УДК 517.95 Научная статья

Смешанная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами

Л. М. Энеева[1,2]

[1] Институт прикладной математики и автоматизации, Кабардино-Балкарский научный центр РАН, 360017, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А, Россия

[2] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского,173, Россия

E-mail: eneeva72@list.ru

Решается смешанная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего композицию лево- и правосторонних операторов дробного дифференцирования Римана-Лиувилля и Капуто. Задача эквивалентно редуцирована к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, для которого найдено достаточное условие однозначной разрешимости. В качестве следствия, для исследуемой задачи доказано неравенство Ляпунова.

Ключевые слова: уравнение с дробными производными с различными началами, смешанная краевая задача, производная Римана-Лиувилля, производная Капуто, неравенство Ляпунова.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-65-71

Поступила в редакцию: 11.09.2021 В окончательном варианте: 04.10.2021

Для цитирования. Энеева Л. М. Смешанная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 36. № 3. С. 65-71. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-65-71

Введение

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)-q(x)u(x)=f(x) \qquad (0<\alpha<1). \tag{1}$$

Здесь $q(x)$ и $f(x)$ — заданные в интервале $]0,1[$ функции, а через D_{0x}^{α} и ∂_{1x}^{α} обозначены дробные производные порядка α по переменной $x\in]0,1[$, в смысле Римана-Лиувилля

Финансирование. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке по проекту «Водное благополучие и зеленая экономика» в рамках программы «Приоритет 2030».

с началом в точке $x=0$, и в смысле Капуто с началом в точке $x=1$, которые определяются, соответственно, равенствами [1]:

$$D_{0x}^{\alpha}u(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)(x-t)^{-\alpha}dt,$$

и

$$\partial_{1x}^{\alpha}u(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^1 (t-x)^{-\alpha}\frac{d}{dt}u(t)dt.$$

Исследования последних лет убедительно показали, что дифференциальные уравнения дробного порядка являются эффективным инструментом математического моделирования различных физических и геофизических процессов [1]. При этом, весьма действенным оказывается введение понятия эффективной скорости изменения параметров моделируемых систем, приводящее к дифференциальным уравнениям, содержащим композиции лево- и правосторонних операторов дробного дифференцирования с различными началами [2], [3]. Именно к классу таких уравнений относится уравнение (1).

В работе [4] для уравнения

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)-\lambda u(x)=0, \tag{2}$$

исследована спектральная задача В работах [5] и [6] для уравнения (2) найдена нижняя оценка для первого собственного значения задачи Дирихле и исследован вопрос разрешимости задачи Неймана для уравнения дробного порядка с различными началами, найдена оценка для первого ненулевого собственного значения.

В работах [7], [8], [9] найдены необходимые условия существования отличного от тождественного нуля решения однородной задачи Дирихле для уравнения (1) и некоторых его аналогах, имеющие форму интегральных оценок для потенциала и являются аналогами неравенства Ляпунова [10], [11]. Неравенство Ляпунова для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с левосторонней дробной производной доказано в работе [12].

Отметим также работы [13]-[17], в которых рассматривались различные вопросы теории дифференциальных уравнений, содержащих композицию операторов дробного дифференцирования с различными началами.

В данной работе решается смешанная краевая задача для уравнения (1). Задача эквивалентно редуцирована к нагруженному интегральному уравнению, для которого найдено достаточное условие однозначной разрешимости. Как следствие, для исследуемой задачи получено неравенство Ляпунова.

Постановка задачи

Далее, $AC[0,1]$ обозначает пространство абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций.

Определение. Регулярным решением уравнения (1) будем называть функцию $u(x)$ такую, что

$$u(x)\in AC[0,1], \qquad D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)\in AC[0,1],$$

и удовлетворяющую уравнению (1) для всех $x\in]0,1[$.

Сформулируем задачу, которую будем исследовать в данной работе.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) = u_0 \tag{3}$$

и

$$u(1) = u_1. \tag{4}$$

Условие (3) при $\alpha = 1$ примет вид $u'(0) = -u_0$. Поэтому задачу (1), (3) и (4) будем называть смешанной краевой задачей.

