УДК 519.633 Научная статья

Разностная схема для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка

Е. М. Казакова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000,
г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а, Россия
E-mail: shogenovae@inbox.ru

Построена разностная схема, аппроксимирующая первую краевую задачу для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка с постоянными коэффициентами. Исследована устойчивость и сходимость разностной схемы.

Ключевые слова: разностная схема, устойчивость и сходимость разностной схемы, уравнение конвекции-диффузии, дробная производная по Капуто, дробный интеграл Римана-Лиувилля.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-146-154

Поступила в редакцию: 17.06.2021 В окончательном варианте: 04.10.2021

Для цитирования. Казакова Е. М. Разностная схема для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 36. № 3. С. 146-154. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-146-154

Введение

Множество задач математической физики связано с описанием процессов переноса, в частности - диффузии и конвекции. Диффузия представляет собой процесс переноса частиц из области с высокой концентрацией в область с низкой концентрацией. При конвекции перенос тепла обусловлен не только теплопроводностью среды, но и перемещением макроскопических объемов жидкости или газа. В качестве математической модели конвективно-диффузионных процессов выступает уравнение диффузии с конвективным слагаемым. Уравнение конвекции-диффузии дробного порядка позволяет более адекватно описывать процессы переноса, протекающие в пористых средах.

Решения уравнений диффузии дробного порядка не всегда могут быть выписаны в аналитическом виде, поэтому необходимо использовать численные методы. В работе [1] разработаны и исследованы вычислительные алгоритмы для решения прямой

Финансирование. работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта №20-51-53007.

задачи дробной диффузии в одномерном случае. Дается обзор основных определений дробных производных, на основе которых строятся разностные методы первого и второго порядков аппроксимации по пространству.

В [2] получена априорная оценка для решения первой начально-краевой задачи уравнения диффузии дробного порядка и рассмотрены разностные методы решения поставленных задач. Разностный аналог дробной производной Капуто повышенного порядка аппроксимации разработан в работах [3].

Априорные оценки решений краевых задач для уравнения диффузии дробного и распределенного порядков в дифференциальной и разностной трактовках получены в работах [4, 5].

В работе [6] в прямоугольнике $\bar{Q}_T = \{(x,t): 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ была рассмотрена первая краевая задача для уравнения-конвекции диффузии дробного порядка и получена априорная оценка решения

$$\partial_{0t}^{\alpha} u + aD_{0t}^{-\beta} u_x = u_{xx} + f(x,t), \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{3}$$

где a – заданное число.

В данной работе построена разностная схема для задачи (1)-(3) и доказана ее устойчивость и сходимость.

Устойчивость и сходимость разностной схемы

В прямоугольнике $\bar{Q}_T$ введем сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, где

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \ldots, N, hN = l\},$$
$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = y\tau, j = 0, 1, \ldots, K, \tau K = T\}.$$

Прежде чем строить разностную схему для задачи (1)-(3), найдем разностный аналог дробного интеграла Римана-Лиувилля $D_{0t}^{-\beta} u_x$

$$D_{0t}^{-\beta} u_x = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^{t_{j+1}} \frac{u_x(x_i,\xi)}{\left(t_{j+1}-\xi\right)^{1-\beta}} d\xi = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{s=0}^{j} \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} \frac{u_x(x_i,\xi)}{\left(t_{j+1}-\xi\right)^{1-\beta}} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{s=0}^{j} \frac{u_x(x_i,t_s) + u_x(x_i,t_{s+1})}{2} \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} \frac{d\xi}{\left(t_{j+1}-\xi\right)^{1-\beta}} + O(\tau).$$

Задаче (1)-(3) поставим в соответствие разностную схему:

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha} y + a\Delta_{0t_{j+1}}^{-\beta} y_{\mathring{x}} = y_{\bar{x}x}^{j+1} + \varphi^{j+1}, \; 1 \le i \le N-1, \; 1 \le j \le K-1, \tag{4}$$

$$y(0,t) = 0, \quad y(l,t) = 0, \quad 0 < t \le T, \tag{5}$$

$$y(x,0)=u_0(x), \quad 0\le x\le l, \tag{6}$$

где $y_{\bar{x}x}^{j+1}=\frac{y_{i+1}^{j+1}-2y_i^{j+1}+y_{i-1}^{j+1}}{h^2}$, $y_{\mathring{x}}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$, $\varphi=f\left(x_i,t_{j+1}\right)$,

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}y=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha})y_t^s$$

- разностный аналог производной Капуто [2],

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{-\beta}y_{\mathring{x}}=\frac{1}{2\Gamma(1+\beta)}\sum_{s=0}^{j}(t_{j-s+1}^{\beta}-t_{j-s}^{\beta})\left(y_{\mathring{x},i}^{s+1}+y_{\mathring{x},i}^{s}\right)$$

- разностный аналог дробного интеграла Римана-Лиувилля порядка β.

Погрешность аппроксимации разностной схемы (4)-(6) имеет порядок $O(\tau+h^2)$ [2].

Исследуем устойчивость разностной схемы (4)-(6). Введем скалярное произведение и норму в виде

$$(u,v)=\sum_{i=1}^{N-1}u_iv_ih, \quad (u,u)=\sum_{i=1}^{N-1}u_i^2h=\|u\|_0^2.$$

Лемма 1. *[5] Для любой функции $y(t)$, определенной на сетке $\bar{\omega}_\tau$, справедливо неравенство*

$$y^{j+1}\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}y\ge\frac{1}{2}\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}(y^2).$$

Умножим выражение (4) скалярно на y

$$\left(\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}y,y\right)+\left(a\Delta_{0t_{j+1}}^{-\beta}y_x,y\right)=(y_{\bar{x}x},y)+(\varphi,y). \tag{7}$$

Преобразуем члены, входящие в тождество (7) с учетом леммы 1

$$\left(\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}y,y\right)\ge\frac{1}{2}\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}\|y\|_0^2,$$

обозначим $y_{\bar{x}}=v$

$$(y_{\bar{x}x},y)=(v_x,y)=\sum_{i=1}^{N-1}v_{x_i}y_ih=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{v_{i+1}-v_i}{h}y_ih=\sum_{i=1}^{N-1}v_{i+1}y_i-\sum_{i=1}^{N-1}v_iy_i=$$

$$=-v_1y_0+\sum_{i=1}^{N}v_iy_{i-1}-\sum_{i=1}^{N}v_iy_i+v_Ny_N=-\sum_{i=1}^{N}v_i\frac{y_i-y_{i-1}}{h}h-v_1y_0+v_Ny_N=$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}v_iy_{\bar{x}_i}h-v_1y_0+v_Ny_N=-(v,y_{\bar{x}}]=-\|y_{\bar{x}}]|_0^2, \tag{8}$$

$$(\varphi,y)\le\varepsilon\|y\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|\varphi\|_0^2, \quad \varepsilon>0. \tag{9}$$

Пусть $w=\Delta_{0t_{j+1}}^{-\beta}y,\ w_0=w_N=0,$

$$-\left(aw_{\mathring{x}},y\right)=-a\sum_{i=1}^{N-1}w_{\mathring{x}}y_ih=-\frac{a}{\Gamma(1+\beta)}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{w_{i+1}-w_i+w_i-w_{i-1}}{2h}y_ih=$$

$$=-\frac{a}{2\Gamma(1+\beta)}\sum_{i=1}^{N-1}\left(w_{i+1}-w_i\right)y_i-\frac{a}{2\Gamma(1+\beta)}\sum_{i=1}^{N-1}\left(w_i-w_{i-1}\right)y_i=$$

$$=-\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{N}y_{\bar{x},i}w_ih-\frac{a}{2}\sum_{i=0}^{N-1}y_{x,i}w_ih=-\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{N}y_{\bar{x},i}w_ih-$$

$$-\frac{a}{2}\sum_{i=1}^{N}y_{\bar{x},i}w_{i-1}h=-\frac{a}{2}\left(w+w_{(-1)},y_{\bar{x}}\right],$$

$$-\frac{a}{2}\left(w+w_{(-1)},y_{\bar{x}}\right]\leq\frac{a}{2}\|w+w_{(-1)}]|_0\|y_{\bar{x}}]|_0\leq\varepsilon\|y_{\bar{x}}]|_0^2+\frac{a^2}{16\varepsilon}\|w+w_{(-1)}\|_0^2,\quad \varepsilon>0,$$

