

Эредитарная маломодовая модель динамо

Е. А. Казаков^{1,2}

¹ Камчатский государственный технический университет, 683003,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Ключевская, 35

² Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: MifistJohn@gmail.com

В данной статье рассматривается модель динамо в виде двумерной динамической системы в интегро-дифференциальной форме. В модели реализован стабилизирующий генерацию поля механизм обратной связи в виде подавления α -эффекта функционалом сверточного типа от актуальных и предыдущих значений спиральности и энергии. Наличие этого механизма подавления вводит в модель эредитарность (память). Для модели была построена численная схема в виде совмещение разностных схем для дифференциальной и интегральной части, двухступенчатый неявный методы Рунге-Кутты и метод трапеций соответственно. Так же были рассмотрены и графически представлены динамические режимы нашей модели.

Ключевые слова: эредитарность, система Лоренца, $\alpha\omega$ -динамо, функции подавления α -эффекта.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47

Поступила в редакцию: 26.05.2021

В окончательном варианте: 14.06.2021

Для цитирования. Казаков Е. А. Эредитарная маломодовая модель динамо // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 35. № 2. С. 40-47. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Казаков Е. А., 2021

Введение

Существование крупномасштабных магнитных полей небесных тел успешно объясняется в рамках теории динамо. Для моделирования космических динамо-систем на характерных временах их существования ($\sim 10^9$ лет) используются малоразмерные динамические системы. Эти модели описывают на феноменологическом уровне основные свойства реальных динамо-систем, такие как квадратичная нелинейность, взаимная генерация тороидальных и полоидальных полей с помощью α - и ω -эффектов, омическая диссипация поля, подавление α -эффекта спиральностью поля [1, 2].

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

В простейшем виде для $\alpha\omega$ -динамо подобная модель сводится к классической системе Лоренца. При этом интенсивность α -эффекта определяется текущим значением спиральности поля. Однако, есть данные о том, что этот механизм обладает пространственно-временной нелокальностью. Также нет и единого мнения о необходимости ненулевой спиральности поля для работы механизма динамо.

Описание модели

Математически, модель записывается в виде следующей системы:

$$\begin{aligned}\frac{dB^T}{dt} &= (\omega + \xi(\alpha_0 - \alpha))B^P - \sigma B^T, \\ \frac{dB^P}{dt} &= (\alpha_0 - \alpha)B^T - B^P, \\ \alpha(t) &= \int_0^t J(t - \tau)Q(B^T(\tau), B^P(\tau))d\tau,\end{aligned}\quad (1)$$

где $B^T(t)$ и $B^P(t)$ – величина тороидальной и полоидальной компонент поля, $\alpha(t)$ – динамическая часть α -генератора, $J(\cdot)$ – ядро оператора подавления, $Q(\cdot, \cdot)$ – квадратичная форма достаточно произвольного вида. Варьирование вида ядра и квадратичной формы, позволяет моделировать различные виды эредитарности и подавления α -эффекта не только спиральность, но и, например, энергией.

Как видно из системы (1) за единицу времени принято характерное время диссипации полоидальной компоненты поля.

Введем параметры $s = (\omega + \xi\alpha_0)/\sigma$ и $D = s\alpha_0$ и заменим переменные:

$$x(t) = B^T(t), \quad y(t) = sB^P(t), \quad z(t) = s\alpha(t).$$

С учетом замены параметров, перепишем систему (1)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \left(\sigma - \frac{\xi}{s^2}z\right)y - \sigma x, \\ \frac{dy}{dt} &= (D - z)x - y, \\ z(t) &= \int_0^t J(t - \tau)Q(x(\tau)y(\tau))d\tau,\end{aligned}\quad (2)$$

Формально интеграл является признаком памяти (эредитарности) в этой модели. В то же время его можно исключить для некоторых типов ядер с экспоненциальной асимптотикой $\sim e^{-bt}$, $b > 0$, то есть истинной памяти в этих случаях нет. Причина в том, что ядра с экспоненциальной асимптотикой интегрируемы на всей числовой оси, и мы можем говорить о конечной длительности памяти $T \sim \int_0^{+\infty} J(t)dt \sim 1/b$. Тогда эффекты памяти не будут проявляться на временных масштабах больше T .

