УДК 517.946 Научная статья

Двухфазная задача со свободной границей для систем параболических уравнений с нелинейным членом конвекции

А. Н. Элмуродов

Институт математики имени В.И.Романовского АНРУз, г. Ташкент, р. Олмазор, ул. Университет, 4б, Узбекистан

E-mail: elmurodov@mathinst.uz

Эта статья посвящена задаче со свободной границей для полулинейных параболических уравнений, в которой описывается феномен сегрегации местообитаний в популяционной экологии. Основная цель — показать глобальное существование, единственность решений проблемы. Предлагается двухфазная математическая модель со свободными границами для параболических уравнений типа реакция-диффузия. Установлены априорные оценки щаудеровского типа, на основе которых доказана однозначная разрешимость задачи. Неустойчивость каждого решения полностью определяется с помощью теоремы сравнения.

Ключевые слова: математическая модель, априорные оценки, теоремы сравнения, однозначная разрешимость.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-110-122

Поступила в редакцию: 19.06.2021 В окончательном варианте: 05.10.2021

Для цитирования. Элмуродов А. Н. Двухфазная задача со свободной границей для систем параболических уравнений с нелинейным членом конвекции // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 36. № 3. C. 110-122. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-110-122

1. Введение

Различные уравнения реакции-диффузии широко исследовались как математическое описание явлений, возникающих в популяционной экологии. Одним из интересных явлений является появление многовидового территориального деления.

В этой статье мы предлагаем модель, описывающую региональное разделение двух видов, которые борются за границу, чтобы получить свои собственные среды обитания. Предположим, что две популяции, скажем, U и V, претерпевающие диффузию и рост, существуют в одномерных интервалах $0 < x < s(t)$ и $s(t) < x < l$ соответственно. Здесь $x = 0, l$ - фиксированные границы, но промежуточная граница $x = s(t)$ не является фиксированной априори; это определяется борьбой между U и

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

V за владение собственными средами обитания. Каждый вид будет потерян через границу $x = s(t)$. Таким образом, имеем

$$d_1(u)u_t - du_{xx} - c_1u_x = u(a_1 - b_1u), \quad t > 0, \quad 0 < x < s(t), \tag{1}$$

$$d_2(v)v_t - dv_{xx} - c_2v_x = v(a_2 - b_2v), \quad t > 0, \quad s(t) < x < l, \tag{2}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ обозначает плотность населения U, V; где $f_i(w) = w(a_i - b_iw) = \begin{cases} u, & i = 1, \\ v, & i = 2, \end{cases}$ $(i = 1,2)$ - скорость распространения и скорость роста U,V. Вывод уравнений в (1)-(2) обсуждается, например, в работе Okubo [14]. На фиксированных границах $x = 0,l$ наложим

$$u_x(t,0) = 0, \quad v_x(t,l) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Предполагается, что свободная граница определяется взаимодействием между U и V в следующем смысле:

$$u(t,s(t)) = v(t,s(t)) = 0, \qquad \dot{s}(t) = -\mu u_x(t,s(t)) + \mu v_x(t,s(t)), 0 \le t \le T. \tag{4}$$

где $\dot{s}(t) = \frac{ds(t)}{dt}$, s_0, l, d, μ, a_i, b_i и c_i $(i = 1,2)$-положительные постоянные. Наконец, начальные условия даются

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \le x \le s_0 = s(0), \tag{5}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad s_0 \le x \le l, \tag{6}$$

Предполагается, что свободная граница определяется взаимодействием между U и V в следующем смысле:

В отсутствие $f_i(w)(i = 1,2)$ задача (1)-(6) сводится к двухфазной задаче Стефана в одномерном пространстве, для которой существует много работ (см. Рубинштейн [9], Каменомостская [7], Фридман [5], [1, 2, 3, 4, 8, 10, 11] и ссылки в них).

Начальные функции удовлетворяют условиям:

i. $u_0(x) \in C^{2+\alpha}[0,s_0]$, $0 \le u_0(x) < \frac{a_1}{b_1}$, $0 \le x \le s_0$;

ii. $v_0(x) \in C^{2+\alpha}[s_0,l]$, $0 \le v_0(x) < \frac{a_2}{b_2}$, $s_0 \le x \le l$;

iii. $0 < d_0 \le d_i(w) = \begin{cases} d_1(u), & i = 1, \\ d_2(v), & i = 2, \end{cases}$ $0 < \alpha < 1$.

Установлены априорные оценки шаудеровского типа. На основе полученных априорных оценок доказана однозначная разрешимость задачи.

2. Априорные оценки

В этом разделе установим некоторые априорные оценки шаудеровского типа, которые будут использованы при доказательстве глобальной разрешимости задачи. При этом широко применяются принцип максимума и теоремы сравнений [18].

