Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 33. № 4. С. 10-25. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.2 Научная статья

О разрешимости некоторых операторов с несколькими подвижными и неподвижными особенностями

Д. М. Одинабеков

Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в г. Душанбе, 734003, Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бохтар, 35

E-mail: jasur_79@inbox.ru

В работе рассматриваются двумерные сингулярные интегральные операторы по ограниченной области с коэффициентами при интегралах, содержащими в нескольких точках существенный разрыв и операторы с ядрами, имеющими в нескольких точках фиксированные особенности типа однородных функций порядка −2. Такие операторы широко применяются при изучении различных краевых задач для эллиптических систем уравнений первого и второго порядка с сингулярными коэффициентами на плоскости (см. напр. [1]-[4]). Одно из таких приложений приведено в конце настоящей работы. Сначала излагаются результаты исследования разрешимости (нетеровости) двумерного сингулярного интегрального уравнения с коэффициентом при интеграле, содержащим в одной точке существенный разрыв.

Ключевые слова: сингулярный интегральный оператор, индекс оператора, символ оператора, нетеровость оператора, эллиптическая система.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-10-25

Поступила в редакцию: 18.11.2020 В окончательном варианте: 10.12.2020

Для цитирования. Одинабеков Д. М. О разрешимости некоторых операторов с несколькими подвижными и неподвижными особенностями // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 33. № 4. С. 10-25. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-10-25

Некоторые вспомогательные утверждения

Будем говорить, что функция $f(z)$ принадлежит пространству $L^p_{\beta-2/p}(D)$, если функция $|z|^{\beta-2/p}f(z)=F(z)\in L^p(D)$, то есть $f(z)\in L^p_{\beta-2/p}$ и

$$||f||_{L^p_{\beta-2/p}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big(\int_0^1 r|F_k(r)|^p)dr\Big)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Финансирование. Работа выполнялась без финансовой поддержки

Очевидно, что все аксиомы нормы выполняются.

Лемма 1. *Пространство $L^p_{\beta-2/p}(D)$ является полным, то есть банаховым.*

Доказательство. Пусть $|z| \le 1$ и $\{f^{(m)}(z)\}$ — фундаментальная последовательность функций из $L^p_{\beta-2/p}(D)$, то есть для любого $\varepsilon > 0$, существует такой номер N, что

$$||f^m(z) - f^{(n)}(z)||_{L^p_{\beta-2/p}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^1 r|F_k^m(r) - F_k^n(r)|^p)dr\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon, \qquad (1)$$

как только $m,n > N$. Покажем, что для любого фиксированного k последовательность $\{f_k^{(m)}(r)\}$ сходится по норме $L^p_{\beta-1/p}(D)$ на отрезке $[0,1]$. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$

$$||f^m(z) - f^{(n)}(z)||_{L^p_{\beta-1/p}(0,1)} = \Big(\int_0^1 r|F_k^m(r) - F_k^n(r)|^p)dr\Big)^{\frac{1}{p}} <$$

$$< \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^1 r|F_k^m(r) - F_k^n(r)|^p dr\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

то есть последовательность $\{f_k^{(m)}(r)\} \in L^p_{\beta-1/p}(0,1)$ — является фундаментальной последовательностью. Поскольку пространство $L^p_{\beta-1/p}(0,1)$ полно, то $\{f_k^{(m)}(r)\} \to f_k(r)$ в $L^p_{\beta-1/p}(0,1)$.

Покажем, что функция

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r)e^{ik\varphi}, \ \ z = re^{i\varphi},$$

принадлежит пространству $L^p_{\beta-2/p}(D)$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что как только $n,m \ge N$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^1 r|F_k^m(r)|^p dr\Big)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^1 r|F_k^m(r) - F_k^n(r)|^p dr\Big)^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^1 r|F_k^n(r)|^p dr\Big)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon + A.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ||f_k||_{L^p_{\beta-1/p}(0,1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^1 r|F_k(r)|^p dr\Big)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon + A.$$

Следовательно, $f(z) \in L^p_{\beta-2/p}(D)$ при $|z| \le 1$.

Докажем теперь, что последовательность $\{f^{(m)}(z)\} \to f(z)$ по $L^p_{\beta-2/p}$. Из (1) следует, что для любого M, существует такой номер N, что $\sum\limits_{k=-M}^{M} \Big(\int\limits_0^1 r|F_k^m(r) -$

$F_k^n(r)|^p)dr\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$, как только $n,m \geq N$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ имеем

$$\sum_{k=-M}^{M}\Big(\int_0^1 r|F_k^m(r)-F_k(r)|^p)dr\Big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

при любых $M,m \geq N$. Переходя здесь к пределу при $M \to \infty$ получим, что $\{f^{(m)}(z)\} \to f(z)$ по норме $L^p_{\beta-2/p}(D)$. Лемма доказана. □

Теперь рассмотрим уравнение вида

$$f(z)-\frac{\lambda}{\pi}\Big(\frac{z}{|z|}\Big)^n \iint\limits_{|\zeta|<1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta-z)^2}ds_\zeta = g(z),\ |z|\leq 1, \tag{2}$$

где $z=re^{i\varphi}, \zeta=\rho e^{i\alpha}$ — комплексные обозначения точек плоскости, n –целое число отличное от нуля, ds_ζ — плоская мера Лебега.

Интеграл в (2) понимается в смысле главного значения по Коши, то есть если обозначить интегральный оператор из левой части (2) через $\mathscr{P}$, то

$$(\mathscr{P}f)(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{(|\zeta|\leq 1)\cap(|\zeta-z|>\varepsilon)}\frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta-z)^2}ds_\zeta,\ |z|\leq 1. \tag{3}$$

Комплекснозначные функции $g(z)$ и $f(z)$ соответственно задаются и ищутся в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D),\ 1<p<\infty,\ 0<\beta<2.$

Как следует из работ [5] и [6] предел (3) существует почти для всех z ($|z|\leq 1$) и оператор $\mathscr{P}$ ограничен в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$.

Запишем оператор $\mathscr{P}$ в виде

$$\omega(z)\equiv(\mathscr{P}\overline{f})(z)=\lambda(S\overline{f})(z), \tag{4}$$

где

$$(S\overline{f})(z)=\frac{e^{in\varphi}}{\pi}\iint_D\frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta-z)^2}ds_\zeta$$

Пусть $f(z)\in L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D),\ 1<p<\infty,\ 0<\beta<2$. Тогда ограниченность оператора S хорошо известна [6].