с учетом оценки

$$\|w+w_{(-1)}\|_0^2=\sum_{i=1}^{N}\left(w_i+w_{i-1}\right)^2h\leq2\sum_{i=1}^{N}\left(w_i^2+w_{i-1}^2\right)h\leq4\|w\|_0^2,$$

имеем

$$-\frac{a}{2}\left(w+w_{(-1)},y_{\bar{x}}\right]\leq\varepsilon\|y_{\bar{x}}]|_0^2+\frac{a^2}{4\varepsilon}\|w\|_0^2=\varepsilon\|y_{\bar{x}}\|_0^2+\frac{a^2}{4\varepsilon}\|\Delta_{0t}^{-\beta}y\|_0^2. \tag{10}$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части неравенства (10)

$$\|\Delta_{0t}^{-\beta}y\|_0^2=\sum_{i=1}^{N-1}\left(\Delta_{0t}^{-\beta}y_i\right)^2h=$$

$$=\frac{1}{4\Gamma^2(1+\beta)}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{\beta}-t_{j-s}^{\beta}\right)\left(y_i^{s+1}+y_i^s\right)\right)^2h\leq$$

$$\leq\frac{1}{4\Gamma^2(1+\beta)}\sum_{i=1}^{N-1}\left(\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{\beta}-t_{j-s}^{\beta}\right)\cdot\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{\beta}-t_{j-s}^{\beta}\right)\left(y_i^{s+1}+y_i^s\right)^2\right)h=$$

$$=\frac{1}{4\Gamma^2(1+\beta)}\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{\beta}-t_{j-s}^{\beta}\right)\cdot\left(\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{\beta}-t_{j-s}^{\beta}\right)\sum_{i=1}^{N-1}\left(y_i^{s+1}+y_i^s\right)^2h\right)\leq$$

$$\leq\frac{t_{j+1}^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}\Delta_{0t}^{-\beta}\|y\|_0^2. \tag{11}$$

Применяя полученные преобразования (8)-(11) к тождеству (7) получим

$$\frac{1}{2}\Delta_{0t}^{\alpha}\|y\|_0^2+\|y_{\bar{x}}]|_0^2\leq\frac{a^2t_{j+1}^{\beta}}{4\varepsilon\Gamma(1+\beta)}\Delta_{0t}^{-\beta}\|y\|_0^2+\varepsilon\|y_{\bar{x}}]|_0^2+\varepsilon\|y\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|\phi\|_0^2. \tag{12}$$

Из неравенства (12) при $\varepsilon=1/2$, с учетом $\|y\|_0^2\leq\frac{l^2}{2}\|y_{\bar{x}}]|_0^2$ имеем

$$\Delta_{0t}^{\alpha}\|y\|_0^2+\frac{1}{2}\|y_{\bar{x}}]|_0^2\leq\frac{a^2T^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}\Delta_{0t}^{-\beta}\|y\|_0^2+\|\phi\|_0^2. \tag{13}$$

Умножим обе части неравенства (13) на τ и просуммируем по k от 0 до j

$$\sum_{k=0}^{j}\tau\Delta_{0t}^{\alpha}\|y\|_0^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j}\tau\|y_{\bar{x}}]|_0^2\leq\frac{a^2T^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}\sum_{k=0}^{j}\tau\Delta_{0t}^{-\beta}\|y\|_0^2+\sum_{k=0}^{j}\tau\|\phi\|_0^2. \tag{14}$$