Теорема 2.1. *Пусть $c_2 > d$, функции $u(t,x)$, $v(t,x)$, $s(t)$ решение задачи (1)-(6). Тогда*

$$0 < u(t,x) \leqslant M_1 = \frac{a_1}{b_1} \quad \textit{в} \quad \overline{D}_1, \tag{7}$$

$$0 < v(t,x) \leqslant M_2 = \frac{a_2}{b_2} \quad \textit{в} \quad \overline{D}_2, \tag{8}$$

$$0 < \dot{s}(t) \leqslant \mu(N_1+N_2) = M_3, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{9}$$

где $N_1 \geq max\{\max\limits_{x}\{\frac{u_0(x)}{s_0-x}\}, \frac{a_1^2}{c_1 b_1}\}$, $N_2 \geq max\{\frac{a_2}{b_2(1-e^{(s_0-x)})}\}$.

Доказательство. По принципу максимума получаем, что $u(t,x) > 0$ в $D_1 = \{(t,x) : 0 < t, 0 < x < s(t)\}, v(t,x) > 0$ в $D_2 = \{(t,x) : 0 < t, s(t) < x < l\}$.

Мы построим пространственно однородное решение (1). Будем искать $u(t,x)$ как

$$u(t,x) = y(t).$$

Отсюда имеем, что

$$\begin{gathered} y'(t) = \alpha(t)y(t) - \beta(t)y^2(t), \\ y(0) = y_0 = ||u_0||_\infty, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\alpha(t) = \frac{a_1}{d_1(y(t))}, \beta(t) = \frac{b_1}{d_1(y(t))}$.

Перершмем (10) как

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y(t)}\right) = \frac{\alpha(t)}{y(t)} - \beta(t).$$

Обозначая $m(t) = \frac{1}{y(t)}$, имеем

$$\frac{d}{dt}\left(m(t)e^{\int\limits_0^t \alpha(\eta)d\eta}\right) = \beta(t)e^{\int\limits_0^t \alpha(\eta)d\eta}.$$

Отсюда следует, что

$$y(t) = \frac{e^{\int\limits_0^t \alpha(\eta)d\eta}}{\frac{1}{y_0} + \int\limits_0^t \beta(u)\left(e^{\int\limits_0^\eta \alpha(\xi)d\xi}\right)d\eta} = \frac{f_1(t)}{f_2(t)}.$$

По правилу L'Hospital мы получаем, что

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{a_1}{b_1}. \tag{11}$$

По принципу сравнения $u(t;x) \leq y(t)$ при $t > 0$; $x \in [0; s(t)]$, находим $\lim\limits_{t\to\infty} u(t,x) = \frac{a_1}{b_1}$.

Аналогично, получим $v(t,x) \leqslant \max\left\{\frac{a_2}{b_2}, \|v_0\|_\infty\right\} = M_2$.

С учетом установленных неравенств, в силу теоремы о знаке производной на граничной точке экстремума имеем

$$u_x(t,s(t)) \leq 0, \quad v_x(t,s(t) \geq 0, \quad t > 0.$$

Тогда из условия Стефана (4) находим

$$\dot{s}(t) > 0, \quad 0 < t \leq T.$$

Теперь с учетом (4) приступаем к доказательству верхней оценки в (9).

В области D_1 производя замену

$$U(t,x) = u(t,x) + N_1(x - s(t))$$

получим задачу

$$\begin{cases} d_1(U)U_t - dU_{xx} - c_1U_x \leq a_1M_1 - c_1N_1 \leq 0, \\ U(0,x) = u_0(x) + N_1(x - s_0) \leq 0, \\ U_x(t,0) = N_1 \geq 0, \\ U(t,s(t)) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

Если в задаче (12) взять N_1, то указанные неравенства о неположительности выполняются.

Тогда по принципу максимума , $U(t,x) \leq 0$ в D_1.

Следовательно

$$U_x(t,s(t)) = u_x(t,s(t)) + N_1 \geq 0.$$

или

$$u_x(t,s(t)) \geq -N_1.$$

Точно также в области D_2 вводя новую функцию

$$V(t,x) = v(t,x) + N_2e^{(s(\theta)-x)} \quad \text{при} \quad t \leq \theta \leq T$$

получим задачу

$$\begin{cases} d_2(V)V_t - dV_{xx} - c_2V_x = f(v) + (c_2 - d)N_2e^{s(\theta)-x} \geq 0, \\ V(0,x) = v_0(x) + N_2e^{(s(\theta)-x)} > 0, \\ V(\theta,s(\theta)) = N_2 > 0, \\ V_x(\theta,l) = -N_2e^{(s(\theta)-l)} \leq 0. \end{cases}$$

Так как $V(t,x) \geq 0$ в D_2, то

$$V(\theta,x) \geq 0 \quad \text{в} \quad D_2 \quad \text{при} \quad t \leq \theta.$$

В частности

$$V(\theta,x) \leq N_2 = V(\theta,s(\theta)).$$

Следовательно

$$V_x(\theta,s(\theta)) \leq 0.$$

Тогда $V_x(\theta,s(\theta)) = v_x(\theta,s(\theta)) - N_2 \leq 0$, или $v_x(\theta,s(\theta)) \leq N_2$.

