Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 33. № 4. С. 78-85. ISSN 2079-6641

УДК 330.04 Научная статья

Компартментальная модель экономико-социальной образовательной экосистемы территории

З. А. Нахушева, И. В. Ашинова

Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х. М. Бербекова, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

E-mail: z.nakhusheva@mail.ru, asin07@mail.ru

В статье рассматривается экономика вузов региональных территорий. На основе уравнения диффузии строится математическая модель генезиса экономико-социальной образовательной экосистемы.

Ключевые слова: экономико-социальная образовательная экосистема, математическая модель, уравнение диффузии, компартменты, лимитирующие факторы.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-78-85

Поступила в редакцию: 25.10.2020 В окончательном варианте: 28.11.2020

Для цитирования. Нахушева З. А., Ашинова И. В. Компартментальная модель экономико-социальной образовательной экосистемы территории // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2020. Т. 33. № 4. С. 78-85. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-78-85

Введение

Последнее время стало популярным рассматривать развитие высших учебных заведений как определенную вузовскую систему, в которой генезис происходит по аналогу живых динамических систем. Представим университет как сложную образовательную экосистему, которая развивается благодаря взаимодействию внутренних и внешних фактров. Отметим, что предлагаемая вниманию экономико-математическая модель является одной из первых математических моделей экономического развития современного высшего учебного заведения [1]. Опираясь на теорию триплекса генезиса университета новейшей формации, модель демонстрирует прямую зависимость от изменений входных параметров процесса экономического развития университета как из пространства знаний, так и из пространства инноваций и пространства согласия. От всех предшествующих моделей данная отличается математической платформой построения. Впервые при моделировании использованы непрерывные методы теории уравнений в частных производных, в том числе и дробного порядка [2]. Как уже отмечалось, при выявлении

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 19-010-00839.

синергетических взаимосвязей между экономическими параметрами, необходимыми для качественного функционирования всех трех пространств как региона, так и вузов территории, применена теория экосистем.

Введем понятие экономико-социальной образовательной экосистемы. **Экономико-социальная образовательная экосистема (ЭСОЭС)** - это инфраструктура взаимодействия власти, бизнеса, технологических лидеров региона, образовательных институтов профессионального образования региона для обеспечения совместного экономического, технологического и образовательного развития территории. Заметим, что в настоящий момент в теории образования рассматривалась только экосистема вуза (которую можно назвать внутренней по отношению к развитию территории системой).

Построим математическую модель роста экономики высшего учебного заведения, на который влияют внешние и внутренние факторы.

Экономическое развитие вуза зависит от многочисленных факторов, но лишь несколько из них можно назвать компартментальными. В качестве компартмент нашей модели выберем лимитирующие факторы. Отметим, что теория лимитирующих факторов ранее применялась лишь в процессе математического моделирования биологических экосистем, например, [3].

Развитие, в том числе и экономическое, предполагает наличие определенных факторов стимулирования определенного роста. Синергетический процесс взаимодействия указанных факторов назовем построением ЭСОЭС модели. Предположим, что генезис ЭСОЭС ограничен несколькими внешними и внутренними лимитирующими факторами. Отметим, что "лимитирующими" названы такие ресурсные факторы, которые потребляются моделируемым объектом из окружающей среды и внутренних запасов полностью, в силу чего при их отсутствии возобновления происходит остановка развития объекта. [4], с. 23.

Выберем лимитирующие факторы в качестве компартмент модели, которые опишем на основании закона сохранения потребляемых экосистемой вуза ресурсов с привлечением экстремальных принципов. Введем понятия экологического минимума и экологического максимума экономико-социальной образовательной экосистемы. Пусть мы имеем ограниченное количество векторов - различных факторов жизнеобеспечения ЭСОЭС, координаты каждого из которых конечны. В данном случае координатами факторов будут выступать значения данного фактора для конкретного вуза региона. В отношении нашего региона – размерность вектора будет равна трем, поскольку мы рассматриваем только государственные вузы, территориально расположенные в республике. Фактор, находящийся в минимуме, назовем лимитирующим. Лимитирующим фактором может быть не только недостаток, но и избыток определенных факторов, такой фактор будет называться максимумом ЭСОЭС. Диапазон между двумя этими величинами назовем по аналогии с живыми системами пределом толерантности. Согласно закону толерантности В. Шелфорда диапазон между минимумом и максимумом определяет область выносливости (толерантности) системы [3].

Модель толерантности, как правило, имеет вид купола. Анализ купола толерантности позволяет выделить такие закономерности, при которых определенные значения фактора создают наиболее благоприятные для жизнедеятельности системы условия. Эти условия называются оптимальными, а соответствующая им область на шкале факторов – оптимумом. Чем больше отклоняются значения факторов от оптимума, тем сильнее угнетается функционирование ЭСОЭС. Диапазон значений факторов за которыми нормальная жизнедеятельность ЭСОЭС становится невозможной назовем пределом выносливости.