Из (14) имеем

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{k=0}^{j}\left(t_{j-k+1}^{1-\alpha}-t_{j-k}^{1-\alpha}\right)\|y^{k+1}\|_0^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j}\tau\|y_{\bar{x}}^{k+1}]|_0^2\leq M_1\|y^{j+1}\|_0^2+$$

$$+M_2\sum_{k=0}^{j}\|y^s\|_0^2+\sum_{k=0}^{j}\tau\|\phi\|_0^2+\frac{t_{j+1}^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\|y^0\|_0^2. \tag{15}$$

Лемма 2. *[7] Предположим, что неотрицательные последовательности $y^j,\varphi^j,j=0,1,2,...$ удовлетворяют неравенству*

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}y^{j+1}\leq\lambda_1y^{j+1}+\lambda_2y^j+\varphi^j,\quad j\geq1$$

где $\lambda_1\geq0$ и $\lambda_2\geq0-$ известные постоянные. Тогда существует такое τ^*, что если $\tau\leq\tau^*$, то

$$y^{j+1}\leq2\left(y^0+\frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\leq k\leq j}\varphi^k\right)E_{\alpha}(2\lambda t_j^{\alpha}),\quad 1\leq j\leq K,$$

где $E_{\alpha}(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}-$ функция Миттаг-Леффлера, $\lambda=\lambda_1+\frac{\lambda_2}{2-2^{1-\alpha}}$.

Отбросив второе слагаемое в левой части неравенства (15) и применяя лемму 2, имеем

$$\|y^{j+1}\|_0^2\leq M_3\left(\|y^0\|+\frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\leq k\leq j}\sum_{k=0}^{j}\|\varphi^k\|_0^2\right), \tag{16}$$

где M_3 - известное число.

С учетом (16) из (15) получим априорную оценку

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{k=0}^{j}\left(t_{j-k+1}^{1-\alpha}-t_{j-k}^{1-\alpha}\right)\|y^{k+1}\|_0^2+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{j}\tau\|y_{\bar{x}}^{k+1}]|_0^2\leq$$

$$M\left(\|y^0\|+\frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\leq k\leq j}\sum_{k=0}^{j}\|\varphi^k\|_0^2\right) \tag{17}$$

где M - известное число.

Теорема. *Разностная задача (4)-(6) при $\tau\leq\tau^*$ устойчива и для ее решения справедлива априорная оценка (17).*

Из априорной оценки (17) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы (4)-(6) по начальным данным и правой части.

Сходимость разностной схемы (4)-(6) следует из априорной оценки (17). Введем обозначение $y=z+u$. Тогда $z=y-u$ является решением следующей задачи:

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}z+a\Delta_{0t_{j+1}}^{-\beta}z_{\mathring{x}}=z_{\bar{x}x}^{j+1}+\Psi,\ 1\leq i\leq N-1,\ 1\leq j\leq K-1, \tag{18}$$

$$z(0,t)=0, \quad z(l,t)=0, \quad 0<t\le T, \tag{19}$$

$$z(x,0)=u_0(x), \quad 0\le x\le l, \tag{20}$$

где $\Psi = y_{\bar{x}x}^{j+1} + \phi - \Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha} y - a\Delta_{0t_{j+1}}^{-\beta} y_{\mathring{x}} = O(\tau+h^2)$.

Решение задачи (18)-(20) удовлетворяет априорной оценке (17), следовательно, решение разностной задачи (4)-(6) сходится к решению дифференциальной задачи (1)-(3) с порядком $O(\tau+h^2)$.