В силу произвольности $\theta \in [0,T]$ имеем

$$v_x(t,s(t)) \leq N_2.$$

Тогда из условия Стефана (4) получим

$$\dot{s}(t) = -\mu u_x(t,s(t)) + \mu v_x(t,s(t)) \leq \mu(N_1+N_2) = M_3 \quad t \in [0,T].$$

Теорема 2.1 доказана. □

Установим границы нормы Гельдера $|\cdot|_{1+\alpha}$ и $|\cdot|_{2+\alpha}$ в $\bar{D}_T$ и $\bar{Q}_T$.

Так как установлены первоначальные априорные оценки, то можно использовать известные результаты по нелинейным параболическим уравнениям [5, 6, 7, 16]. Здесь основные трудности возникают в связи с двузначностью рассматриваемой задачи и наличием свободных подвижных границ перехода.

Для каждого уравнения задачи отдельно получим соответствующую задачу в фиксированной области.

Для каждого уравнения системы сформулируем соответствующую задачу

$$\begin{cases} du_{xx} + b_1(u,u_x) - d_1(u)u_t = 0 \text{ in } D_{1T}, \\ u(0,x) = u_0(x), 0 \leqslant x \leqslant s_0, \\ u_x(t,0) = u(t,s(t)) = 0, 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} dv_{xx} + b_2(v,v_x) - d_2(v)v_t = 0 \text{ in } D_{2T}, \\ v(0,x) = v_0(x), s_0 \leqslant x \leqslant l, \\ v_x(t,0) = v(t,s(t)) = 0, 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{14}$$

где $\dot{s}(t) = -\mu u_x(t,s(t)) + \mu v_x(t,s(t))$, $b_1(u,u_x) = c_1u_x + u(a_1 - b_1u)$, $b_2(v,v_x) = c_2v_x + v(a_2 - b_2v)$.

Исходя из этих предположений о исходных данных, мы можем предположить, что $u_0(x) = 0$, $v_0(x) = 0$.

Аналогичные результаты справедливы и для $u(t,x)$.

Теорема 4.1. *Пусть функция $v(t,x)$, $M_2 = \max\limits_{\overline{Q}}|v(t,x)|$ непрерывна в $\overline{Q}$ вместе с v_x и удовлетворяет условиям задачи (14). Тогда*

$$|v_x(t,x)| \leq C_1(M_2), \quad (t,x) \in \overline{Q}. \tag{15}$$

И если еще известно, что функция $v(t,x)$ обладает в Q суммируемыми с квадратом обобщенными производными v_{xx} и v_{tx}, то существует такое $\alpha = \alpha(M_2)$, что

$$|v(t,x)|_{1+\alpha}^{\overline{Q}} \leq C_2(M_2,C_1). \tag{16}$$

Пусть функция $v(t,x)$ удовлетворяющая в Q уравнению (16), непрерывна в Q вместе с производными v_t, v_x, v_{xx} и $|v(t,x)|_{2+\alpha}^{\overline{Q}} < \infty$.

Тогда

$$|v(t,x)|_{2+\alpha}^{\overline{Q}} \leq C_3(M_2,C_1,C_2)$$

где $A_{20} = \min\limits_{\overline{Q}} A_2$, Γ – параболическая граница.

Доказательство. В случае задачи (14) априорные оценки строятся следующим образом. Оценки внутри области устанавливаются так же, как и в случае задачи (13). Далее, заменив $\tau = t, \quad y = \frac{2x-s(t)}{s(t)}$, $(\tau = t, \quad y = \frac{2x-s(t)-l}{l-s(t)})$, выровняем границу. Тогда область D_{1T} (D_{2T}) отображается в область $Q = \{(\tau,y) : 0 < \tau < T, -1 < y < 1\}$ и для функции $w(\tau,y) = v(\tau,x,s(\tau))$, получаем уравнение с ограниченными коэффициентами и правой частью. По результатам [16, 17] мы устанавливаем оценки для $|w_y|, |w|_{1+\gamma}$ до правой границы.

