МАТЕМАТИКА

УДК 517.95 Научная статья

Внутреннекраевые задачи со смещением для смешанно-волнового уравнения

***Ж. А. Балкизов*[1], *В. А. Водахова*[2]**

[1] Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360005, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А, Россия

[2] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, Россия

E-mail: Giraslan@yandex.ru, V.a.vod@yandex.ru

В работе исследованы краевые задачи с внутреннекраевым смещением для модельного смешанно-волнового уравнения, которые являются обобщениями задачи Гурса и задач с данными на противоположных характеристиках. Показано, что при определенных условиях на заданные функции решение исследуемых задач существует, единственно и выписывается в явном виде.

Ключевые слова: волновое уравнение, смешанно-волновое уравнение, вырождающееся гиперболическое уравнение, задача со смещением, внутреннекраевая задача

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-8-14

Поступила в редакцию: 21.06.2021 В окончательном варианте: 28.07.2021

Для цитирования. Балкизов Ж. А., Водахова В. А. Внутреннекраевые задачи со смещением для смешанно-волнового уравнения // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2021. Т. 36. № 3. С. 8-14. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-8-14

Введение. Обозначения. Постановка задачи.

На евклидовой плоскости точек (x, y) рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-u_{yy}+f_1(x,y), & y<0, \\ u_{xx}-u_{yy}+f_2(x,y), & y>0, \end{cases} \tag{1}$$

где $f_1(x,y), f_2(x,y)$ — заданные функции, $u=u(x,y)$ — искомая функция.

Уравнение (1) является смешанно-гиперболическим уравнением второго порядка. Рассматривается оно в области Ω, ограниченной характеристиками $\sigma_1=AC: x+y=0$,

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

$\sigma_2 = CB : x - y = r, \quad \sigma_3 = AD : x - y = 0, \quad \sigma_4 = BD : x + y = r$ этого уравнения, где $A = (0,0), \quad B = (r,0), \quad C = \left(\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right), \quad D = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$. Обозначим:

$$\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\},\ \Omega_2 = \Omega \cap \{y > 0\},\ \bar{I} = \overline{AB},\ \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$$

$$\theta_{00}(x) = \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right),\ \theta_{01}(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right),\ \theta_{r1}(x) = \left(\frac{r+x}{2}, \frac{r-x}{2}\right) -$$

аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)$ с характеристиками AC, AD и BD этого уравнения, соответственно;

Регулярным в области Ω *решением* уравнения (1) назовем функцию $u = u(x,y)$ из класса $u(x,y) \in C\left(\bar{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

Задача 1. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u[\theta_{01}(x)] = \psi_1(x), \quad 0 \le x \le r, \tag{2}$$

$$\alpha(x)\frac{d}{dx}u[\theta_{00}(x)] + \beta(x)u_x(x,0) + \gamma(x)u(x,0) + \delta(x)u_y(x,0) = \psi_2(x), \quad 0 < x < r, \tag{3}$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$– *заданные на отрезке* $[0,r]$ *функции, причем* $\alpha^2(x) + \beta^2(x) + \gamma^2(x) + \delta^2(x) \neq 0 \ \ \forall\, x \in [0,r]$.

Задача 2. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения (1), удовлетворяющее внутренннекраевому условию вида (3), а также граничному условию*

$$u[\theta_{r1}(x)] = \psi_3(x), \quad 0 \le x \le r, \tag{4}$$

где $\psi_3(x)$ *– заданная на отрезке* $[0,r]$ *функция.*

Ранее задача Гурса для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения исследованы в работах [1]–[2]. В работе [3] исследована первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения. Краевые задачи для вырождающихся гиперболических уравнений в характеристическом четырехугольнике с данными на противоположных характеристиках исследованы в работах [4], [5], [6]. Задачи со смещением для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений были исследованы в работах [7], [8], [9], [10]. Исследуемые в рамках данной работы внутренне-краевые Задачи 1 и 2 относятся к классу краевых задач со смещением Жегалова-Нахушева [11], [12] и являются обобщениями задачи Гурса и задач с данными на противоположных характеристиках для модельного уравнения вида (1). Показано, что при определенных условиях на заданные функции $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и $\psi_3(x)$ решение *Задач 1 и 2* существует, единственно и выписывается в явном виде.