Лемма 2. *Для всякого λ и $|\lambda|\neq 1$, существует натуральное число N_0 такое, что уравнение (2) безусловно разрешимо единственным образом в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ при $N\geq N_0$.*

Теперь переходим к непосредственному вычислению коэффициентов Фурье значения оператора по углу $\varphi = arg z$. Для этого умножим (4) на $\frac{1}{2\pi}e^{-ik\varphi}$ и проинтегрируем по φ в пределах $(0,2\pi)$

$$\omega_k(r)=\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-ik\varphi}d\varphi\frac{e^{in\varphi}}{\pi}\iint\limits_{|\zeta|\leq 1}\frac{\overline{f(\zeta)}}{(\zeta-z)^2}ds_\zeta,\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Сделав замену переменных $\zeta=\sigma z$ и переходя к полярным координатам $z=re^{i\varphi}$, $\zeta=\rho e^{i\alpha}$, $\sigma=\tau e^{i\gamma}$, получим

$$\omega_k(r)=\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i(k+2-n)\varphi}d\varphi\frac{1}{\pi}\iint_{|\sigma|\le\frac{1}{|z|}}\frac{\overline{f(\sigma z)}}{(\sigma-1)^2}ds_\sigma,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

Предел внутреннего сингулярного интеграла существует равномерно относительно φ, поэтому можно поменять порядок интегрирования. Изменив порядок интегрирования и используя периодичность функции $f(z)$ по φ, будем иметь

$$\omega_k(r)=\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i(k+2-n)\gamma}}{(\sigma-1)^2}\overline{f_{-k+n-2}(\tau r)}ds_\sigma,\ k=0,\pm1,\pm2,\dots$$

В терминах оператора S последнее равенство имеет вид

$$\omega_k(r)=\frac{\lambda}{\pi}\iint_{|\sigma|\le\frac{1}{|z|}}\frac{e^{i(k+2-n)\gamma}}{(\sigma-1)^2}\overline{f_{-k+n-2}(\tau r)}ds_\sigma.$$

Сделаем обратную замену $\sigma=\frac{\zeta}{z}$ и заменив $\tau=\frac{\rho}{r}$, относительно коэффициентов Фурье искомой функции $f(z)$ получим следующие интегральные уравнения:

$$\omega_k(r)=2\lambda\int_r^1\frac{k-n+1}{r}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k+1-n}\overline{f_{-k+n-2}(\rho)}d\rho-\lambda\overline{f_{-k+n-2}(r)}+g_k(r),$$

$$\omega_{-k+n-2}(r)=2\lambda\int_0^r\frac{k+1}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{k+1}\overline{f_k(\rho)}d\rho-\lambda\overline{f_k(r)}+g_{-k+n-2}(r),\tag{5}$$

при $\nu\le k\le N_0$ и

$$\omega_k(r)=2\lambda\, signn\int_a^b\frac{n-k-1}{r}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k+1-n}\overline{f_{-k+n-2}(\rho)}d\rho-\lambda\overline{f_{-k+n-2}(r)}+g_k(r),$$

$$\omega_{-k+n-2}(r)=2\lambda\, signn\int_a^b\frac{k+1}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{k+1}\overline{f_k(\rho)}d\rho-\lambda\overline{f_k(r)}+g_{-k+n-2}(r),\tag{6}$$

при $n_0-\delta(n)\le k\le\nu-1$, где здесь $\nu=n-1$, если $n\ge0$ и $\nu=0$, если $n\le-1$, $a=0$, $b=r$ при $n\ge0$, $a=r$, $b=1$, при $n\le-1$,

$$n_0=\begin{cases}\frac{n}{2} & \text{при четном}\quad n,\\ \frac{n-1}{2} & \text{при нечетном}\quad n,\end{cases}$$

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & \text{при четном}\quad n,\\ 0 & \text{при нечетном}\quad n.\end{cases}$$

а N_0 — натуральное число фигурирующее в Лемме 2. Отметим, что в случае, когда n — нечетное число оба уравнения (6) с индексом $k=\frac{n}{2}-1$ совпадают.

Для изучения (5) и (6) переходим в их первых строках к комплексно сопряженным значениям, подставим полученные выражения для $\overline{\omega_k(r)}$ в соответствующие вторые строки (5), (6). В результате при $|\lambda| \neq 1$ для нахождения коэффициентов Фурье $\omega_{-k+n-2}(r)$ получим следующие интегральные уравнения с ядрами однородными порядка -1:

$$\omega_{-k+n-2}(r) = \frac{2n(\mu-1)}{2k-n+2}\int_0^1 \frac{1}{r}\Omega_{1,k}\Big(\frac{\rho}{r}\Big) f_{-k+n-2}(\rho)d\rho + \mu q_k^1(r) \tag{7}$$

при $\nu \leq k \leq N_0$,

$$\omega_{-k+n-2}(r) = -\frac{2n(\mu-1)}{2k-n+2} signn \int_a^b \frac{1}{r}\Omega_{2,k}\Big(\frac{\rho}{r}\Big) f_{-k+n-2}(\rho)d\rho + \mu q_k^2(r) \tag{8}$$

при $n_0 \leq k \leq \nu - 1$, а в случае четного n, когда $k = \frac{n}{2} - 1$

$$\omega_{\frac{n}{2}-1}(r) = -2n(\mu-1) signn \int_a^b \frac{1}{r}\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\frac{n}{2}} \Big\{ln\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{\frac{n}{2}} + 1\Big\} f_{\frac{n}{2}-1}(\rho)d\rho + \mu q^2_{\frac{n}{2}-1} \tag{9}$$

где приняты следующие обозначения

$$\Omega_{1,k}(\tau) = \begin{cases} -(k+1)\tau^{k+1}, & \text{если } 0 < \tau \leq 1, \\ \frac{k-n+1}{\tau^{k-n+1}}, & \text{если } 1 < \tau < \frac{1}{r}, \end{cases} \tag{10}$$

$$\Omega_{2,k}(\tau) = (k+1)\tau^{k+1} + \frac{k-n+1}{\tau^{k-n+1}}, \quad \mu = (1-|\lambda|^2)^{-1},$$

$$q_k^1(r) = 2\lambda\int_0^r \frac{k+1}{r}\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{k+1}\overline{g_k(\rho)}d\rho - \lambda\overline{g_k(r)} + g_{-k+n-2}(r),$$

$$q_k^2(r) = 2\lambda sign\cdot n\int_a^b \frac{k+1}{r}\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{k+1}\overline{g_k(\rho)}d\rho - \lambda\overline{g_k(r)} + g_{-k+n-2}(r). \tag{11}$$

Известно, что уравнения (5) и (6) эквивалентны соответствующим уравнениям (7) и (8) в том смысле, что если $(\omega_k, \omega_{-k+n-2})$ — решения (5) либо (6), то тогда ω_{-k+n-2} будет решением уравнениям (7) либо (8) и, обратно, если ω_{-k+n-2} — решение (7) либо (8), то подставляя эту функцию в соответствующие правые части первых уравнений (5), (6), найдем функции ω_k, которая в паре с ω_{-k+n-2} составляют решение уравнений (5) либо (6).

В случае четного n следует особо сказать об уравнениях (6) при $k = \frac{n}{2} - 1$. Тогда оба уравнения (6) совпадают и, если $\omega_{\frac{n}{2}-1}$ является решением (6), то она также будет решением (9), обратно, по каждому решению уравнения (9) специально строится решение уравнения (6) при $k = \frac{n}{2} - 1$, однако, при этом число линейно независимых над полем вещественных чисел решений однородного уравнения (6) при четных $n > 0$ равно числу линейно независимых над полем комплексных чисел решений соответствующего однородного уравнения (9), а число линейно независимых вещественных условий разрешимости неоднородного уравнения (6) при $n < 0$ равно числу линейно независимых комплексных условий разрешимости неоднородного уравнения (9).

Уравнения (7)-(9) относятся к интегральным уравнениям с ядрами однородными порядка -1. Условия суммируемости для них выполнены при всяком $\beta \in (0,2)$. Поэтому, далее к этим уравнениям применяются результаты [7],[8]. Проиллюстрируем исследование уравнений (5)-(7) на примере уравнения (5) в случае $n \geq 1$ и фиксированном $k : t-1 \leq k \leq N_0$.