Остальные оценки производных высших порядков устанавливаются с использованием результатов для линейных уравнений [7, 17]. □

3. Единственность решения

Сначала получим новое представление для свободной границы, эквивалентное уравнению задачи (1)-(6). Уравнение (1) перепишем в виде

$$(q_1(u))_t - (du_x + c_1 u)_x = u(a_1 - b_1 u). \tag{17}$$

где $q_1(u) = \int\limits_0^u d_1(\eta)d\eta$.

Интегрируя (17) по D_1, получим

$$\int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{s(\eta)} \left[\left(du_\xi + c_1 u\right)_\xi - (q_1(u))_\eta\right] d\xi + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{s(\eta)} u(a_1 - b_1 u)d\xi = 0.$$

Отсюда имеем

$$\begin{gathered} -d\int\limits_0^t u_\xi(\eta, s(\eta))d\eta = \int\limits_0^{s_0} q_1(u_0(\xi))d\xi - c_1\int\limits_0^t u(\eta,0)d\eta - \\ - \int\limits_0^{s(t)} q_1(u(t,\xi))d\xi + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_0^{s(\eta)} u(a_1 - b_1 u)d\xi d\eta. \end{gathered} \tag{18}$$

Уравнение (2) перепишем в виде

$$(q_2(v))_t - (dv_x + c_2 v)_x = v(a_2 - b_2 v). \tag{19}$$

где $q_2(v) = \int\limits_0^v d_2(\eta)d\eta$.

Интегрируя (19) по D_2, получим

$$\begin{gathered} d\int\limits_0^t v_\xi(\eta, s(\eta))d\eta = \int\limits_{s_0}^l q_1(v_0(\xi))d\xi - \int\limits_{s(t)}^l q_2(v(t,\xi))d\xi + c_2\int\limits_0^t v(\eta,l)d\eta + \\ + \int\limits_0^t d\eta \int\limits_{s(\eta)}^l v(a_2 - b_2 v)d\xi. \end{gathered} \tag{20}$$

Теперь умножив (18) и (20) на $\frac{\mu}{d}$, затем и складывая из условия Стефана (4) имеем

$$\frac{d}{\mu}s(t) = \frac{ds_0}{\mu} + \int\limits_{s_0}^l q_2(v_0(\xi))d\xi + \int\limits_0^{s_0} q_1(u_0(\xi))d\xi - c_1\int\limits_0^t u(\eta,0)d\eta + c_2\int\limits_0^t v(\eta,l)d\eta - \int\limits_{s(t)}^l q_2(v(t,\xi))d\xi -$$

$$-\int\limits_{0}^{s(t)} q_1(u(t,\xi))d\xi+\int\limits_{0}^{t} d\eta(\int\limits_{0}^{s(\eta)} u(a_1-b_1u)d\xi+\int\limits_{s(\eta)}^{l} v(a_2-b_2v)d\xi). \quad (21)$$

Для доказательства единственности решения используем идеи работы [19].

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда решение задачи (1)-(6) единственно.*

Доказательство. Предположим, что $s_1(t),\quad u_1(t,x)$ и $s_2(t),\quad u_2(t,x)$ являются решениями задачи (1)-(6) и пусть

$$y(t)=\min(s_1(t),s_2(t)),$$

$$h(t)=\max(s_1(t),s_2(t)).$$

Тогда каждая пара удовлетворяет тождеству (21).

Вычитая, получаем, что

$$\frac{d}{\mu}|s_1(t)-s_2(t)|\leq\int\limits_{0}^{y(t)} |q_1(u_1(\xi,t))-q_1(u_2(\xi,t))|d\xi+\int\limits_{y(t)}^{l} |q_2(v_1(\xi,t))-q_2(v_2(\xi,t))|d\xi+$$

$$+\int\limits_{0}^{t} d\eta\int\limits_{0}^{y(\eta)} |u_1(a_1-b_1u_1)-u_2(a_1-b_1u_2)|d\xi+\int\limits_{y(\eta)}^{h(\eta)} q_1(u_i(\xi,t))d\xi+c_1\int\limits_{0}^{t}(u_1(\eta,0)-u_2(\eta,0))d\eta+$$

$$+\int\limits_{0}^{t} d\eta\int\limits_{y(\eta)}^{l} |v_1(a_2-b_2v_1)-v_2(a_2-b_2v_2)|d\xi+\int\limits_{y(\eta)}^{h(\eta)} q_2(v_i(t,\xi))d\xi+$$

$$+\int\limits_{0}^{t} d\eta\int\limits_{y(\eta)}^{h(\eta)} (|u_i(a_2-b_2u_i)|+|v_i(a_2-b_2v_i)|)d\xi+c_2\int\limits_{0}^{t}(v_1(\eta,l)-v_2(\eta,l))d\eta, \quad (22)$$