Редукция к интегральному уравнению

Введем обозначения

$$K(x,t) = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_{\max\{x,t\}}^{1}(s-x)^{\alpha-1}(s-t)^{\alpha-1}ds. \tag{5}$$

Легко заметить, что

$$K(x,t) = K(t,x), \tag{6}$$

а также, что

$$K(x,t) \in C\left([0,1]\times[0,1]\right) \tag{7}$$

при условии $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$.

Теорема 1. *Пусть* $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $q(x) \in C[0,1]$, $f(x) \in L[0,1]$. *Если функция* $u(x)$ *является регулярным решением уравнения (1), то она удовлетворяет нагруженному интегральному уравнению*

$$u(x) - \int_0^1 K(x,t)q(t)u(t)dt = \tag{8}$$

$$= u(1) + K(x,0)\cdot\left[D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)\right]_{x=0} + \int_0^1 K(x,t)f(t)dt.$$

Обратно, всякое интегрируемое решение уравнения (8) является регулярным решением уравнения (1).

Доказательство. Пусть функция $u(x)$ является регулярным решением уравнения (1). В силу обобщенной формулы Ньютона-Лейбница для операторов дробного дифференцирования и определения регулярного решение, имеем

$$D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) - \int_0^x q(t)u(t)\,dt = C_2 + \int_0^x f(t)\,dt, \tag{9}$$

$$\partial_{1x}^{\alpha}u(x) - D_{0x}^{-\alpha}q(x)u(x) = C_2\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + D_{0x}^{-\alpha}f(x)$$

и

$$u(x) - D_{1x}^{-\alpha}D_{0x}^{-\alpha}q(x)u(x) = \frac{C_2}{\Gamma(\alpha)}D_{1x}^{-\alpha}x^{\alpha-1} + C_1 + D_{1x}^{-\alpha}D_{0x}^{-\alpha}f(x) \tag{10}$$

С учетом (5), можем написать

$$D_{1x}^{-\alpha}x^{\alpha-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^1 (s-x)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}\,ds = \Gamma(\alpha)K(x,0),$$

и

$$D_{1x}^{-\alpha} D_{0x}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_x^1 (s-x)^{\alpha-1} \int_0^s (s-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt\,ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 f(t) \int_{\max\{x,t\}}^1 (s-x)^{\alpha-1}(s-t)^{\alpha-1}\,ds\,dt = \int_0^1 f(t) K(x,t)\,dt.$$

Отсюда получаем, что функция $u(x)$, будучи регулярным решением уравнения (1), является также решением интегрального уравнения

$$u(x) - \int_0^1 K(x,t) q(t) u(t) dt = C_1 + C_2 K(x,0) + \int_0^1 K(x,t) f(t) dt \tag{11}$$

для некоторых констант C_1 и C_2.

Определим, как связаны константы C_1, C_2 и решение $u(x)$. Из (5) следует, что

$$\lim_{x \to 1} K(x,t) = 0.$$

Устремляя в обеих частях равенства (11) x к единице, получаем

$$u(1) = C_1. \tag{12}$$

Далее, устремляя в (9) x к нулю, имеем

$$\lim_{x \to 0} D_{0x}^{\alpha-1} \partial_{1x}^{\alpha} u(x) = C_2. \tag{13}$$

Таким образом, равенства (12) и (13), вместе с (11), доказывают (8). □

Теорема существования и единственности решения

Теорема 2. *Пусть $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $q(x) \in C[0,1]$, $f(x) \in L[0,1]$ и выполнено условие*

$$\int_0^1 |q(t)|\,dt < (2\alpha - 1)\Gamma^2(\alpha). \tag{14}$$

Тогда задача (1), (3) и (4) имеет в точности одно решение. Это решение может быть найдено как решение нагруженного интегрального уравнения

$$u(x) - \int_0^1 K(x,t) q(t) u(t) dt = F(x), \tag{15}$$

где

$$F(x) = u_1 + u_0 K(x,0) + \int_0^1 K(x,t) f(t) dt.$$

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что любое регулярное решение задачи (1), (3) и (4) является решением интегрального уравнения (15). С учетом (5), для ядра уравнения (15) нетрудно получить следующие оценки

$$0 \le K(x,t) \le \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)} \int_\xi^1 (s-\xi)^{2\alpha-2} ds = \frac{(1-\xi)^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \le \frac{1}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}, \tag{16}$$

где $\xi = \max\{x,t\}$.