Функция, определяющая характер разрешимости уравнений (5), принимает вид:

$$\mathscr{G}_k(t) = 1 - \frac{2n(\mu-1)}{2k-n+2}\int_0^\infty \Omega_{1,k}(\tau)\tau^{it-\beta}d\tau = 1 - \frac{2n(\mu-1)(1-\beta+it)}{(k+2-\beta+it)(k-n+\beta-it)}.$$

Тогда получаем, что для того чтобы, система (5) была нетеровой в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ при любых $\beta \in (0,2)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$|\lambda| \neq 1, \quad |\lambda| \neq \sqrt{1 - \frac{2n(1-\beta)}{(k+\beta)(k-\beta-n+2)}} \equiv R_\beta(k),$$

где $n \leq k \leq N_0$. При выполнении этих условий индекс системы (5) (над полем вещественных чисел) вычисляется по формуле

$$\varkappa = -2Ind_{-\infty<t<\infty}\mathscr{G}_k(t) =$$

$$= -2Ind_{-\infty<t<\infty}\Big(1 - \frac{2n(\mu-1)(1-\beta+it)}{(k+2-\beta+it)(k+2-\beta+it)(k-n+\beta-it)}\Big).$$

Вычисления этих индексов приводят к следующим результатам для k-ой системы (5), где $n-1 \leq k \leq N_0$, $n \geq 1$.

Случай $0<\beta<1$. Если $|\lambda| < R_\beta(k)$ или $|\lambda|>1$, то k – ая неоднородная система (5) безусловно разрешима единственным образом в $L^p_{\beta-\frac{1}{p}}$ на отрезке [0,1]. Если же $R_\beta(k) < |\lambda| < 1$, то однородная система (5) нетривиальных решений не имеет, а для разрешимости неоднородной необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два вещественных условия.

Случай $\beta = 1$. Тогда (5) безусловно однозначно разрешима при любых значениях параметра λ ($|\lambda| \neq 1$).

Случай $1<\beta<2$. Если $|\lambda|<1$ или $|\lambda| > R_\beta(k)$, то k-ая система (5) безусловно разрешима единственным образом. Если же $1 < |\lambda| < R_\beta(k)$, то однородная система (5) имеет два линейных независимых (над полем вещественных чисел)решений, а неоднородная разрешима безусловно.

Что касается системы (5) при $k=n-1$, то она при всех $\beta : 0<\beta<2$ разрешима безусловно, причем, если $|\lambda|<1$, то единственным образом, а если $|\lambda|>1$, то однородная система имеет два линейно независимых (над полем вещественных чисел) решения.

Теперь установим, что условие $|\lambda| \neq R_\beta(k)$ необходимо для нормальной разрешимости k-го уравнения (5), где $n \leq k \leq N_0$. В самом деле переходя, от (7) к дифференциальному уравнению, заключаем, что k-ое однородное уравнение (7) имеет не более чем два линейно независимых решения, то есть на линии $|\lambda| = R_\beta(k)$ одно из характеристических чисел уравнения (5) конечно.

Можно показать также, что нормальная разрешимость нарушается и при $|\lambda|=1$.

Аналогично исследуются уравнения (6), а также уравнения (5), (6) при $n \leq -1$.

Вышеприведенные исследования приводят к следующим результатам.

Теорема 1. *Для нормальной разрешимости уравнения (2) в пространстве $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$|\lambda| \neq 1 \text{ и } |\lambda| \neq R_\beta(k),$$

где $k = n_0 - \delta(n),\ n_0 - \delta(n) + 1, \ldots, m-2, m, m+1, \ldots$

Теперь в случае нормальной разрешимости уравнения (2) обозначим через $\varkappa^+$ — число линейно независимых над полем вещественных чисел решений однородного уравнения, а через $\varkappa^-$ — число необходимых и достаточных вещественных условий разрешимости неоднородного уравнения (2) в $L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(D)$.

Тогда при $n \geq 1$ для (2) имеет место

Теорема 2. *а) Пусть* $0 < \beta < 1$. *Тогда, если* $|\lambda| < R_\beta(n)$, *то* $\varkappa^+ = \varkappa^- = 0$; *если* $R_\beta(k_0) < |\lambda| < R_\beta(k_0+1)$, *где* $k_0 = n, n+1, \ldots,$ *то* $\varkappa^+ = 0,\ \varkappa^- = 2(k_0 - n + 1)$; *если* $1 < |\lambda| < R_\beta(n_0 - \delta(n))$, *то* $\varkappa^+ = n+1,\ \varkappa^- = 0$; *если* $R_\beta(k_0) < |\lambda| < R_\beta(k_0+1)$, *где* $k = n_0 - \delta(n), n_0 - \delta(n) + 1, \ldots, n-3$, *то* $\varkappa^+ = 2(k_0+2), \varkappa^- = 0$; *если* $|\lambda| > R_\beta(n-2)$, *то* $\varkappa^+ = 2n, \varkappa^- = 0$.

б) Пусть $1 < \beta < 2$. *Тогда в случае нормальной разрешимости, уравнение (2) разрешимо безусловно, то есть* $\varkappa^- = 0$. *При этом: если* $|\lambda| < R_\beta(n-2)$, *то* $\varkappa^+ = 0$; *если* $R_\beta(k_0+1) < |\lambda| < R_\beta(k_0)$, *где* $k = n_0 - \delta(n), n_0 - \delta(n) + 1, \ldots, n-3$, *то* $\varkappa^+ = 2(n - k_0 - 2)$; *если* $R_\beta(n_0 - \delta(n)) < |\lambda| < 1$, *то* $\varkappa^+ = n-1$; *если* $R_\beta(k_0+1) < |\lambda| < R_\beta(k_0)$, *где* $k_0 = n, n+1, \ldots,$ *то* $\varkappa = 2(k_0+1)$; *если* $|\lambda| > R_\beta(n)$, *то* $\varkappa^+ = 2n$.

в) Пусть $\beta = 1$. *Тогда, если* $|\lambda| < 1$, *то* $\varkappa^+ = \varkappa^- = 0$; *если* $|\lambda| > 1$, *то* $\varkappa^+ = 2n, \varkappa^- = 0$.

В случае $n \leq -1$ для уравнения (2) справедлива

Теорема 3. *а) Пусть* $0 < \beta < 1$. *Тогда в случае нормальной разрешимости, однородное уравнение (2) ненулевых решений не имеет, то есть* $\varkappa^+ = 0$. *При этом: если* $|\lambda| < R_\beta(-2)$, *то* $\varkappa^- = 0$; *если* $R_\beta(k_0+1) < |\lambda| < R_\beta(k_0)$, *где* $k_0 = -3, -4, \ldots, n_0 - \delta(n)$, *то* $\varkappa^- = 2(|k_0| - 2)$; *если* $R_\beta(n_0 - \delta(n)) < |\lambda| < 1$, *то* $\varkappa^- = |n| - 1$; *если* $R_\beta(k_0+1) < |\lambda| < R_\beta(k_0)$, *где* $k_0 = 0, 1, 2, \ldots,$ *то* $\varkappa^- = 2(k_0 + |n| + 1)$; *если* $|\lambda| > R_\beta(0)$, *то* $\varkappa^- = 2|n|$.

