaniy v sostavnykh elektricheskikh liniyakh // *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 1964. vol. 7, no. 1, pp. 89–92 (In Russian)].

7. Золина Л. А. О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1966. Т. 6, № 6, С. 991–1001; Zolina L. A. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1966. vol. 6, no. 6, pp. 63–78.

8. Казиев В. М., Кайгермазов А. А., Кудаева Ф. Х. Задача Коши для нагруженного вырождающегося гиперболического уравнения // *Вестник БГУ. Математика, информатика*, 2018. № 1, С. 95–99. [Kaziev V. M., Kaygermazov A. A., Kudaeva Ph. Kh. Zadacha Koshi dlya nagruzhennogo vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya [The Cauchy problem for a loaded degenerate hyperbolic equation] // *Vestnik BGU. Matematika, informatika*, 2018, pp. 95–99 (In Russian)].

9. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. *Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений*. Алматы: FЫЛЫМ, 2010. 334 с. [Jenaliyev M. T., Ramazanov M. I. *Nagruzhennye uravneniya kak vozmushcheniya differentsial'nykh uravneniy* [Loaded equation — how perturbed differential equationsy]. Almaty: Gylym, 2010. 334 pp. (In Russian)]

10. Нахушев А. М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // *Дифференц. уравнения*, 1979. Т. 15, № 1, С. 96–105. [Nakhushev A. M. Boundary value problems for loaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the prediction of ground moisture // *Differ. Uravn.*, 1979. vol. 15, no. 1, pp. 96–105 (In Russian)].

11. Казиев В. М. Об одном нагруженном обыкновенном дифференциальном уравнении, Сборник научных трудов, Нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа и родственные проблемы непрерывного анализа. Нальчик, КБГУ, 1982, С. 130–133. [Kaziev V M. Ob odnom nagruzhennom obyknovennom differentsial'nom uravnenii [On a loaded ordinary differential equation], Collection of scientific papers, Non-local boundary value problems for loaded mixed-type equations and related problems of continuous analysis. Nalchik, KBSU, 1982, pp. 130–133 (In Russian)].

12. Assanova A. T., Imanchiyev A. E., Kadirbayeva Zh. M. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018. vol. 58, no. 4, pp. 508–516.

13. Елеев В. А. О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных уравнений второго и третьего порядка // *Дифференц. уравнения*, 1994. Т. 30, № 2, С. 230–237. [Eleev V. A. Some boundary value problems for mixed loaded equations of second and third orders // *Differ. Equ.*, 1994. vol. 30, no. 2, pp. 210–217].

14. Хубиев К. У. Краевые задачи для характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа // *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2021. Т. 195, С. 127–138. [Khubiev K. U. Boundary-value problems for a characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation // *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, 2021. vol. 195, pp. 127–138 (In Russian)].

15. Хубиев К. У. Об одном аналоге задачи Трикоми для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа с производной при нагрузке // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2009. Т. 11, № 2, С. 58–60. [Khubiev K. U. On an analogue of the Tricomi problem for a mixed hyperbolic-parabolic equation with a derivative under load // *Dokl. Adyg. (Cherkess.) Mezdunar. Akad. Nauk*, 2009. vol. 11, no. 2, pp. 58–60 (In Russian)].

16. Khubiev K. U. Analogue of Tricomi problem for characteristically loaded hyperbolic-parabolic equation with variable coefficients // *Ufa Math. J.*, 2017. vol. 9, no. 2, pp. 92–101.

17. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // *Известия вузов. Математика*, 2015. № 6, С. 31–42. [Sabitov K. B. Initial-boundary problem for parabolic-hyperbolic equation with loaded summands // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2015. vol. 59, no. 6, pp. 23–33].

18. Аттаев А. Х. Характеристическая задача для нагруженного вдоль одной из своих характеристик гиперболического уравнения второго порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018. № 3(23), С. 14–18. [Attaev A. Kh. The characteristic problem for the second-order hyperbolic equation loaded along one of its characteristics // *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki*, 2018. no. 3(23), pp. 14–18 (In Russian)].

19. Сабитова Ю. К. Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с нагруженными слагаемыми // *Изв. вузов. Матем.*, 2018. № 9, С. 42–58. [Sabitova Yu. K. Dirichlet problem for Lavrent'ev-Bitsadze equation with loaded summands // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2018. vol. 62, no. 9, pp. 35–51].

20. Attaev A. Kh. On a characteristic problem for a loaded hyperbolic equation // *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 2019. vol. 96, no. 4, pp. 15–21.

21. Agarwal P., Baltaeva U., Alikulov Y. Solvability of the boundary-value problem for a linear loaded integro-differential equation in an infinite three-dimensional domain // *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020. vol. 140, 110108.

22. Зикиров О. С., Холиков Д. К. Разрешимость некоторых нелокальных задач для нагруженного уравнения третьего порядка // *Сибирские электронные математические известия*, 2020. Т. 17, С. 77–88. [Zikirov O. S., Kholikov D. K. Solvability of some non–local problems for the loaded pseudoparabolic equation // *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2020. vol. 17, pp. 77–88 (In Russian)].

23. Khubiev K. U. Boundary-value problem for a loaded hyperbolic-parabolic equation with degeneracy of order in the hyperbolicity domain // *Journal of Mathematical Sciences*, 2020. vol. 250, no. 5, pp. 830–834.

24. Islomov B. I., Alikulov Y. K. Boundary value problem for loaded equation of parabolic-hyperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain // *International Journal of Applied Mathematics*, 2021. vol. 34, no. 2, pp. 377–389.

25. Urinov A. K., Azizov M. S. A boundary problem for the loaded partial differential equations of fourth order // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021. vol. 42, no. 3, pp. 621–631.

26. Yuldashev T. K., Abdullaev O. K. Unique solvability of a boundary value problem for a loaded fractional parabolic-hyperbolic equation with nonlinear terms // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2021. vol. 42, no. 5, pp. 1113–1123.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2021. vol. 36. no. 3. P. 29–39. ISSN 2079-6641

MSC 35M10, 35M12 Research Article

On an analogue of the Tricomi problem for a "pointwise" loaded hyperbolic-parabolic equation

K. U. Khubiev

Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia

E-mail: khubiev_math@mail.ru

The unique solvability of an analogue of the Tricomi problem is investigated for a loaded hyperbolic-parabolic equation. The load is determined at boundary and interior fixed points of the domain in which the solutions are sought. Sufficient conditions are found for the existence and uniqueness of solutions.

Key words: loaded equation, equation of mixed type, hyperbolic-parabolic equation, Tricomi problem.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-29-39

Original article submitted: 04.08.2021 Revision submitted: 09.10.2021

For citation. Khubiev K. U. On an analogue of the Tricomi problem for a "pointwise" loaded hyperbolic-parabolic equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **36**: 3, 29-39. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-29-39

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. The study is supported by the Russian Ministry of Science and Education (State Assignment AAAA-A19-119013190078-8 for Basic Researches in 2019–2021).