С помощью (16) можно показать, что однородное уравнение (15) (т.е. при $F = 0$), при выполнении условия (14), не может иметь отличных от тождественного нуля решений. Действительно, в этом случае имеем

$$\sup_{[0,1]} |u(x)| \leq \sup_{[0,1]} \left| \int_0^1 K(x,t)q(t)u(t)dt \right| \leq \frac{\sup_{[0,1]} |u(x)|}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 |q(t)|\,dt.$$

Предположив, что $\sup_{[0,1]} |u(x)| > 0$, получим, что

$$\frac{1}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 |q(t)|\,dt \geq 1.$$

Последнее противоречит (14). Это доказывает, что однородное уравнение (15) имеет только тривиальное решение. Следовательно уравнение (15) при условии (14) имеет не более одного решения.

Уравнение (15) является уравнением Фредгольма второго рода с непрерывным ядром, и поэтому из единственности его решения следует его существование.

Таким образом, уравнение (15) имеет единственное решение, которое может быть найдено, например, методом последовательных приближений. С учетом теоремы 4 это доказывает однозначную разрешимость задачи (1), (3) и (4). □

Неравенство Ляпунова

Следствием теоремы 2 является следующее утверждение.

Следствие. Пусть $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ и $u(x)$ — отличное от тождественного нуля регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям (3) и (4). Тогда

$$\int_0^1 |q(t)|\,dt \geq (2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha). \tag{17}$$

Доказательство. Действительно, если допустить, что неравенство (17) нарушено, то имеет место (14). В силу теоремы 4 это означало бы, что $u \equiv 0$. Однако это противоречит условиям теоремы. Следовательно неравенство (17) выполнено. □

Неравенство (17) представляет собой аналог неравенства Ляпунова для задачи (1), (3) и (4) (см. [10], [11], а также [7]).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение.* М:: Физматлит, 2003. 272 с. [Nakhushev A. M. Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye. M.: Fizmatlit, 2003. 272 pp. (In Russian)]
2. Рехвиашвили С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // *Письма в ЖТФ*, 2004. Т. 30, № 2, С. 33–37. [Rekhviashvili S. SH. Formalizm Lagranzha s drobnoy proizvodnoy v zadachakh mekhaniki // Pis'ma v ZHTF, 2004. vol. 30, no. 2, pp. 33–37 (In Russian)].
3. Рехвиашвили С. Ш. К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования // *Нелинейный мир*, 2007. Т. 5, № 4, С. 194–197. [Rekhviashvili S. SH. K opredeleniyu fizicheskogo smysla drobnogo integro-differentsirovaniya // Nelineynyy mir, 2007. vol. 5, no. 4, pp. 194–197 (In Russian)].

4. Энеева Л. М. Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 3, № 2(11), С. 39–44. [Eneeva L. M. Krayevaya zadacha dlya differentsial'nogo uravneniya s proizvodnymi drobnogo poryadka s razlichnymi nachalami // Vest. KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki, 2015. vol. 3, no. 2(11), pp. 39–44 (In Russian)].

5. Энеева Л. М. Оценка первого собственного значения задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами // *Известия КБНЦ РАН*, 2017. № 1(75), С. 34–40. [Eneeva L. M. Otsenka pervogo sobstvennogo znacheniya zadachi Dirikhle dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya s proizvodnymi drobnogo poryadka s razlichnymi nachalami // Izvestiya KBNTS RAN, 2017. no. 1(75), pp. 34–40 (In Russian)].