б) Пусть $1 < \beta < 2$. *Тогда, если* $|\lambda| < R_\beta(0)$, *то* $\varkappa^+ = \varkappa^- = 0$; *если* $R_\beta(k_0) < |\lambda| < R_\beta(k_0+1)$, *где* $k_0 = 0, 1, 2, ...,$ *то* $\varkappa^+ = 2(k_0+1), \varkappa^- = 0$; *если* $1 < |\lambda| < R_\beta(n_0 - \delta(n))$, *то* $\varkappa^+ = 0, \varkappa^- = |n| + 1$; *если* $R_\beta(k_0) < |\lambda| < R_\beta(k_0+1)$, *где* $k_0 = n_0 - \delta(n), n_0 - \delta(n) + 1, ..., -4, -3$, *то* $\varkappa^+ = 0, \varkappa^- 2(|n| + k_0 + 2;)$ *если* $|\lambda| > R_\beta(-2)$, *то* $\varkappa^+ = 0, \varkappa^- = 2|n|$.

в) Пусть $\beta = 1$. *Тогда, если* $|\lambda| < 1$, *то* $\varkappa^+ = \varkappa^- = 0$; *если* $|\lambda| > 1$, *то* $\varkappa^+ = 0, \varkappa^- = 2|n|$.

Оператор с несколькими подвижными особенностями

Пусть D — конечная односвязная область комплексной плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ и содержащая внутри точку $z = 0$ и точки $z_1, z_2, \ldots, z_m$; $\overline{D} = D \cup \Gamma$; $a(z), b(z), c(z), d(z), \nu(z), \delta(z)$ — непрерывные в $\overline{D}$ функции; $Q_{ij}(z,\zeta)$ — измеримые ограниченные функции, имеющие пределы

$$\lim_{z,\zeta \to z_j} Q_{ij}(z,\zeta) = Q_{ij}(z_j, z_j), \quad i = 1,2; j = 1,2,\ldots,m;$$

$h_{ij}(\sigma)$ — измеримые на всей плоскости функции, причем

$$\iint_{|\sigma|<\infty} |h_{ij}(\sigma)||\sigma|^{-\beta_j} ds_\sigma < \infty, \quad i = 1,2; j = 1,2,\ldots,m, \tag{12}$$

где β_j — некоторые числа из интервала $(0,2)$. Через $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$ обозначим лебегово пространство с весом

$$L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D) = \left\{ f(z) : \prod_{j=1}^{m} |z - z_j|^{\beta_j - 2/p} f(z) = F(z) \in L^p(D), \right.$$

$$||f||_{L^p_{\Pi(\beta-2/p)}} = ||F||_{L^p} \Big\},$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, β_j — числа из (12).

В пространстве $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$ рассматривается следующий оператор

$$A \equiv a(z)I + b(z)\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\overline{z}-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j-2}K +$$

$$+c(z)\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{z-z_j}{|z-z_j|}\right)^{n_j-2}S + d(z)\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\overline{z}-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j}\overline{S}K +$$

$$+\nu(z)\overline{B} + \delta(z)BK + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\overline{z}-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j-2}H_{1j}K + H_{2j}, \tag{13}$$

где $n_j, j = 1,2,\dots,m$ — целые числа, а операторы $K, S, \overline{B}, H_{ij}, B, \overline{B}$ действуют по формулам

$$(Kf)(z) = \overline{f(z)}, \quad (Sf)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(z)ds_\zeta}{(\zeta - z)^2}, \quad \overline{S} = KS,$$

$$(Bf)(z) = \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{\omega'(z)\overline{\omega'(\zeta)}}{(1-\omega(z)\overline{\omega'(\zeta)})} f(\zeta)ds_\zeta, \quad \overline{B} = KB,$$

$$(H_{ij}f)(z) = \frac{1}{|z-z_j|^2}\iint_D Q_{ij}(z,\zeta)h_{ij}\left(\frac{\zeta - z_j}{z-z_j}\right)f(\zeta)ds_\zeta, \quad i = 1,2; j = \overline{1,m},$$

$\omega(z)$ — однолистное конформное отображение области D на единичный круг с центром в начале координат, причем $\omega(0) = 0, \omega'(0) > 0, ds_\zeta$ — элемент плоской меры Лебега.

Таким образом, коэффициенты при операторах $K, S, \overline{S}K$ имеют существенные разрывы в точках $z_1, z_2, \dots, z_m$, а операторы $H_{1j}K, H_{2j}, j = 1,2,\dots,m$ имеют фиксированные особенности в точках $z = z_j$. Следует отметить, что оператор A при $b(z) \equiv c(z) \equiv \delta(z) \equiv 0$ изучен в работе [9].

Прежде всего отметим, что оператор A является оператором локального типа (см. [10]). Поэтому для того чтобы A был оператором Нетера в $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$, необходимо и достаточно, чтобы он был локально нетеров в каждой точке $z_0 \in \overline{D}$. В точках $z \neq z_j, j = \overline{1,m}$ оператор A локально эквивалентен оператору $\mathfrak{M}$, который отличается от A тем, что в нем отсутствуют интегральные операторы с фиксированными особенностями $H_{1j}K$ и H_{2j}, $j = \overline{1,m}$. Операторы вида $\mathfrak{M}$ изучены в работе ([11]). Из результатов [11] в частности следует, что для нетеровости оператора A в $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$ необходимо выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий

$$|\Delta_1(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{14}$$

$$|\Delta_2(z)| > |\lambda(z)| + |\mu(z)| \quad \forall z \in \overline{D}, \tag{15}$$

где

$$\Delta_1(z) = |a(z)|^2 - |b(z)|^2, \quad \Delta_2(z) = |d(z)|^2 - |c(z)|^2,$$

$$\lambda(z) = \overline{a(z)}c(z) - b(z)\overline{d(z)}, \quad \mu(z) = a(z)\overline{d(z)} - \overline{b(z)}c(z). \tag{16}$$

Рассмотрим следующие ограниченные в $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$ операторы

$$T_1=\overline{a(z)}I-b(z)\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\bar z-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j-2}K,$$

$$T_2=\overline{d(z)}I-c(z)\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\bar z-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j-2}K.$$

Тогда при выполнении условия (14) оператор T_1 имеет непрерывный обратный, причем $A=T_1^{-1}A_1$, где

$$A_1\equiv\Delta_1(z)I+\lambda(z)\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{z-z_j}{|z-z_j|}\right)^{2}S+\overline{\mu(z)}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\bar z-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j}\overline{S}K+$$

$$+\nu_1(z)\overline{B}+\delta_1(z)BK+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\bar z-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j-2}H^1_{1j}K+H^1_{2j}+V. \qquad (17)$$

В случае (15) оператор T_2 имеет непрерывный обратный, причем $A=T_2^{-1}A_2$,

$$A_2\equiv\mu(z)I-\lambda(z)\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\bar z-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j-2}K+\Delta_2(z)\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\bar z-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j}\overline{S}K+$$

$$+\nu_2(z)\overline{B}+\delta_2(z)BK+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\bar z-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j-2}H^2_{1j}K+H^2_{2j}+V, \qquad (18)$$

где

$$\nu_1=\bar a\nu-b\overline{\delta},\quad \delta_1=\bar a\delta-b\overline{\nu},\quad \nu_2=\bar d\nu-c\overline{\delta},\quad \delta_2=\bar d\delta-c\overline{\nu},$$