где $u_i,\quad v_i\ (i=1,2)$ - решения между $y(t)$ и $h(t)$, t.e

$$(u_i(x,t),\quad v_i(x,t))=\begin{cases}(u_1(x,t),\quad v_1(x,t)), & \text{если}\quad s_2(t)<s_1(t),\\ (u_2(x,t),\quad v_2(x,t)), & \text{если}\quad s_2(t)>s_1(t).\end{cases}$$

В силу теоремы 2.1 имеем

$$|u_i(x,t)|\leq N_1(y(t)-x),$$

$$|v_i(x,t)|\leq N_2(x-y(t)),$$

$$|u_1(y(t),t)-u_2(y(t),t)|\leq M_4|s_1(t)-s_2(t)|,$$

$$|v_1(y(t),t)-v_2(y(t),t)|\leq M_5|s_1(t)-s_2(t)|,$$

где $M_4=\max\limits_{D_1}|u_x(t,x)|,\quad M_5=\max\limits_{D_2}|v_x(t,x)|.$

Рассмотрим функцию $V(t,x) = v_1(x,t) - v_2(t,x)$, $U(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$. Тогда для $U(t,x)$, $V(t,x)$ получим уравнение с ограниченными коэффициентами и задачу

$$\begin{cases} dU_{xx} + c_1 U_x + B_1(t,x)U - d_1(U)U_t = 0 \text{ в } D_1, \\ U(0,x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq s_0, \\ U_x(t,0) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T, \\ U(t,y(t)) \leq M_4 \max\limits_{0 \leq \eta \leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|, \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} dV_{xx} + c_2 V_x + B_2(t,x)V - d_2(V)V_t = 0 \text{ в } D_2, \\ V(0,x) = 0, \qquad s_0 \leq x \leq l, \\ V_x(t,l) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T, \\ V(t,y(t)) \leq M_5 \max\limits_{0 \leq \eta \leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|, \end{cases} \tag{24}$$

где коэффициенты уравнения непрерывные и ограниченные функции.

Из задачи (23) и (24) по принципу максимума находим оценки

$$|U(t,x)| \leq N_1 \max_{0 \leq \eta \leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|, \qquad |V(t,x)| \leq N_2 \max_{0 \leq \eta \leq t} |s_1(\eta) - s_2(\eta)|.$$

В силу установленных оценок для функций $u(t,x)$, $v(t,x)$ $s(t)$ можем оценить слагаемые из (22). При этом воспользуемся результатами работы [18, 19]. □

4. Существование решений

При определении максимального интервала времени существования решения задач Стефана учитываются три фактора:

1) невырожденность области;

2) наличие априорных оценок норм в соответствующем пространстве;

3) ограниченность снизу и сверху модуля градиента решения на свободной границе.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теорем 2.1 и 4.1. Тогда существует решение* $u(t,x) \in C^{2+\alpha}\left(\overline{D}_{1T}\right)$, $v(t,x) \in C^{2+\alpha}\left(\overline{D}_{2T}\right)$, $s(t) \in C^{1+\alpha}([0,T])$ *задачи (1)-(6).*

Доказательство.

Для доказательства разрешимости нелинейной задачи можно использовать различные теоремы из теории нелинейных уравнений, учитывая, что для нее имеет место теорема единственности классического решения. Мы применим принцип Лерэ-Шаудера [7], установленные априорные оценки $|\cdot|^{Q}_{1+\alpha}$ для всех возможных решений нелинейных задач и теоремы разрешимости в классах Гельдера для линейных задач. При этом теоремы существования для систем такие же, как теорема для случая одного уравнения, так как каждое из уравнений можно рассматривать как линейное уравнение относительно $u(t,x)$ и $v(t,x)$ с непрерывными по Гельдеру коэффициентами.

Задача (1)-(6) рассматривается одновременно с однопараметрическим семейством задач того же типа. Линейная задача определяет преобразование $w = F(\omega,k), 0 \leq k \leq 1$, к которому и применяется принцип Лерэ - Шаудера. Этот оператор нелинеен и зависит от k. Его неподвижные точки при $k = 1$ являются решениями задачи.

Обозначим через $H^{1+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, банахово пространство функций $u(t,x)$, $v(t,x)$ на $\overline{Q}$ с нормой $\|\cdot\| = |\cdot|^{Q}_{1+\alpha}$, которые удовлетворяют соответствующим начальным и краевым условиям задач (13) и (14).