Теорема разрешимости Задачи 1

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть заданные функции* $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ *таковы, что они обладают свойствами:*

$$\alpha(x),\ \beta(x),\ \gamma(x),\ \delta(x), \psi_2(x) \in C[0,r] \cap C^2]0,r[, \tag{5}$$

$$\psi_1(x) \in C^1[0,r] \cap C^3]0,r[\tag{6}$$

$$f_1(x,y) \in C\left(\overline{\Omega_1}\right),\ f_2(x,y) \in C\left(\overline{\Omega_2}\right) \tag{7}$$

и выполнено одно из условий: либо

$$\gamma(x)[\alpha(x)+\beta(x)-\delta(x)] \neq 0 \quad \forall\, x \in [0,r], \tag{8}$$

либо

$$\gamma(x) \equiv 0,\ \alpha(x)+\beta(x)-\delta(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [0,r], \tag{9}$$

либо же

$$\gamma(x) \neq 0,\ \alpha(x)+\beta(x)-\delta(x) \equiv 0 \quad \forall\, x \in [0,r]. \tag{10}$$

Тогда существует единственное регулярное в области Ω решение Задачи 1.
Доказательство. Для доказательства Теоремы 1 введем обозначения

$$u(x,0) = \tau(x),\ (0 \le x \le r),\quad u_y(x,0) = \nu(x)\ (0 < x < r). \tag{11}$$

Найдем фундаментальные соотношения между искомыми функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенные из соответствующих частей Ω_1 и Ω_2 области Ω на линию $I = AB$ прямой $y = 0$.

Воспользуемся представлением решения задачи (11) для неоднородного волнового уравнения (формула Даламбера) [13, с. 59]:

$$u(x,y) = \frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} \nu(t)\,dt + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{y}\int\limits_{x-y+t}^{x+y-t} f(s,t)\,ds dt. \tag{12}$$

Из (12) находим

$$u[\theta_{00}(x)] = u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right) = \frac{\tau(0)+\tau(x)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x}^{0} \nu(t)dt + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{0}\int\limits_{-t}^{x+t} f_1(s,t)ds dt,$$

откуда

$$\frac{d}{dx}u[\theta_{00}(x)] = \frac{\tau'(x)}{2} - \frac{\nu(x)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{0} f_1(x+t,t)dt.$$

С учетом этого и обозначений (11) условие (3) перепишется в следующей форме:

$$\frac{\alpha(x)\tau'(x)}{2} - \frac{\alpha(x)\nu(x)}{2} + \frac{\alpha(x)}{2}\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{0} f_1(x+t,t)dt + \beta(x)\tau'(x) + \gamma(x)\tau(x) + \delta(x)\nu(x) = \psi_2(x)$$

или

$$[\alpha(x)+2\beta(x)]\tau'(x) + 2\gamma(x)\tau(x) + [2\delta(x)-\alpha(x)]\nu(x) = 2\psi_2(x) - \alpha(x)\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{0} f_1(x+t,t)dt. \tag{13}$$

Найдем теперь аналогичное фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_2 на линию $y=0$. Для этого снова воспользуемся формулой (12). Удовлетворяя (12) условию (2), будем иметь

$$u[\theta_{01}(x)] = u\left(\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right) = \frac{\tau(x)+\tau(0)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^x \nu(t)dt + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{x}{2}}\int\limits_t^{x-t} f_2(s,t)dsdt = \psi_1(x).$$

Путем дифференцирования из последнего равенства приходим к соотношению

$$\nu(x) = -\tau'(x) + 2\psi_1'(x) - \int\limits_0^{\frac{x}{2}} f_2(x-t,t)\,dt. \tag{14}$$

Соотношение (14) есть второе фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_2 на линию $I=AB$.

Исключая из найденных выше соотношений (13) и (14) искомую функцию $\nu(x)$, с учетом условия согласования $\tau(0)=\psi_1(0)$, относительно $\tau(x)$ приходим к задаче нахождения решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$[\alpha(x)+\beta(x)-\delta(x)]\tau'(x)+\gamma(x)\tau(x) = \psi_2(x)-[2\delta(x)-\alpha(x)]\psi_1'(x)-$$

$$-\frac{\alpha(x)}{2}\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{0} f_1(x+t,t)dt + \frac{2\delta(x)-\alpha(x)}{2}\int\limits_0^{\frac{x}{2}} f_2(x-t,t)\,dt, \quad 0<x<r, \tag{15}$$

$$\tau(0)=\psi_1(0). \tag{16}$$

Если выполнено условие (8), то единственное решение задачи (15) - (16) выписывается по формуле

$$\tau(x) = \int\limits_0^x \frac{F_1(t)}{a(t)}\exp\left(\int\limits_t^x \frac{\gamma(s)}{a(s)}ds\right)dt + \psi_1(0)\exp\left(-\int\limits_0^x \frac{\gamma(t)}{a(t)}dt\right),$$