Расчеты тестовых задач

Для численной реализации разностной схемы (4)-(6) методом прогонки, приведем ее к виду, удобному для вычислнений

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\frac{y^{s+1}-y^{s}}{\tau}+$$

$$+a\frac{1}{2\Gamma(1+\beta)}\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{\beta}-t_{j-s}^{\beta}\right)\frac{y_{i+1}^{s+1}+y_{i+1}^{s}-y_{i-1}^{s+1}-y_{i}^{s}}{2h}=$$

$$=\frac{y_{i+1}^{j+1}-2y_{i}^{j+1}+y_{i-1}^{j+1}}{h^2}+\phi_i^{j+1},$$

$$\frac{1}{\tau^{\alpha}\Gamma(2-\alpha)}\left(y_i^{j+1}-y_i^{j}\right)+\frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\left(y_i^{s+1}-y_i^{s}\right)+$$

$$+\frac{a\tau^{\beta}}{4h\Gamma(1+\beta)}\left(y_{i+1}^{j+1}-y_{i-1}^{j+1}+y_{i+1}^{j}-y_{i-1}^{j}\right)+$$

$$\frac{a}{4h\Gamma(1+\beta)}\sum_{s=0}^{j-1}\left(t_{j-s+1}^{\beta}-t_{j-s}^{\beta}\right)\left(y_{i+1}^{s+1}-y_{i-1}^{s+1}+y_{i+1}^{s}-y_{i-1}^{s}\right)=$$

$$=\frac{1}{h^2}\left(y_{i+1}^{j+1}-2y_i^{j+1}+y_{i-1}^{j+1}\right)+\phi_i^{j+1},$$

отсюда имеем

$$-By_{i+1}^{j+1}+Cy_i^{j+1}-Ay_{i-1}^{j+1}=F_i^{j+1}, \tag{21}$$

$$y_0^{j+1}=0, \quad y_N^{j+1}=0, \tag{22}$$

$$y_i^0=u_0(x_i), \tag{23}$$

где

$$-B=\frac{\tau}{h^2}-\frac{a\tau^{\beta+1}}{4h\Gamma(1+\beta)}, \quad C=\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{2\tau}{h^2}, \quad A=\frac{\tau}{h^2}+\frac{a\tau^{\beta+1}}{4h\Gamma(1+\beta)}$$

$$F_i^{j+1}=\tau\phi_i^{j+1}+\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}-\frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-1}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\left(y_i^{s+1}-y_i^{s}\right)-$$

$$-\frac{a\tau^{\beta+1}}{4h\Gamma(1+\beta)}\left(y_{i+1}^{j}-y_{i-1}^{j}\right)-$$

$$-\frac{a\tau}{4h\Gamma(1+\beta)}\sum_{s=0}^{j-1}\left(t_{j-s+1}^{\beta}-t_{j-s}^{\beta}\right)\left(y_{i+1}^{s+1}-y_{i-1}^{s+1}+y_{i+1}^{s}-y_{i-1}^{s}\right).$$

Численные расчеты проведены по формулам (21)-(22) для тестового примера, когда функция

$$u(x,t)=\left(t^4+3t^3+2t^2+1\right)\sin\pi x$$

точное решение задачи (1)-(3) и

$$f(x,t)=\left(\frac{24t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)}+\frac{18t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)}+\frac{4t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\right)sin(\pi x)+$$

$$+a\left(\frac{24t^{4+\beta}}{\Gamma(5+\beta)}+\frac{18t^{3+\beta}}{\Gamma(4+\beta)}+\frac{4t^{2+\beta}}{\Gamma(3+\beta)}+\frac{t^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}\right)\pi cos(\pi x)-\pi^2 sin(\pi x)\left(t^4+3t^3+2t^2+1\right)$$

.

В следующих таблицах представлены погрешности $z=y-u$ и порядок сходимости CO в норме $\|\cdot\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$ при $T=1$, где $\|z\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}=\max\limits_{(x_i,t_j)\in\bar{\omega}_{h\tau}}|z|$. Расчеты тестовых задач проведены с помощью языка программирования *Python*, версия 3.7.

В таблице 1 представленые данные показывают, что при возрастании числа шагов сетки по правилу $h^2=\tau$ максимальная погрешность уменьшается со скоростью $O\left(h^2+\tau\right)$. Порядок сходимости вычисляется по формуле $log_{\frac{h_1}{h_2}}\frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$.