Рассмотрим

$$z(t) = \int_0^t e^{-b(t-\tau)}Q(x,y)d\tau \quad (3)$$

Дифференцируя равенство (3) по времени, получим

$$\frac{dz}{dt} = -b \int_0^t e^{-b(t-\tau)} Q(x, y) d\tau + Q(x, y) = -bz + Q(x, y) \quad (4)$$

что позволяет заменить (3) равносильными соотношениями

$$\frac{dz}{dt} = Q(x, y) - bz \quad (5)$$

при условии $z(0) = 0$. Получается, что модель (2) сводится к динамической системе

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \left(\sigma - \frac{\xi}{s^2} z \right) y - \sigma x, \\ \frac{dy}{dt} &= (D - z)x - y, \\ \frac{dz}{dt} &= Q(x, y) - bz \end{aligned} \quad (6)$$

Если ядро не интегрируется на оси времени, память в модели имеет неограниченную продолжительность, поэтому мы можем говорить об истинной памяти системы. Например это будет для ядра вида $J(t) = (1+t)^{-\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$. В этом случае интегральный член в системе (2) не может быть устранен. Также интересны ядра вида $J(t) = t^n e^{-bt}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. В этом случае мы можем говорить о задержки подавления поля, так как функционал подавления мало зависит от значения компонент поля в момент близкие к настоящему времени.

Разностная схема

Вводим временную сетку T с шагом Δt , ведем расчет для t_k равно отстоящих. Через x_k и z_k обозначаем значения функции в эти самые моменты времени:

$$t_k = k\Delta t$$

$$\mathbf{x}^k = \mathbf{x}(t_k)$$

$$\mathbf{z}^k = \mathbf{z}(t_k)$$

Для численного исследования модели необходимо совмещение разностных схем для дифференциальной части и квадратурной формы для интегральной части. В качестве разностной схемы для дифференциальной части возьмем неявный метод Рунге-Кутты второго порядка [3, 4].

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^k + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{m}_1 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{m}_2, \\ \mathbf{m}_1 &= f(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k, \mathbf{a}), \\ \mathbf{m}_2 &= f\left(\mathbf{x}^k + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{m}_1 + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{m}_2, \mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{a}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

В расчетных целях его удобнее записать в следующем виде:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \frac{\Delta t}{2} \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k, \mathbf{a}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{a}) \right). \quad (8)$$

А в качестве квадратурной формы для интегрального члена — формулу трапеции.

$$\mathbf{z}^{k+1} = \frac{h}{2} \hat{J}(k+1) \mathbf{Q}(\mathbf{x}^0) + h \sum_{i=1}^k \hat{J}(\Delta t(k-i)) \mathbf{Q}(\mathbf{x}_i) + \frac{h}{2} \hat{J}(0) \mathbf{Q}(\mathbf{x}^{k+1}). \quad (9)$$

Расчет состояния системы в $k+1$ момент времени сводится к тому, что из данной системы уравнений мы должны найти чему равняется x_{k+1} и z_{k+1} . В тоже самое время хорошо видно, что переменные x_{k+1} и z_{k+1} фигурируют в правых частях равенства. Таким образом мы имеет дело не с явными формулами рекуррентного типа, которые позволяют легко и просто просчитывать значения, а с неявными уравнениями решение данной системы уравнений, размерность которой определяется размерностью фазового пространства данной системы и позволит рассчитать состояние системы в следующий шаг. Конечно расчет по явным схемам имеет большие преимущества с точки зрения быстродействия, однако хорошо известно, что неявные схемы имеют меньшие ограничения по выбору шага, с точки зрения устойчивости. Поскольку в изучаемых моделях можно ожидать появление хаотических режимов, очень чувствительных к расчетным ошибкам предпочтение было отдано неявным схемам. Поэтому полученную систему нелинейных уравнений относительно x_{k+1}, y_{k+1} будем решать с помощью метода Ньютона.