где

$$F_1(x) = \psi_2(x)-[2\delta(x)-\alpha(x)]\psi_1'(x) - \frac{\alpha(x)}{2}\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{0} f_1(x+t,t)dt + \frac{2\delta(x)-\alpha(x)}{2}\int\limits_0^{\frac{x}{2}} f_2(x-t,t)\,dt,$$

$$a(x) = \alpha(x)+\beta(x)-\delta(x).$$

Далее, при выполнении условия (9), решение задачи (15)-(16) примет вид:

$$\tau(x) = \int\limits_0^x \frac{F_1(t)}{a(t)}dt + \psi_1(0).$$

Если же имеет место условие (10) Теоремы 1 и выполнено дополнительное условие согласования $F_1(0)=\gamma(0)\psi_1(0)$, то из (15) сразу находим, что

$$\tau(x) = \frac{F_1(x)}{\gamma(x)}.$$

После того как функция $\tau(x)$ найдена, функцию $\nu(x)$ можно найти из соотношений (13) или (14). Тогда решение исследуемой *Задачи 1* в областях Ω_1 и Ω_2 выписывается по формуле (12). Условия (5), (6), (7) обеспечивают регулярность полученного решения.

Теорема разрешимости Задачи 2

Перейдем к исследованию разрешимости Задачи 2. Здесь справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть заданные функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\delta(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ обладают перечисленными в Теореме 1 свойствами (5), (6), (7) и выполнено одно из условий: либо*

$$\gamma(x)[\beta(x)+\delta(x)] \neq 0 \quad \forall\, x \in [0,r], \tag{17}$$

либо

$$\gamma(x) \equiv 0,\ \beta(x)+\delta(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [0,r], \tag{18}$$

либо же

$$\gamma(x) \neq 0,\ \beta(x)+\delta(x) \equiv 0 \quad \forall\, x \in [0,r]. \tag{19}$$

Тогда существует единственное регулярное в области Ω решение Задачи 2.

Доказательство Теоремы 2 проводится аналогично доказательству Теоремы 1, причем здесь

$$\tau(x) = \psi_1(r)\exp\left(\int\limits_x^r \frac{\gamma(t)}{\beta(t)+\delta(t)}dt\right) - \int\limits_x^r \frac{F_2(t)}{\beta(t)+\delta(t)}\exp\left(\int\limits_x^t \frac{\gamma(s)}{\beta(s)+\delta(s)}ds\right)dt$$

при выполнении условия (17), где

$$F_2(x) = \psi_3(x) + [2\delta(x)-\alpha(x)]\psi_1'(x) - \frac{\alpha(x)}{2}\int\limits_{-\frac{x}{2}}^{0} f_2(x+t,t)dt + \frac{2\delta(x)-\alpha(x)}{2}\int\limits_0^{\frac{r-x}{2}} f_1\,(x+t,t)\,dt;$$

$$\tau(x) = \psi_1(r) - \int\limits_x^r \frac{F_2(t)}{\beta(t)+\delta(t)}dt$$

при условии (18) и, $\tau(x) = \frac{F_2(x)}{\gamma(x)}$ при условии (19), причем здесь должно быть выполнено дополнительное условие согласования $F_2(r) = \gamma(r)\psi_1(r)$.

Как и при исследовании предыдущей *Задачи 1*, после нахождения функции $\tau(x)$, функцию $\nu(x)$ можно найти из соотношений (13) или (14). Стало быть, решение исследуемой *Задачи 2* в областях Ω_1 и Ω_2 легко выписываются по формуле (12).

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Список литературы/References