Для каждой функции $\overline{u}$, $\overline{v} \in H^{1+\alpha}$ и любого числа $k \in [0,1]$ обозначим через u^k, v^k решения линейных задач (13) и (14), которые существуют и единственны, причем u^k, $v^k \in C^{2+\alpha}$, $s(t) \in C^{1+\alpha}$. При этом в области $D_i (i = 1,2)$, как и в теореме 1, осуществляется переход к параболическому уравнению с непрерывными по Гельдеру коэффициентами в фиксированной области. Равномерная непрерывность и вполне непрерывность оператора преобразования F относительно k, равномерные по k оценки для решений и разрешимость линейных задач следуют из установленных априорных оценови норм Гельдера. Техника доказательства подробно продемонстрирована, например, в работах [7] (гл.VI) и [7] (гл. VII).

Теорема 4.2 доказана.

□

5. Некоторые свойства решения

Лемма 5.1. *[18].*

$$\lim_{t\to+\infty} w(t,x) = \frac{a_i}{b_i}$$

равномерно $x \in (0,\infty)$.

Этот принцип сравнения поможет в получении критериев распространения или исчезновения (как $t \to +\infty$) решений нашей системы (1)-(6).

Лемма 5.2. *(Принцип сравнения). Пусть* $(u(t,x), v(t,x), s(t))$ *- решение задачи (1)-(6) с начальными данными* $(u_0(x), v_0(x))$.

a) Предположим, что $(\bar{u}(t,x), \underline{v}(t,x), h(t))$ *удовлетворяет*

$$\begin{cases} d_1(\bar{u})\bar{u}_t - d\bar{u}_{1xx} - c_1\bar{u}_x \geq \bar{u}\left(a_1 - b_1\bar{u}\right), \ (t,x) \in D_1^2, \\ \bar{u}_x(t,0) \leq 0, x = 0, \ 0 < t, \\ \bar{u}(t,h(t)) = 0, \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} d_2(\underline{v})\underline{v}_t - d\underline{v}_{xx} - c_2\underline{v}_x < \underline{v}\left(a_2 - b_2\underline{v}\right), \ (t,x) \in D_2^2, \\ v_x(t,l) \leq 0, x = 0, \ 0 < t, \\ \underline{v}(t,h(t)) = 0, \end{cases} \tag{26}$$

где $\dot{h}(t) = -\mu\bar{u}_x(t,h(t)) + \mu\underline{v}_x(t,h(t))$

Если

$$\begin{cases} \bar{u}(0,x) \geq u_0(x) \\ \underline{v}(0,x) \leq v_0(x) \end{cases}$$

в [0, l] и $h(0) > s(0)$, *то* $h(t) \geq s(t)$ *для всех* $t \geq 0$.

- $\bar{u}(t,x) \geq u(t,x)$ *для всех* $x \in [0,s(t)]$;
- $\underline{v}(t,x) \leq v(t,x)$ *для всех* $x \in [s(t),l]$.

b) Предположим, что $(\underline{u}(t,x), \bar{v}(t,x), g(t))$ *удовлетворяет*

$$\begin{cases} d_1(\underline{u})\underline{u}_t - d\underline{u}_{xx} - c_1\underline{u}_x < \underline{u}\,(a_1 - b_1\underline{u})\,,\ (t,x) \in D_1^2, \\ \underline{u}_x(t,0) < 0, x = 0,\ 0 < t, \\ \underline{u}(t,g(t)) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} d_2(\bar{v})\bar{v}_t - d\bar{v}_{xx} - c_2\bar{v}_x > \bar{v}\,(a_2 - b_2\bar{v})\,,\ (t,x) \in D_2^2, \\ \bar{v}_x(t,l) > 0, x = 0,\ 0 < t, \\ \bar{v}(t,g(t)) = 0, \end{cases} \tag{28}$$

где $\dot{g}(t) = -\mu\underline{u}_x(t,g(t)) + \mu\bar{v}_x(t,g(t))$

Если

$$\begin{cases} \underline{u}(0,x) < u_0(x) \\ \bar{v}(0,x) > v_0(x) \end{cases}$$

в [0, l] и $g(0) \le s(0)$, *то* $g(t) \le s(t)$ *для всех* $t \ge 0$.

- $\underline{u}(t,x) \le u(t,x)$ *для всех* $x \in [0, s(t)]$;
- $\bar{v}(t,x) \ge v(t,x)$ *для всех* $x \in [s(t), l]$.

Доказательство. Мы докажем только (a), поскольку доказательство (b) аналогично. Для простоты мы используем следующие обозначения:

$D_1^1 = \{(t,x) : 0 < t < t_0,\ 0 < x < h(t)\}$, $D_1^2 = \{(t,x) : 0 < t < t_0, 0 < x < s(t)\}$,

$D_2^1 = \{(t,x) : 0 < t < t_0,\ h(t) < x < l\}$, $D_2^2 = \{(t,x) : 0 < t < t_0,\ s(t) < x < l\}$.