Данная схема была программно реализована. Для верификации схемы и программного кода мы использовали следующие соображения: в случае $\xi = 0$, $Q(x, y) = xy$ система (6) принимает вид системы Лоренца динамо режимы которой прекрасно известны [5]. Эти режимы были воспроизведены нашей программой при соответствующих классических параметрах $\sigma = 10$, $b = 8/3$ [6].

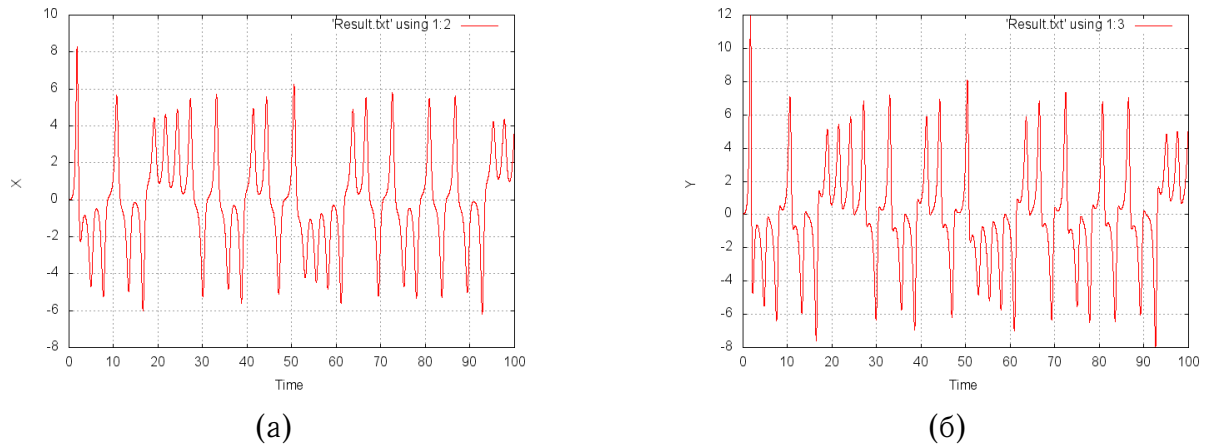
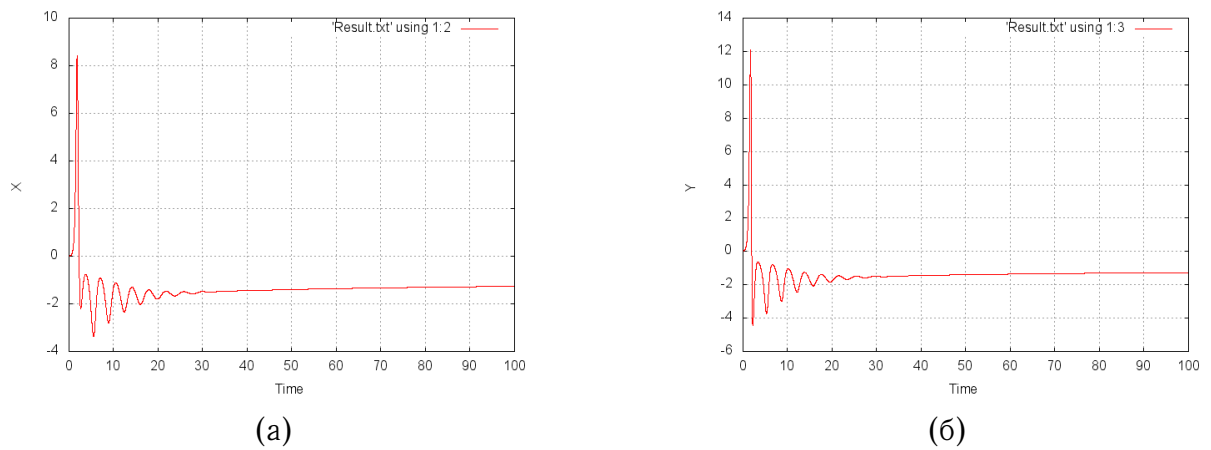
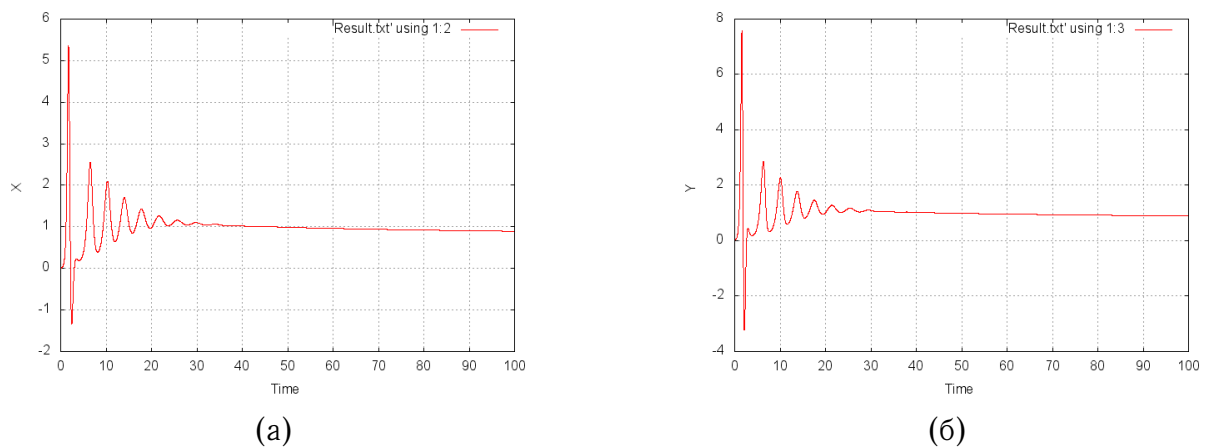
В нашей модели динамо параметр b достаточно варьировуемым, поскольку он определяет длительность памяти, а параметр σ определяет отношение характерных времен диссипации тороидальной и полоидальной компонент поля. Поскольку при одинаковых пространственных масштабах полоидальное поле затухает медленнее чем тороидальное, в этом случае $\sigma > 1$. В частности для классического динамо Паркера $\sigma = 3.37$ именно такое значение мы использовали при численном моделировании [7].