V — вполне непрерывный в $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$ оператор, а операторы $H^1_{1j}K,H^1_{2j}$, $H^2_{1j}K,H^2_{2j}$ $(j=\overline{1,m})$ в силу результатов [12], [13] и наложенных условий на функции $Q_{ij}(z,\zeta)$ соответственно имеют следующие однородные ядра нулевого порядка

$$h^1_{1j}(\sigma)=\overline{a(z_j)}Q_{1j}(z_jz_j)h_{1j}(\sigma)-b(z_j)\overline{Q_{2j}(z_jz_j)h_{2j}(\sigma)},$$

$$h^1_{2j}(\sigma)=\overline{a(z_j)}Q_{2j}(z_jz_j)h_{2j}(\sigma)-b(z_j)\overline{Q_{1j}(z_jz_j)h_{1j}(\sigma)},$$

$$h^2_{1j}(\sigma)=\overline{d(z_j)}Q_{1j}(z_jz_j)h_{1j}(\sigma)-c(z_j)\overline{Q_{2j}(z_jz_j)h_{2j}(\sigma)},$$

$$h^2_{2j}(\sigma)=\overline{d(z_j)}Q_{2j}(z_jz_j)h_{2j}(\sigma)-c(z_j)\overline{Q_{1j}(z_jz_j)h_{1j}(\sigma)}.$$

Таким образом, исследование нетеровости и индекса оператора A сводится к соответствующему исследованию операторов A_1 и A_2. В дальнейшем будем считать, что $\lambda(z_j)=0$ $(j=\overline{1,m})$.

1. Пусть выполнено условие (14). Тогда согласно результатам работы [14], по сингулярной части оператора A_1 построим матрицу-символ

$$G^1_z(u)=\begin{pmatrix}\Delta_1+\nu_1 & \delta_1 & \lambda e^{\sum_1^m 2\varphi_j}-\nu_1\bar u/u & \overline{\mu}e^{-\sum_1^m n_j\varphi_j}-\delta_1 u/\bar u\\ \overline{\delta_1} & \overline{\Delta_1}+\overline{\nu_1} & \mu e^{\sum_1^m 2\varphi_j}-\overline{\delta_1}\bar u/u & \overline{\lambda}e^{-\sum_1^m n_j\varphi_j}-\overline{\nu_1}u/\bar u\\ -\bar u/u & 0 & 1 & 0\\ 0 & -u/\bar u & 0 & 1\end{pmatrix},$$

такую, что в силу условия (14) $\forall z \in \overline{D}, u = u_1 + iu_2 \neq 0$

$$\det G_z^1(u) = |\Delta_1(z) + \lambda(z) e^{\Sigma_1^m 2\varphi_j} \overline{u}/u|^2 - |\mu(z)|^2 > 0. \tag{19}$$

Рассмотрим алгебраическое уравнение $\det G_z^1(u) = 0$, где $e^{-2i\psi} \det G_z^1(e^{2i\psi})$ является тригонометрическим полиномом 2-го порядка с зависящими от z вещественными коэффициентами. Нулями указанного уравнения в комплексной плоскости $u = u_1 + iu_2$ являются функции $q_1(z)$, $q_1^{-1}(z)$, причем $|q_1(z)| < 1$ для всех $z \in \overline{D}$.

Введем теперь в $\overline{D}$ вспомогательную функцию $\alpha_1(z)$, которая выражается через коэффициенты оператора A_1 и корень $q_1(z)$ полинома $\det G_z^1(u)$ по формуле

$$\alpha_1(z) = \frac{\overline{\mu(z)}}{\Delta_1(z) + \overline{\lambda(z)} q_1(z)},$$

и в силу (19) для всех $z \in \overline{D}$ удовлетворяет неравенству $|\alpha_1(z)| < 1$. Далее введем обратимый оператор

$$T_3 = I - \alpha_1(z) q_1(z) \prod_1^m \left(\frac{\overline{z} - \overline{z_j}}{|z - z_j|} \right)^{n_j - 2} K.$$

Лемма 3. *Если выполнено условие (14) и $\lambda(z_j) = 0, j = \overline{1,m}$, то оператор A_1 из (17) представляется в виде*

$$A_1 = T_3^{-1} \Delta_1 \left(I - q_1 \prod_1^m \left(\frac{z - z_j}{|z - z_j|} \right)^2 S + \delta_1^* B K \right) \times$$

$$\times \left(I + \alpha_1 \prod_1^m \left(\frac{\overline{z} - \overline{z_j}}{|z - z_j|} \right)^{n_j} \overline{S} K + \nu_1^* \overline{B} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\overline{z} - \overline{z_j}}{|z - z_j|} \right)^{n_j - 2} H_{1j}^1 K + H_{2j}^1 \right) + V \tag{20}$$

где V — вполне непрерывный в $L^p_{\Pi(\beta - 2/p)}(D)$ оператор, $\nu_1^*(t), \delta_1^*(t)$ — такие непрерывные в $\overline{B}$ функции, которые на границе Γ соответственно имеют значения

$$\delta_1^*(t) = \frac{\delta_1 - q_1 \alpha_1 (\nu_1 + \Delta_1) \prod_1^m \left(\frac{\overline{t} - \overline{z_j}}{|t - z_j|} \right)^{n_j - 2}}{\Delta_1 + \overline{\nu_1} - \overline{\alpha_1 q_1} \delta_1 \prod_1^m \left(\frac{\overline{t} - \overline{z_j}}{|t - z_j|} \right)^{n_j - 2}},$$

$$\nu_1^*(t) = \frac{\nu_1 - \alpha_1 q_1 \overline{\delta_1} \prod_1^m \left(\frac{\overline{t} - \overline{z_j}}{|t - z_j|} \right)^{n_j - 2}}{\Delta_1}.$$

Теперь с учетом известных фактов общей теории линейных операторов для получения условий нетеровости оператора A в $L^p_{\Pi(\beta - 2/p)}(D)$ и формулы для его индекса в случае, когда имеет место условие (14), достаточно применить к операторам из правой части (13) результаты работы [9].

2. Пусть теперь выполнено условие (15). Тогда аналогично построив матрицу-символ $G_z^2(u)$ сингулярной части оператора A_2, для ее определителя в силу условия (15) $\forall z \in \overline{D}, u = u_1 + iu_2 \neq 0$ будем иметь

$$\det G_z^2(u) = |\mu(z)|^2 - |\lambda(z) e^{\Sigma_1^m 2\varphi_j} - \Delta_2(z) \overline{u}/u|^2| < 0. \tag{21}$$

Введем в $\overline{D}$ вспомогательную функцию $\alpha_2(z)$, которая выражается через коэффициенты оператора A_2 и корень полинома $\det G_z^2(u)$ по формуле

$$\alpha_2(z) = -\frac{\mu(z)}{\Delta_2(z)+\overline{\lambda(z)}q_2(z)},$$

и в силу (21) для всех $z\in\overline{D}$ удовлетворяет неравенству $|\alpha_2(z)|<1$. Далее введем обратимый оператор

$$T_4 = I - \alpha_2(z)q_2(z)\prod_1^m\left(\frac{\bar z-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j-2}K.$$