6. Энеева Л. М. О задаче Неймана для уравнения с дробными производными с различными началами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2017. № 1(75), С. 34–40. [Eneeva L. M. O zadache Neymana dlya uravneniya s drobnymi proizvodnymi s razlichnymi nachalami // Vest. KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki., 2017. no. 1(75), pp. 34–40 (In Russian)].

7. Энеева Л. М. Неравенство Ляпунова для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2019. № 3(28), С. 32–40. [Eneeva L. M. Neravenstvo Lyapunova dlya uravneniya s proizvodnymi drobnogo poryadka s razlichnymi nachalami // Vest. KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki, 2019. no. 3(28), pp. 32–40 (In Russian)].

8. Eneeva L. M., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Rekhviashvili S. Sh. Lyapunov inequality for a fractional differential equation modelling damped vibrations of thin film MEMS // Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019, E19100.

9. Rekhviashvili S. Sh., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Eneeva L. M. Modeling damped vibrations of thin film MEMS // Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019, E19101.

10. Ляпуновъ А. М. Объ одномъ вопросе, касающемся линейныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка съ періодическими коэффиціентами // *Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер.*, 1897. Т. 5, С. 190–254. [Lyapunov A. M. Ob odnom voprose, kasayushchemsya lineynykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami // Soob. Khar'kov. matem. obshch. Vtoraya ser., 1897. vol. 5, pp. 190–254 (In Russian)].

11. Brown R. C., Hinton D. B. Lyapunov Inequalities and their Applications, Survey on Classical Inequalities. Mathematics and Its Applications.. Dordrecht: Springer, 2000. 517 pp.

12. Ferreira R.A.C. A Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem // Fract. Calc. Appl. Anal., 2013. vol. 16, no. 4, pp. 978–984.

13. Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives // Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série, 2006. vol. 80(94), pp. 259–272.

14. Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives // Fractional Calculus and Applied Analysis, 2007. vol. 10, no. 2, pp. 139–150.

15. Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics, 2014. vol. 13, no. 1, pp. 125–142.

16. Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator // Documenta Mathematica, 2016. vol. 21, pp. 1503–1514.

17. Eneeva L., Pskhu A., Rekhviashvili S. Ordinary Differential Equation with Left and Right Fractional Derivatives and Modeling of Oscillatory Systems // Mathematics, 2020. vol. 8(12), pp. 2122.

18. Rekhviashvili S. Sh., Pskhu A. V., Agarwal P., Jain Sh. Application of the fractional oscillator model to describe damped vibrations // Turkish Journal of Physics, 2019. vol. 43, pp. 236–242.

19. Rekhviashvili S. Sh., Pskhu A. V. New Method for Describing Damped Vibrations of a Beam with a Built-in End // Technical Physics, 2019. vol. 64, pp. 1237–1241.

MSC 26A33 Research Article

Mixed boundary value problem for an ordinary differential equation with fractional derivatives with different origins

L. M. Eneeva[1,2]

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center RAS, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia
[2] Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, 360004, Nalchik, Chernyshevsky St., 173, Russia
E-mail: eneeva72@list.ru

A mixed boundary value problem is solved for an ordinary differential equation containing a composition of left- and right-sided Riemann-Liouville and Caputo fractional differentiation operators. The problem is equivalently reduced to a Fredholm integral equation of the second kind, for which a sufficient condition for unique solvability is found. As a consequence, the Lyapunov inequality is proved for the problem under study.

Key words: fractional differential equation with different origins, mixed boundary value problem, Riemann-Liouville derivative, Caputo derivative, Lyapunov inequality.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-65-71

Original article submitted: 11.09.2021 Revision submitted: 04.10.2021

For citation. Eneeva L. M. Mixed boundary value problem for an ordinary differential equation with fractional derivatives with different origins. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **36**: 3, 65-71. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-65-71

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. This work was carried out with partial financial support under the "Water Wellbeing and Green Economy"project within the framework of the "Priority 2030"program.