Результаты моделирования

Для примера рассмотрим систему вида (6) то есть ядро оператора подавления $J(t - \tau) = e^{-bt}$, а функция подавления $Q(x, y) = xy$ т.е. спиральность поля при параметрах $b = 0.5$, $D = 12$ (рис. 1).

Рассмотрим систему вида (2) где $J(t - \tau) = (1 + t)^{-b}$, $b = 0.8$ и функция подавления спиральностью поля $Q(x, y) = xy$ при параметрах $b = 0.8$, $D = 12$. Построим графики фазовых траекторий переменных x и y (рис. 2).

Теперь в качестве функции подавления возьмем энергию поля т.е. $Q(x, y) = sx^2 + \frac{y^2}{s}$ при параметрах $b = 0.8$, $D = 12$, $J(t - \tau) = (1 + t)^{-b}$ (рис. 3).

Рис. 1. Решение системы (6): (а) — $x(t)$, (б) — $y(t)$ Рис. 2. Решение системы (6): (а) — $x(t)$, (б) — $y(t)$ Рис. 3. Решение системы (6): (а) — $x(t)$, (б) — $y(t)$

Как можно заметить при любом варианте моделирования система с бесконечным ядром выходит на стационарный режим. То есть, для перебросов в системах подобного типа, память должна быть длинной, но обязательно конечной.