Лемма 4. *Если выполнено условие (15) и $\lambda(z_j)=0, j=\overline{1,m}$, то оператор A_2 из (18) представляется в виде*

$$A_1 = T_4^{-1}\Delta_2\left(I-q_2\prod_1^m\left(\frac{z-z_j}{|z-z_j|}\right)^2 S+\delta_2^*BK\right)\times$$

$$\times\left(\alpha_2 I+\prod_1^m\left(\frac{\bar z-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j}\overline{S}K+\nu_2^*\overline{B}+\sum_{j=1}^m\left(\frac{\bar z-\overline{z_j}}{|z-z_j|}\right)^{n_j-2}H_{1j}^2K+H_{2j}^2\right)+V \qquad (22)$$

где V — вполне непрерывный в $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$ оператор, $\nu_2^*(t),\delta_2^*(t)$ — такие непрерывные в $\overline{B}$ функции, которые на границе Γ соответственно имеют значения

$$\delta_2^*(t) = \frac{\delta_2-q_2(\alpha_2\overline{\nu_2}+\Delta_2)\prod_1^m\left(\frac{\bar t-\overline{z_j}}{|t-z_j|}\right)^{n_j-2}}{\Delta_2\overline{\alpha_2}+\overline{\nu_2}-\overline{\alpha_2 q_2}\delta_2\prod_1^m\left(\frac{\bar t-\overline{z_j}}{|t-z_j|}\right)^{n_j-2}},$$

$$\nu_2^*(t) = \frac{\nu_2-\alpha_2q_2\overline{\delta_2}\prod_1^m\left(\frac{\bar t-\overline{z_j}}{|t-z_j|}\right)^{n_j-2}}{\Delta_2}.$$

Для получения условий нетеровости оператора A в $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$ и формулы для его индекса в случае, когда имеет место (15), достаточно теперь применить к операторам из правой части (20) результаты работы [9].

Прежде чем сформулировать результат о нетеровости и индексе оператора A в $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$, введем некоторые обозначения.

Если имеет место условие (14), то положим $\eta_1(z_j)=(1-|\alpha_1(z_j)|^2)^{-1}$, $\theta_1(z_j)=\alpha_1(z_j)$, $\tau_1(j)=1$; если же имеет место неравенство (15), то положим $\eta_2(z_j)=(|\alpha_2(z_j)|^2-1)^{-1}$, $\theta_2(z_j)=1$, $\tau_2(j)=\alpha_2(z_j)$. Далее обозначим через $n_j^0, j=\overline{1,m}$ целую часть числа $(n_j-1)/2$,

$$\mathscr{G}^j_{\iota k_j}(x;\beta_j) = \eta_\iota\left[\mathscr{H}^{2j}_{\iota k_j}(x;\beta_j)\cdot\widetilde{\mathscr{H}}^{2j}_{\iota n_j-k_j-2}(x;\beta_j)-\widetilde{\mathscr{H}}^{1j}_{\iota k_j}(x;\beta_j)\cdot\mathscr{H}^{1j}_{\iota n_j-k_j-2}(x;\beta_j)\right],$$

где $\iota=1,2; j=\overline{1,m}, k_j=n_j^0,n_j^0+1,\ldots,\beta_j-$ число из (1), $-\infty<x<\infty$,

$$\mathscr{H}^{1j}_{\iota\tau} = \theta_\iota\prod_{l=1}^{j-1}\left(\frac{z_l-z_j}{|z_l-z_j|}\right)^{n_l}\frac{\tau+\beta_j-ix}{\tau+2-\beta_j+ix}+\iint_{|\sigma|<\infty}h^\iota_{1j}(\sigma)e^{-i\tau\gamma}|\sigma|^{-\beta_j+ix}ds_\sigma,$$

$$\widetilde{\mathscr{H}}_{\iota\tau}^{1j}=\overline{\theta}_\iota\prod_{l=1}^{j-1}\left(\frac{\overline{z}_l-\overline{z}_j}{|z_l-z_j|}\right)^{n_l}\frac{\tau+\beta_j-ix}{\tau+2-\beta_j+ix}+\iint_{|\sigma|<\infty}\overline{h_{1j}^{\iota}(\sigma)}e^{i\tau\gamma}|\sigma|^{-\beta_j+ix}ds_\sigma,$$

$$\mathscr{H}_{\iota\tau}^{2j}=\tau_\iota+\iint_{|\sigma|<\infty}h_{2j}^{\iota}(\sigma)e^{-i\tau\gamma}|\sigma|^{-\beta_j+ix}ds_\sigma,$$

$$\widetilde{\mathscr{H}}_{\iota\tau}^{2j}=\overline{\tau}_\iota+\iint_{|\sigma|<\infty}\overline{h_{2j}^{\iota}(\sigma)}e^{i\tau\gamma}|\sigma|^{-\beta_j+ix}ds_\sigma,$$

τ- целое число, $\gamma=\arg\sigma$. Функции $\mathscr{G}_{\iota k_j}^{j}(x;\beta_j)$ непрерывны при $-\infty<x<\infty$, причем

$$\lim_{|x|\to\infty}\mathscr{G}_{\iota k_j}^{j}(x;\beta_j)=1,\quad \iota=1,2,\ j=\overline{1,m}.$$

Теорема 4. *Для нетеровости оператора A в $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D), 1<p<\infty$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (исключающих друг друга) условий:*

$$|\Delta_1(z)|>|\lambda(z)|+|\mu(z)| \text{ для } \forall z\in\overline{D},\ 1+\nu_1^*(t)\neq 0 \text{ для } \forall t\in\Gamma,$$
$$\mathscr{G}_{1k_j}^{j}(x;\beta_j)\neq 0,\quad -\infty<x<\infty,\quad j=\overline{1,m},\quad k_j=n_j^0,n_j^0+1,\ldots,\tag{23}$$

$$|\Delta_2(z)|>|\lambda(z)|+|\mu(z)| \text{ для } \forall z\in\overline{D},\ \alpha_2(t)+\nu_2^*(t)\neq 0 \text{ для } \forall t\in\Gamma,$$
$$\mathscr{G}_{2k_j}^{j}(x;\beta_j)\neq 0,\quad -\infty<x<\infty,\quad j=\overline{1,m},\quad k_j=n_j^0,n_j^0+1,\ldots.\tag{24}$$

При этом, если выполнено (23), то индекс оператора A равен

$$\varkappa=2Ind_\Gamma(1+\nu_1^*(t))+$$

$$+2\sum_{j=1}^{m}\sum_{k_j=n_j+1}^{N_j}Ind_{-\infty<x<\infty}\mathscr{G}_{1k_j}^{j}(x;\beta_j)+\chi_jInd_{-\infty<x<\infty}\mathscr{G}_{1n_j^0}^{j}(x;\beta_j),$$

а если выполнено (24), то

$$\varkappa=2Ind_\Gamma(\alpha_2(t)+\nu_2^*(t))+$$

$$+2\sum_{j=1}^{m}\sum_{k_j=n_j+1}^{N_j}Ind_{-\infty<x<\infty}\mathscr{G}_{2k_j}^{j}(x;\beta_j)+\chi_jInd_{-\infty<x<\infty}\mathscr{G}_{2n_j^0}^{j}(x;\beta_j),$$

где N_j — некоторое натуральное число, $\chi_j=1$, если n_j четно, и $\chi_j=2$, если n_j нечетно.