В таком случае $h(t) > s(t)$ для малых t, и нам остается доказать $h(t) > s(t)$ для всех $t \geqslant 0$. Предположим, что это неверно, тогда существует $t_0 > 0$ такое, что $h(t_0) = s(t_0)$ и для такого t_0 имеем

$$\dot{h}(t_0) \le \dot{s}(t_0). \tag{29}$$

Поскольку $u(t,x) > 0$ в D_1^2 $u_1(t,s(t)) > 0 = u(t,s(t))$

Следовательно, в силу теоремы сравнения для параболических уравнений $\frac{a_1}{b_1} = M_1 \ge u_1(t,x) \ge u(t,x) > 0$ в $\bar{D}_1^2$ где M_1 - положительное число.

Рассмотрим случай $w_1 = \bar{u} - u$, $w_2 = v - \underline{v}$

$$\begin{cases} d_1(w_1)w_{1t} - dw_{1xx} + A_1(t,x,u,u_x,u_t) = 0,\ (t,x) \in D_1^2, \\ w_1(0,x) > 0,\ t = 0,\ 0 < x < h_0 \\ w_{1x}(t,0) > 0, x = 0,\ 0 < t, \\ w_1(t,s(t)) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_2(w_2)w_{2t} - dw_{2xx} + A_2(t,x,u,u_x,u_t) = 0,\ (t,x) \in D_2^2, \\ w_2(0,x) > 0,\ t = 0,\ 0 < x < s_0 \\ w_{2x}(t,l) < 0, x = 0,\ 0 < t, \\ w_2(t,h(t)) = v(t,h(t)) - \underline{v}(t,h(t)) > 0 \end{cases}$$

где

$A_1(t,x,u,u_x,u_t) = [d_1(\bar{u}) - d_1(u)]u_t - c_1\bar{u}w_{1x} - (c_1u_x + a_1 - b_1(\bar{u} + u))w_1$,

$A_2(t,x,v,v_x,v_t) = [d_2(v) - d_2(\underline{v})]\underline{v}_t - c_2w_{2x} - (a_2 - b_2(v_1 + v))\,w_2$

сильный принцип максимума дает $\begin{cases} \bar{u}(t,x) > u(t,x) & D_1^2, \\ \underline{v}(t,x) < v(t,x) & D_2^2. \end{cases}$.

Таким образом, можем применить результат Фридмана [15, гл I. теорема 2], чтобы показать

$$\bar{u}_x(t_0,h(t_0)) < u_x(t_0,s(t_0)). \tag{30}$$

Повторяя те же рассуждения для области D_2^2, имеем

$$\underline{v}_x(t_0,h(t_0)) > v_x(t_0,s(t_0)). \tag{31}$$

Из (30) и (31),
$\dot{h}(t_0) = -\mu\bar{u}_x(t_0,h(t_0)) + \mu\underline{v}_x(t_0,h(t_0)) > -\mu u_x(t_0,s(t_0)) + \mu v_x(t_0,s(t_0)) = \dot{s}(t_0)$,
что противоречит (29).
Лемма 6 доказана.
□
Введем обозначения $\lim\limits_{t\to\infty} s(t) = s_\infty \in (0,+\infty]$.

Лемма 5.3. *Пусть* (u,v,s) *- решение (1)-(6). Если* $s_\infty < +\infty$, *то*

$$\dot{s}(t) \to 0 \textit{ as } t \to +\infty.$$

Лемма 5.4(Распространение). *Предположим, что* (u,v,s) *- решение (1)-(6). Если* $s_\infty = l$, *то имеем*

$$\lim_{t\to+\infty} \sup u(t,x) \leqslant \bar{u}(x); \quad \lim_{t\to+\infty} \inf u(t,x) \geqslant \underline{u}(x)$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} \sup v(t,x) \leqslant \bar{v}(x); \quad \lim_{t\to+\infty} \inf v(t,x) \geqslant \underline{v}(x)$$

Лемма 5.5(Исчезновение). *Предположим, что* $(u,v,s(t))$ *является решением (1-6). Если* $s_\infty < l$, *то имеем*

$$\lim_{t\to+\infty} \inf u(t,\cdot) \geqslant \bar{u}(x) \textit{ for all } x \in [0,l] \textit{ and } \lim_{t\to+\infty} \|u(t,\cdot),v(t,\cdot)\|_{C[0,s(t)]} = 0.$$

Доказательства в основном используют верхний $(\bar{u},\bar{v})$ и нижний $(\underline{u},\underline{v})$ метод решения [14].

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

1. Cantrell R. S., Cosner C. Spatial Ecology via Reaction-diffusion Equations. John Wiley and Sons Ltd.: Chichester, UK, 2003. 729 pp.