Теперь для примера рассмотрим систему с ядром подавления с задержкой $J(t - \tau) = t^n e^{-bt}$, $n = 1, b = 0.5, D = 12$ и $Q(x, y) = sx^2 + \frac{y^2}{s}$ (рис. 4).

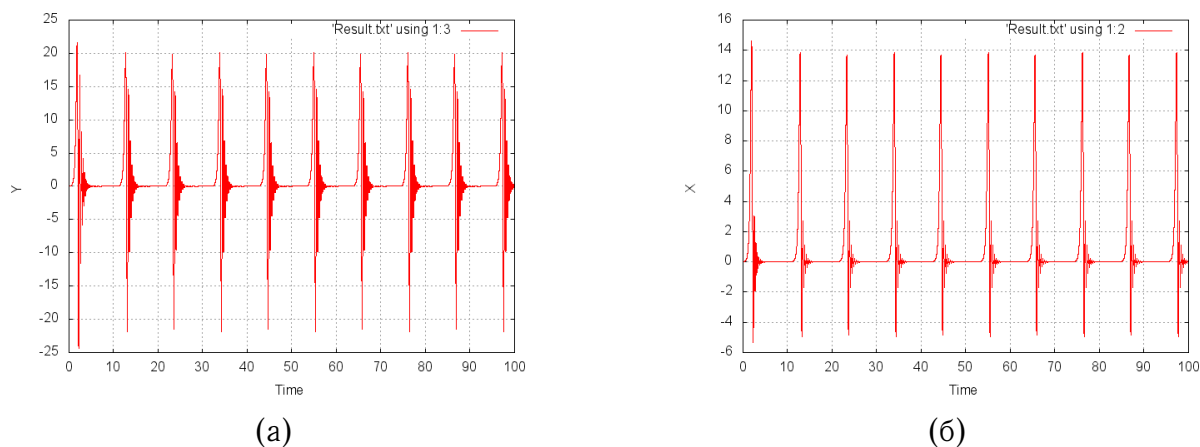


Рис. 4. Решение системы (6): (а) — $x(t)$, (б) — $y(t)$

И еще пример, $J(t - \tau) = t^n e^{-bt}$, $n = 2$ и $Q(x, y) = sx^2 + \frac{y^2}{s}$, $b = 0.5, D = 12$ (рис. 5)