3. В единичном круге $D=\{z:|z|<1\}$ рассмотрим следующую эллиптическую систему второго порядка с двумя сингулярными точками

$$a(z)\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\overline{z}}+b(z)\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z\partial\overline{z}}+c(z)e^{-2i(\varphi_1+\varphi_2)}\frac{\partial^2\omega}{\partial\overline{z}^2}+d(z)e^{2i(\varphi_1+\varphi_2)}\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2}+$$

$$+\left(\frac{a_1(z)}{z-z_1}+\frac{a_2(z)}{z-z_2}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\overline{z}}+\left(\frac{b_1(z)}{\overline{z}-\overline{z}_1}+\frac{b_2(z)}{\overline{z}-\overline{z}_2}\right)\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial z}+$$

$$+c_1(z)\frac{\partial\omega}{\partial z}+d_1(z)\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{z}}+e_1(z)\omega+h_1(z)\overline{\omega}=g(z),\tag{25}$$

где $z = x+iy, \omega = u(x,y)+iv(x,y), \varphi_j = \arg(z-z_j), j = 1,2$, формальные производные по z и $\bar{z}$ определяются по формулам

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

коэффициенты $a(z), b(z)$, и т.д. будем считать непрерывными функциями в $\overline{D}$, а $g(z) \in L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$ $(2 < p < \infty, 0 < \beta_j < 1)$.

Как видно из (25), коэффициенты при двух старших производных в точках $z = z_1$ и $z = z_2$ по всем лучам, выходящим из этих точек имеют разные пределы, а коэффициенты при двух первых производных в указанных точках имеют сингулярную особенность первого порядка. Отметим, что системе с одной сингулярной точкой, т.е. когда в (25) $b(z) = c(z) \equiv 0$, $a_2(z) = b_2(z) \equiv 0$, посвящена работа [3].

Задача Дирихле. *Найти непрерывные решения $\omega(z)$ системы (25) в области D из класса $L^p_{\Pi(\beta-1-2/p)}(D) \cap W^2(D\backslash z_j)$, $(2 < p < \infty,\ 0 < \beta_j < 1,\ j = 1,2)$, удовлетворяющие на границе Γ условию*

$$\omega(t)\big|_{\Gamma} = 0. \tag{26}$$

Это означает, что функция $\omega(z)$ имеет в $D\backslash z_j, j = 1,2$ обобщенные производные $\frac{\partial^2\omega}{\partial z^{k-l}\partial \bar{z}^l}$ $(k = 1,2; l = 0,1,2)$ и $|z-z_1|^{\beta_1-2/p}|z-z_2|^{\beta_2-2/p}\omega(z) \in L^p(D)$ при $2 < p < \infty, 0 < \beta_j < 1$.

Пусть теперь $|z-z_1|^{\beta_1-2/p}|z-z_2|^{\beta_2-2/p}\omega(z) \in L^p(D)$ при $2 < p < \infty, 0 < \beta_j < 1$. Тогда $\frac{\omega(z)}{(z-z_1)(z-z_2)} \in L^p_{\Pi(\beta-2/p)}$, и, более того, непосредственными вычислениями можно показать, что все функции $\frac{\omega(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}$, обладающие в D обобщенными производными второго порядка, непрерывные в $\overline{D}$ и удовлетворяющие на Γ условию (26), единственным образом представляются в виде

$$\omega(z) = -\frac{2}{\pi}\iint_D \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)} \ln\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{\zeta-z}\right| f(\zeta)ds_\zeta,$$

где $f(z)$ — неизвестная функция из пространства $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D)$, $2 < p < \infty$, $0 < \beta_j < 1, j = 1,2$.

Тогда имеем

$$\frac{\partial\omega}{\partial z} = -\frac{2}{\pi}\iint_D \frac{2z-z_1-z_2}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)} \ln\left|\frac{1-z\overline{\zeta}}{\zeta-z}\right| f(\zeta)ds_\zeta -$$
$$-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}\left(\frac{1}{\zeta-z} - \frac{\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right) f(\zeta)ds_\zeta,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}\left(\frac{1}{\overline{\zeta}-\bar{z}} - \frac{\zeta}{1-\bar{z}\zeta}\right) f(\zeta)ds_\zeta,$$

$$\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial z} = -\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{(\bar{z}-\bar{z}_1)(\bar{z}-\bar{z}_2)}{(\overline{\zeta}-\bar{z}_1)(\overline{\zeta}-\bar{z}_2)}\left(\frac{1}{\zeta-z} - \frac{\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right) \overline{f(\zeta)}ds_\zeta,$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial z\partial\bar{z}}=f(z)-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{2z-z_1-z_2}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}\left(\frac{1}{\overline{\zeta}-\bar{z}}-\frac{\zeta}{1-\bar{z}\zeta}\right)f(\zeta)ds_\zeta,$$

$$\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z\partial\bar{z}}=\overline{f(z)}-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{2\bar{z}-\bar{z}_1-\bar{z}_2}{(\overline{\zeta}-\bar{z}_1)(\overline{\zeta}-\bar{z}_2)}\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\right)\overline{f(\zeta)}ds_\zeta,$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\bar{z}^2}=-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)}\left(\frac{1}{(\overline{\zeta}-\bar{z})^2}-\frac{\zeta^2}{(1-\bar{z}\zeta)^2}\right)f(\zeta)ds_\zeta,$$

$$\frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial z^2}=-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{(\bar{z}-\bar{z}_1)(\bar{z}-\bar{z}_2)}{(\overline{\zeta}-\bar{z}_1)(\overline{\zeta}-\bar{z}_2)}\left(\frac{1}{(\zeta-z)^2}-\frac{\overline{\zeta}^2}{(1-z\overline{\zeta})^2}\right)\overline{f(\zeta)}ds_\zeta.$$

Подставляя значения указанных производных в систему (25) и выделив вполне непрерывные слагаемые, мы для определения неизвестной функции $f(z)$ из пространства $L^p_{\Pi(\beta-2/p)}(D), 2<p<\infty, 0<\beta_j<1$, получим сингулярное интегральное уравнение с двумя фиксированными особенностями вида

$$a(z)f(z)+b(z)\overline{f(z)}-\frac{c(z)}{\pi}\iint_D\frac{e^{-2i(\gamma_1+\gamma_2)}}{(\overline{\zeta}-\bar{z})^2}f(\zeta)ds_\zeta-$$

$$-\frac{d(z)}{\pi}\iint_D\frac{e^{2i(\gamma_1+\gamma_2)}}{(\zeta-z)^2}\overline{f(\zeta)}ds_\zeta+\frac{c(z)}{\pi}\iint_D\frac{\zeta^2 f(\zeta)}{(1-\bar{z}\zeta)^2}ds_\zeta+$$

$$+\frac{d(z)}{\pi}\iint_D\frac{\overline{\zeta}^2\overline{f(\zeta)}ds_\zeta}{(1-z\overline{\zeta})^2}-\frac{1}{\pi}\iint_D\left(\frac{A_1(z)}{\zeta-z_1}+\frac{A_2(z)}{\zeta-z_2}\right)\frac{f(\zeta)}{\overline{\zeta}-\bar{z}}ds_\zeta-$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_D\left(\frac{B_1(z)}{\overline{\zeta}-\bar{z}_1}+\frac{B_2(z)}{\overline{\zeta}-\bar{z}_2}\right)\frac{\overline{f(\zeta)}}{\zeta-z}ds_\zeta+V=g(z),\quad z\in\overline{D}, \tag{27}$$