Максимально и минимально переносимые значения фактора – критические точки, за пределами которых жизнедеятельность системы уже невозможна, и наступает распад системы. Перед построением модели был проведен анализ социально-экономической ситуации в регионе за прошедшие годы. Выявлены основные индексы социально-экономического развития региона, наиболее открыто влияющие на финансово-экономическое состояние высших учебных заведений, в том числе и в Кабардино-Балкарской Республике. Определено, что индексами, в нашем случае мы будем назвать их внешними, способными осуществлять давление на жизнедеятельность региональных вузов, являются в первую очередь: валовый региональный продукт, индекс промышленного производства, индекс потребительских цен, уровень безработицы, среднемесячная заработная плата по региону и т.д. [5].

Постановка задачи

На основании данных мониторинга эффективности деятельности вузов выявлены основные индикаторы финансовой и экономической деятельности регионального высшего учебного заведения, которые находятся в прямой зависимости от социально-экономического состояния территории. Проведен сравнительный анализ возможностей вузов КБР, определен регулятор рынка образовательных услуг (высшее образование) в регионе. В качестве первоначальных индикаторов вклада в экономическое развитие региона, назовем их внутренними индексами, выбраны: объем средств, который формируется университетами за счет налоговых отчислений, размер налога на доходы сотрудников вузов (НДФЛ), объем финансовых средств университета в расчете на численность приведенного контингента, платежеспособный спрос на высшее образование, траты студентов из других регионов на оплату обучения и проживание, отношение заработной платы профессорско-преподавательского состава к средней заработной плате по региону. Предположим, что способностью к развитию ЭСОЭС обладает только, если в ней образуется своеобразный синергетический системный морфоген (ССМ), своеобразный «метаболит» развития экосистемы ЭСОЭС. Пусть это будет, в нашем случае, функция $\upsilon = \upsilon(X,t)$ описывающая способность системы к развитию.

Опишем процесс синергии лимитирующих факторов с помощью уравнения диффузии:

$$\frac{\partial \upsilon(X,t)}{\partial t} = (\bigtriangledown, D(X,t) \bigtriangledown \upsilon(X,t)) + f(X,t), \tag{1}$$

здесь $\bigtriangledown$ – оператор набла, $(,)$ – скалярное произведение, $D(X,t)$ – коэффициент диффузии, $f(X,t)$ – функция описывающая источники вещества. В случае, когда D – константа, уравнение (1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial \upsilon(X,t)}{\partial t} = D \bigtriangleup \upsilon(X,t) + f(X,t), \tag{2}$$

где $\bigtriangleup = \bigtriangledown^2$ – оператор Лапласа.

Заметим, что если в рассматриваемой нами области отсутствуют источники вещества и диффузия во внешнюю среду, то уравнение (2) будет однородным, т.е. $f(X,t) = 0$. Если же в рассматриваемой области имеется наличие источников вещества с объемной плотностью распределения, то $f(X,t) \neq 0$. Обозначим через Ω $n-$мерный диапазон зоны толерантности, т.е. область, в которой наличие всех компартмент $X = x_i$, $i = 1,2,\ldots n$ позволяет вырабатывать так называемый ССМ, который в свою очередь развивает систему ЭСОЭС. Отметим, что x_i- i-й лимитирующий фактор.

Будем понимать, что если некая точка $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$ являющаяся совокупностью лимитирующих факторов принадлежит некоторой обозначенной выше области Ω (т.е. диапазону толерантности), то система развивается. Если же точка $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$ выходит на границу области, то срабатывает принцип лимитирующего фактора, т.е. рост морфогена останавливается и его значения становится недостаточно, чтобы система проявляла способность к развитию.

Не нарушая общности модели потребуем, чтобы значение уровня на границе толерантного диапазона равнялось нулю.

Данная интерпретация хорошо описывается заданием начальных условий в момент времени $t = 0$.

В результате получаем начально-краевую задачу для уравнения диффузии.

Задача. Найти непрерывное решение $\upsilon = \upsilon(X,t)$ для уравнения (1) при начальном условии

$$\upsilon(X,0) = \varphi(X) \tag{3}$$

и граничном условии υ на Σ равно нулю, где $\Sigma-$ граница зоны толернатности Ω.

Сложность предложенной модели генезиса ЭСОЭС состоит в необходимости большого числа экспериментальных данных – факторов внешних и внутренних. Несколько упростим модель и в качестве связанных между собой компартмент рассмотрим лимитирующие факторы: объем финансовых средств университета в расчете на численность приведенного контингента, платежеспособный спрос на высшее образование, траты студентов из других регионов на оплату обучения и проживание. Указанные факторы образуют множество благоприятных факторов $X = (x,y,z)$, однако, воздействие их на развитие ЭСОЭС неодинаковое.