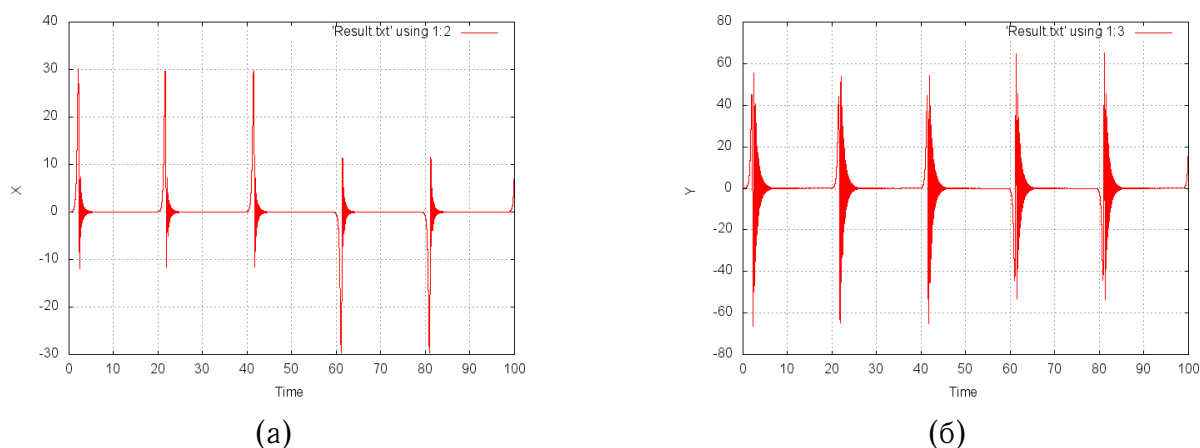


Рис. 5. Решение системы (6): (а) — $x(t)$, (б) — $y(t)$

Динамо система с ядром оператора подавления с запаздыванием прекращает свою работу. То есть, она работает, потом прекращает работу, затем происходит всплеск, снова не работает, такой тип динамики называется динамо всплески (dynamo-bursts).

Выводы

Комбинированная интегро-дифференциальная структура не позволяет использовать для численного моделирования стандартные математические пакеты. Поэтому вычислительные эксперименты с моделью проводились с использованием численного алгоритма расчета по специально разработанной разностной схеме, в которой скомбинированы неявная схема Рунге-Кутты для дифференциальной части модели и квадратурная схема трапеций для интегральной части. В целом схема имеет первый глобальный порядок точности. Верификация алгоритма и

программного кода проводилась на частном случае модели, совпадающем с системой Лоренца. Расчетная динамика полностью соответствовала известным режимам лоренцевской системы.

На рассмотренных примерах четко видно:

- 1) в системе (2) присутствуют основные режимы динамо, такие как выход на стационар, инверсии(хаотические и регулярные) и динамо всплески
- 2) для перебросов в системах подобного типа, память должна быть длинной, но конечной.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

- [1] Zeldovich Y. B., Rusmaikin A. A., Sokoloff D. D., *Magnetic fields in astrophysics. The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics.*, Gordon and Breach, New York, 1983, 382 pp.
- [2] Sokolov D. D., Nefedov S. N., “Malomodovoye priblizheniye v zadache zvezdnogo dinamo”, *Vychislitel’nyye metody i programmirovaniye*, 2007, № 2, 195–204.
- [3] Korn G., Korn T., *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*, Nauka, Moskva, 1968, 720 с.
- [4] Табор М., *Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике*, Едиториал УРСС, Москва, 2001, 585 с. [Tabor M., *Khaos i integriruyemost’ v nelineynoy dinamike*, Yeditorial URSS, Moskva, 2001, 585 pp.]
- [5] Lorenz E. N., “Deterministic nonperiodic flow”, *Journal of the atmospheric sciences*, 1963, № 20, 130-141.
- [6] Кузнецов С. П., *Динамический хаос*, Физматлит, М., 2006, 356 с. [Kuznetsov S. P., *Dinamicheskii khaos*, Fizmatlit, Moskva, 2006, 356 pp.]
- [7] Parker E. N., “Hydromagnetic dynamo models”, *Astrophysical Jour*, 1955, № 122, 293–314.

Hereditary low-mode dynamo model

E. A. Kazakov^{1,2}

¹ Kamchatka State Technical University, 683003, Petropavlovsk-Kamchatsky, Klyuchevskaya st., 35, Russia

² Vitus Bering Kamchatka State University, 683032, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: MifistJohn@gmail.com

This article discusses a dynamo model in the form of a two-dimensional dynamical system in integro-differential form. The model implements a stabilizing polarization generator in the form of suppression of the α effect of convolucional type functional from current and previous helicity and energy values. The presence of this suppression mechanism introduces hereditary (memory) into the model. For modeling, a digital scheme was constructed in the form of a combination of difference schemes for the differential and integral parts, a two-step implicit Runge-Kutta method and a trapezium method, respectively. We also reviewed and graphically presented the dynamic modes of our model.

Key words: principle of extremum, unique solvability, solvability, singular coefficient, index of equation, integral equations.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47

Original article submitted: 26.05.2021

Revision submitted: 14.06.2021

For citation. Kazakov E. A. Hereditary low-mode dynamo model. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **35**: 2, 40-47. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Kazakov E. A., 2021

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.