где V — вполне непрерывный оператор, $\gamma_j=\arg(\zeta-z_j)$, $j=1,2$, а коэффициенты $A_j(z), B_j(z)$ определяются по формулам

$$A_1(z)=a_1(z)+a(z)-c(z)\frac{\bar{z}-\overline{z_2}}{z_1-z_2},\quad A_2(z)=a_2(z)-a(z)+c(z)\frac{\bar{z}-\overline{z_1}}{z_1-z_2},$$

$$B_1(z)=b_1(z)+b(z)-d(z)\frac{z-z_2}{\bar{z}_1-\bar{z}_2},\quad B_2(z)=b_2(z)-b(z)+d(z)\frac{z-z_1}{\bar{z}_1-\bar{z}_2}.$$

Теперь, применив к уравнению (27) результаты теоремы 4, получим необходимые и достаточные условия нетеровости а также формулу для вычисления индекса задачи (25), (26).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответсвенность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

[1] Джангибеков Г., "Задача линейного сопряжения решений эллиптических систем дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами на плоскости", *ДАН*, **317**:4 (1991), 813-818. [Dzhangibekov G., "Zadacha lineynogo sopryazheniya resheniy ellipticheskikh sistem differentsial'nykh uravneniy s singulyarnymi koeffitsiyentami na ploskosti", *DAN*, **317**:4 (1991), 813-818 (in Russian)].

[2] Джангибеков Г., "Об одном классе двумерных сингуляярных интегральных операторов и его приложениях к краевым задачам для эллиптических систем уравнений на плоскости", *ДАН*, **330**:4 (1993), 415-417. [Dzhangibekov G., "Ob odnom klasse dvumernykh singulyayarnykh integral'nykh operatorov i yego prilozheniyakh k krayevym zadacham dlya ellipticheskikh sistem uravneniy na ploskosti", *DAN*, **330**:4 (1993), 415-417 (in Russian)].

[3] Джангибеков Г., Зарифбеков М., "О нетеровости и индексе задачи Дирихле для одной эллиптической системы второго порядка с сингулярными коэффициентами", *Вестник Нац. универ. Сер. матем.*, 2004, №1, 33-42. [Dzhangibekov G., Zarifbekov M., "O neterovosti i indekse zadachi Dirikhle dlya odnoy elliipticheskoy sistemy vtorogo poryadka s singulyarnymi koeffitsiyentami", *Vestnik Nats. univer. Cer. matem.*, 2004, №1, 33-42 (in Russian)].

[4] Джангибеков Г., Одинабеков Д. М., "Задача Неймана для общих эллиптичских систем дифференциальных уравнений второго порядка", *ДАН Республики Таджикистан*, **58**:2 (2015), 106-111. [Dzhangibekov G., Odinabekov D. M., "Zadacha Neymana dlya obshchikh ellipticheskikh sitem differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka", *DAN Respubliki Tadzhikistan*, **58**:2 (2015), 106-111 (in Russian)].

[5] Calderon A. P., Zygmund A., "On the existens of certain singular integrals", *Acta math.*, **88**:1-2 (1952), 85-139.

[6] Stein E. M., "Note on singular integrals", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**:2 (1957,), 250-254.

[7] Михайлов Л. Г., *Интегральные уравнения с ядром, однородными степени -1*, Дониш, Душанбе, 1966, 49 с. [Mikhaylov L. G., *Integral'nyye uravneniya s yadrom, odnorodnymi stepeni -1*, Donish, Dushanbe, 1966 (in Russian), 49 pp.]

[8] Бильман Б. М., "Об интегральных уравнениях с переменными пределами интегрирования, ядра которых имеют особеность типа однородной функции степени -1", *Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами*, Душанбе, 1969, 19-40. [Bil'man B. M., "Ob integral'nykh uravneniyakh s peremennymi predelami integrirovaniya, yadra kotorykh imeyut osobenost' tipa odnorodnoy funktsii stepeni -1", *Differentsial'nyye i integral'nyye uravneniya s singulyarnymi koeffitsiyentami*, Dushanbe, 1969, 19-40 (in Russian)].

[9] Джангибеков Г., "Об одном классе двумерных сингулярных интегральных операторов с несколькими фиксированными особенностями", *ДАН*, **322**:1 (1992), 22-27. [Dzhangibekov G., "Ob odnom klasse dvumernykh singulyarnykh integral'nykh operatorov s neskol'kimi fiksirovannymi osobennostyami", *DAN*, **322**:1 (1992), 22-27 (in Russian)].

[10] Симоненко И. Б.Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений, *Изв. АН. Сер. матем.*, **29**:4 (1965), 757-782. [Simonenko I. B.Novyy obshchiy metod issledovaniya lineynykh operatornykh uravneniy tipa singulyarnykh integral'nykh uravneniy, *Izv. AN. Ser. matem.*, **29**:4 (1965), 757-782 (in Russian)].

[11] Джангибеков Г., "О нетеровости и индексе некоторых двумерных сингулярных интегральных опеораторов", *ДАН*, **308**:5 (1989), 1037-1044. [Dzhangibekov G., "O neterovosti i indekse nekotorykh dvumernykh singulyarnykh integral'nykh opeoratorov", *DAN*, **308**:5 (1989), 1037-1044 (in Russian)].

[12] Михайлов Л. Г., "О некоторых многомерных интегральных операторах с однородными ядрами", *ДАН*, **176**:2 (1967), 263-265. [Mikhaylov L. G., "O nekotorykh mnogomernykh integral'nykh operatorakh s odnorodnymi yadrami", *DAN*, **176**:2 (1967), 263-265 (in Russian)].

[13] Бильман Б. М., "Об условиях полной непрерывности некоторых многомерных интегральных операторах с однородными ядрами", *ДАН СССР*, **197**:1 (1971), 14-17. [Bil'man B. M., "Ob usloviyakh polnoy nepreryvnosti nekotorykh mnogomernykh integral'nykh operatorakh s odnorodnymi yadrami", *DAN SSSR*, **197**:1 (1971), 14-17 (in Russian)].

[14] Duduchava R., "On multidimensional singular integral operators", *Journal of operator theory*, **11** (1984), 44-76.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2020. vol. 33. no. 4. P. 10–25. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

MSC 35C05, 35K20, 35R11 Research Article

On the solvability of some operators with several moved and fixed singularities

J. M. Odinabekov

Lomonosov Moscow State University in Dushanbe, 734003, Tajikistan, Dushanbe, Bokhtar street, 35

E-mail: jasur_79@inbox.ru

In this paper we consider two-dimensional singular operators over a bounded domain with coefficients of the integrals, containing an essential discontinuity at several points and operators with kernels having fixed singularities at several points of the type of homogeneous functions order −2. Such operators are widely used in various boundary value problems for elliptic systems of equations of the first and second order with singular coefficients on the plane (see eg. [1]-[4]). One such application is given at the end of this work. First of all set out the results of studying the solvability (Noethericity) of a two-dimensional singular integral equation with a coefficient of the integral containing an essential discontinuity at one point.

Key words: singular integral operator, index of operator, symbol of operator, Noetherity of an operator, elliptic system.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-10-25

Original article submitted: 18.11.2020 Revision submitted: 10.12.2020

For citation. Odinabekov J. M. On the solvability of some operators with several moved and fixed singularities. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **33**: 4, 10-25. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-10-25

Competing interests. The author declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. The work was carried out without financial support.