1. Кальменов Т. Ш. Критерий непрерывности решения задачи Гурса для одного вырождающегося гиперболического уравнения // *Дифференц. уравнения*, 1972. Т. 8, № 1, С. 41–55. [Kal'menov T. Sh. Kriteriy nepreryvnosti resheniya zadachi Gursa dlya odnogo vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya // Differents. uravneniya, 1972. vol. 8, no. 1, pp. 41–55 (In Russian)].
2. Балкизов Ж. А. Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // *Изв. Высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия Естеств. науки*, 2016. № 1(189), С. 5–10. [Balkizov Zh. A. Krayevaya zadacha dlya vyrozhdayushchegosya vnutri oblasti giperbolicheskogo uravneniya // Izvest. Vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya Yestestv. nauki, 2016. no. 1(189), pp. 5–10 (In Russian)].
3. Балкизов Ж. А. Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // *Владикавказский математический журнал*, 2016. Т. 18, № 2, С. 19–30. [Balkizov Zh. A. Pervaya krayevaya zadacha dlya vyrozhdayushchegosya vnutri oblasti giperbolicheskogo uravneniya // Vladikavk. matemat. zhurnal, 2016. vol. 18, no. 2, pp. 19–30 (In Russian)].
4. Кумыкова С. К., Нахушева Ф. Б. Об одной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // *Дифф. уравнения*, 1978. Т. 14, № 1, С. 50–65. [Kumykova S. K., Nakhusheva F. B. Ob odnoy krayevoy zadache dlya giperbolicheskogo uravneniya, vyrozhdayushchegosya vnutri oblasti // Diff. uravneniya, 1978. vol. 14, no. 1, pp. 50–65 (In Russian)].
5. Балкизов Ж. А. Краевые задачи с данными на противоположных характеристиках для смешанно-гиперболического уравнения второго порядка // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2020. Т. 20, № 3, С. 6–13. [Balkizov Zh. A. Krayevyye zadachi s dannymi na protivopolozhnykh kharakteristikakh dlya smeshanno-giperbolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka // Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk, 2020. vol. 20, no. 3, pp. 6–13 (In Russian)].
6. Балкизов Ж. А. Краевые задачи для смешанно-гиперболического уравнения // *Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки*, 2021. Т. 36, № 1, С. 7–14. [Balkizov Zh. A. Krayevyye zadachi dlya smeshanno-giperbolicheskogo uravneniya // Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Yestestvennyye nauki, 2021. vol. 36, no. 1, pp. 7–14 (In Russian)].
7. Салахитдинов М. С., Мирсабуров М. О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // *Диф. ур.*, 1981. Т. 17, № 1, С. 129–136. [Salakhitdinov M. S., Mirsaburov M. O nekotorykh krayevykh zadachakh dlya giperbolicheskogo uravneniya, vyrozhdayushchegosya vnutri oblasti // Dif. ur., 1981. vol. 17, no. 1, pp. 129–136 (In Russian)].
8. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. О некоторых краевых задачах для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области // *Диф. ур.*, 1982. Т. 18, № 1, С. 116–127. [Salakhitdinov M.S., Mirsaburov M. O nekotorykh krayevykh zadachakh dlya giperbolicheskogo uravneniya, vyrozhdayushchegosya vnutri oblasti // Dif. ur., 1982. vol. 18, no. 1, pp. 116–127 (In Russian)].
9. Ефимова С. В., Репин О. А. Задача с нелокальными условиями на характеристиках для уравнения влагопереноса // *Дифференц. уравнения*, 2004. Т. 40, № 10, С. 1419–1422. [Yefimova S. V., Repin O. A. Zadacha s nelokal'nymi usloviyami na kharakteristikakh dlya uravneniya vlagoperenosa // Differents. uravneniya, 2004. vol. 40, no. 10, pp. 1419–1422 (In Russian)].
10. Репин О. А. О задаче с операторами М. Сайго на характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки*, 2006. № 43, С. 10–14. [Repin O. A. O zadache s operatorami M. Saygo na kharakteristikakh dlya vyrozhdayushchegosya vnutri oblasti giperbolicheskogo uravneniya // Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskiye nauki, 2006. no. 43, pp. 10–14 (In Russian)].
11. Жегалов В. И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничным условием на обеих характеристиках с разрывами на переходной линии // *Ученые записки Казанского государственного университета им. В.И. Ленина*, 1962. Т. 122, № 3, С. 3–16. [Zhegalov V. I. Krayevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa s granichnym usloviyem na obeikh kharakteristikakh s razryvami na perekhodnoy linii // Uchenyye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta im. V.I. Lenina, 1962. vol. 122, no. 3, pp. 3–16 (In Russian)].
12. Нахушев А.М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. М.: Издательство Наука, 2006. 287 с. [Nakhushev A.M. Zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh. M.: Izdatel'stvo Nauka, 2006. 287 pp. (In Russian)]
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*. М.: Издательство Наука, 1977. 736 с. [Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Izdatel'stvo Nauka, 1977. 736 pp. (In Russian)]

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2021. vol. 36. no. 3. P. 8–14. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

MSC 35M12 Research Article

Internal boundary value problems with displacement for the mixed-wave equation

Zh. A. Balkizov[1], V. A. Vodakhova[2]

[1] Institute of Applied Mathematics and Automation, 360005, Nalchik, Shortanova st., 89A, Russia

[2] Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekova, 360004, Nalchik, st. Chernyshevsky, 173, Russia

E-mail: Giraslan@yandex.ru, V.a.vod@yandex.ru

The paper investigates boundary value problems with an internal boundary displacement for a model mixed-wave equation, which are generalizations of the Goursat problem and problems with data on opposite characteristics. It is shown that, under certain conditions for given functions, the solution to the problems under study exists, is unique, and is written out in an explicit form.

Key words: wave equation, mixed wave equation, degenerate hyperbolic equation, problem with displacement, internal boundary value problem.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-8-14

Original article submitted: 21.06.2021 Revision submitted: 28.07.2021

For citation. Balkizov Zh. A., Vodakhova V. A. Internal boundary value problems with displacement for the mixed-wave equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **36**: 3, 8-14. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-8-14

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.