Таблица 1

Погрешность и порядок сходимости при $h^2=\tau$, $a=1$, $\alpha=0.9$, $\beta=0.1$

h	$\|z\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	$CO_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
1/10	$5.73032e-2$	
1/20	$1.41274e-2$	2.02
1/40	$3.46289e-3$	2.03
1/80	$8.50984e-4$	2.03

Данные таблицы 2 показывают, что по мере увеличения шага по временной сетке при $h=1/10000$ максимальная погрешность уменьшается со скоростью $O(\tau)$. Порядок сходимости вычисляется по формуле $log_{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\frac{\|z_1\|}{\|z_2\|}$.

Таблица 2

Погрешность и порядок сходимости по τ при $h = 1/10000$, $a = 1$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.1$

τ	$\|z\|_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$	$CO_{C(\bar{\omega}_{h\tau})}$
1/10	$1.15402e-1$	
1/20	$5.56636e-2$	1.05
1/40	$2.64259e-2$	1.07
1/80	$1.24415e-2$	1.09
1/160	$5.83213e-3$	1.10

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

1. Головизнин В. М., Киселев В. П., Короткий И. А. Численные методы решения уравнения дробной диффузии с дробной производной по времени в одномерном случае / *Препринт IBRAE-2003-12*. М., Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, 2002. 35 с. [Goloviznin V. M., Kiselev V. P., Korotkiy I. A. Chislennyye metody resheniya uravneniya drobnoy diffuzii s drobnoy proizvodnoy po vremeni v odnomernom sluchaye / Preprint IBRAE-2003-12. M., Institut problem bezopasnogo razvitiya atomnoy energetiki RAN, 2002. 35 pp. (In Russian)]
2. Шхануков-Лафишев М. Х., Таукенова Ф. И. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 2006. Т. 46, № 10, С. 1871–1881. [Shkhanukov-Lafishev M. KH., Taukenova F. I. Raznostnyye metody resheniya krayevykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka // Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki, 2006. vol. 46, no. 10, pp. 1871–1881 (In Russian)].
3. Alikhanov, A. A A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // Journal of Computational Physics, 2015. vol. 280, pp. 424–438.
4. Alikhanov, A. A. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings // Applied Mathematics and Computation, 2012. no. 219, pp. 3938–3946.
5. Alikhanov A. A. Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation // Applied Mathematics and Computation, 2015. no. 268, pp. 12–22.
6. Шогенова Е. М. Априорные оценки решения краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // *Известия КБНЦ РАН*, 2017. Т. 80, № 6, С. 60–66. [Shogenova Ye. M Apriornyye otsenki resheniya krayevykh zadach dlya uravneniya konvektsii-diffuzii drobnogo poryadka // Izvestiya KBNTS RAN, 2017. vol. 80, no. 6, pp. 60–66 (In Russian)].
7. Li, Dongfang and Liao, Hong-Lin and Sun, Weiwei and Wang, Jilu and Zhang, Jiwei Analysis of $L1$-Galerkin FEMs for time-fractional nonlinear parabolic problems // arXiv preprint arXiv:1612.00562.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2021. vol. 36. no. 3. P. 146–154. ISSN 2079-6641

MSC 35R11 Research Article

Difference scheme for the convection-diffusion equation of fractional order

E. M. Kazakova

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89a, Russia
E-mail: shogenovae@inbox.ru

A difference scheme is constructed that approximates the first boundary value problem for the fractional-order convection-diffusion equation. The stability and convergence of the difference scheme.

Key words: convection-diffusion equation, boundary-value problem, numerical solution, stability and convergence.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-146-154

Original article submitted: 17.06.2021 Revision submitted: 04.10.2021

For citation. Kazakova E. M. Difference scheme for the convection-diffusion equation of fractional order. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **36**: 3, 146-154. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-146-154

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. The work was carried out with the financial support of the RFBR and GFEN of China in the framework of the scientific project No. 20-51-53007.