2. Du Y., Z.Lin Spreading-vanishing dichotomy in a diffusive logistic model with a free boundary // SIAM J. Math. Anal., 2010. no. 42, pp. 377–405.

3. Wang R.-H., Wang L., Wang Z.-Ch. Free boundary problem of a reaction-diffusion equation with nonlinear convection term // J. Math. Anal. Appl., 2018. vol. 103, no. 467, pp. 1233–1257.

4. Du Y., Ma. L. Logistic type equations on by a squeezing method involving boundary blow-up solutions // J. London Math. Soc., 2001. vol. 64, no. 2, pp. 107–124.

5. Friedman A. The Stefan problem in several space variables // Trans. Amer. Math. Soc., 1968. vol. 133, no. 9, pp. 51–87.

6. Friedman A. Free boundary problems in biology // Discrete Contin. Dyn. Syst., 2015. vol. 32, no. 9, pp. 3081–3097.
7. Kamenomostskaja S. L. On Stefan's problem // Mat. Sb., 1961. vol. 53, no. 2, pp. 489–514.
8. Мейрманов А. М. *Задача Стефана*. Новосибирск: Наука, 1986. 240 с. [Meyrmanov A. M. Zadacha Stefana. Novosibirsk: Nauka, 1986. 240 pp. (In Russian)]
9. Ladyzenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraceva N. N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Transl. Math. Momogr.: Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1968. 760 pp.
10. Lei C. X., Kim K., Lin Z. G. The spreading frontiers of avian-human influenza described by the free boundary // Sci. China Math., 2014. vol. 57, no. 2, pp. 971-990.
11. Рубинштейн Л. И. *Проблема Стефана*. Рига: Звайгзне, 1967. 456 с. [Rubinshteyn L. I. Problema Stefana. Riga: Zvaygzne, 1967. 456 pp. (In Russian)]
12. Mimura M., Yamada Y., Yotsutani S. A free boundary problem in ecology // Japan J.Appl. Math., 1985. no. 2, pp. 151-186.
13. Mimura M., Yamada Y., Yotsutani S. Free boundary problems for some reaction-diffusion equations // Hiroshima Math. J., 1987. no. 17, pp. 241-280..
14. Okubo A. Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
15. Pao C. V. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*. Plenum Press: New York, 1992. 778 c.
16. Фридман А. *Уравнения в частными производными параболического типа*. М.: Мир, 1968. 428 с. [Fridman A. Uravneniya v chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa. M.: Mir, 1968. 428 pp. (In Russian)]
17. Кружков С. Н. Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // *Тр. ММО*, 1967. Т. 16, № 2, С. 329–346. [Kruzhkov S. N. Nelineynyye parabolicheskiye uravneniya s dvumya nezavisimymi peremennymi // Tr. MMO, 1967. vol. 16, no. 2, pp. 329–346].
18. Тахиров Ж. О. *Неклассические нелинейные задачи и задачи со свободной границей*. Ташкент, 2014. 240 с. [Takhirov ZH. O. Neklassicheskiye nelineynyye zadachi i zadachi so svobodnoy granitsey. Tashkent, 2014. 240 pp. (In Russian)]
19. Takhirov J. O. A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in biology // Indian J. Pure Appl. Math., 2019. vol. 50, no. 1, pp. 95–112.
20. Takhirov J. O., Rasulov M. S. Problem with Free Boundary for Systems of Equations of Reaction-Diffusion Type // Ukrainian Math. J., 2018. vol. 69, no. 13, pp. 1968–1980.

MSC 53C12, 57R25, 57R35 Research Article

Two-phase problem with a free boundary for systems of parabolic equations with a nonlinear term of convection

A. N. Elmurodov

Uzbekistan Academy of Sciences V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, 100170, Tashkent, Mirzo Ulugbek str, 81, Uzbekistan
E-mail: elmurodov@mathinst.uz

This article is concerned with a free boundary problem for semilinear parabolic equations, wbich describes the habitat segregation phenomenon in population ecology. The main goal is to show global existence, the uniqueness of solutions to the problem. A two-phase mathematical model with free boundaries for parabolic equations of the reaction-diffusion type is proposed. A priori estimates of Schauder type are established, on the basis of which the unique solvability of the problem is proved. The instability of each solution is fully determined using the comparison theorem.

Key words: mathematical model, a priori estimate, comparison theorems, uniquely solvability.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-110-122

Original article submitted: 17.06.2021 Revision submitted: 05.10.2021

For citation. Elmurodov A. N. Two-phase problem with a free boundary for systems of parabolic equations with a nonlinear term of convection. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **36**: 3, 110-122. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-110-122

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.