Зона толерантности Ω в этом случае будет представлять собой некий параллелепипед с границами $x_a < x < x_b, y_a < y < y_b, z_a < z < z_b$, здесь константы с индексами a и b обозначают границы лимитирующих факторов, с индексом $a-$ удовлетворяющие принципу минимума, аналогу принципу Либиха, с индексом $b-$ принципу максимума Шелфорда.

Задача для функции $\upsilon = \upsilon(X,t)$ в случае трехмерного диапазона толерантности разрешима и выписывается в явном виде [6], с. 486.

Решение уравнения, с помощью которого моделируется процесс, существует и является единственным. Вследствие чего при моделировании появляется возможность подстановки исходных данных непосредственно в полученное решение.

Подмодель развития внутреннего экономического фактора

В качестве основы математической модели развития внутреннего, по отношению к вузу, экономического или социального фактора рассмотрим подмодель опирающуюся на уравнение Ферхюльста. Как мы уже говорили, рост экономического (или социального) фактора тем выше, чем больше текущий финансовый запас вуза. Однако рост ограничен емкостью ЭСОЭС. Если значение текущего фактора приближается к значению максимальной емкости среды, то прирост этого фактора, очевидно, устремляется к нулю. При близких к нулю значениях запаса емкости (т.е. начальных стадиях) темпы нарастания факора максимальны. Уравнение Ферхюльста имеет вид:

$$\frac{du}{dt} = [\varepsilon(t) - \lambda(t)u(t)]\,u(t), \tag{4}$$

где $\varepsilon(t)$ – коэффициент прироста фактора, $\lambda(t)$ -– коэффициент сопротивления среды, $u(t)$ -– прирост фактора в момент времени t.

Сопротивление среды -– сумма всех лимитирующих факторов ЭСОЭС, препятствующих реализации потенциала экономического или социального роста образовательной организации. Это разность между социально-экономическим потенциалом r_{max} и фактической скоростью роста r_{cool} экономико-социальнрых факторов в заданных условиях. Фиксируя точки X^* из множества диапазона толерантности Ω (т.е. устанавливая значения для каждой компартменты) мы можем рассмотреть функцию образования морфогена, как обратное значение коэффициента сопротивления среды, т.е.

$$\lambda(X^*,t) = \frac{1}{\upsilon(X^*,t)}. \tag{5}$$

Здесь и далее $\upsilon(X,t) \neq 0$ -– решение задачи. Положим, что коэффициент роста фактора прямо пропорционален скорости образования ССМ при конкретных значениях лимитирующих факторов из диапазона толерантности, тогда можно записать, что

$$\varepsilon(X^*,t) = \frac{\partial \upsilon(X^*,t)}{\partial t}. \tag{6}$$

Итак, если выразить зависимость внутреннего экономико-социального фактора от уровня СММ с учетом лимитирующих факторов, то уравнение (4) можно переписать

$$\frac{\partial u(X,t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial \upsilon(X,t)}{\partial t} - \frac{1}{\upsilon(X,t)}u(X,t)\right]u(X,t). \tag{7}$$

Данное уравнение уже не является обыкновенным дифференциальным уравнением, а представляет собой уравнение в частных производных первого порядка. Однако его непрерывное решение существует и при добавлении начальных данных, т.е. фактора в момент времени $t=0$ будет единственным.

Предполагая пористость моделируемой среды и ее фрактальность подчеркем, что именно учет фрактальной организации позволяет обнаружить детерминированную основу, на которую накладывается флуктуация (периодическое изменение) факторов экономической и социальной природы. Учтем указанные характеристики введением дробной производной. Уравнение (7) в этом случае запишется в виде:

$$D^{\alpha}_{0t}u(X,t) = [\varepsilon(X,t) - \lambda(X,t)u(X,t)]\,u(X,t), \tag{8}$$

где $\beta = const > 0$, D^{α}_{0t} – оператор Римана-Лиувилля порядка α, $0 < \alpha \leq 1$

$$D^{\alpha}_{0t}u(X,\eta) = \frac{\partial}{\partial t}D^{\alpha-1}_{0t}u(X,\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{u(x,\eta)}{(t-\eta)\alpha}d\eta, \tag{9}$$

$\Gamma(z)$ -– гамма-функция Эйлера, $\varepsilon(X,t) = \frac{\partial \upsilon(X,t)}{\partial t}$, $\lambda(X,t) = \frac{1}{\upsilon(X,t)}$.

Таким образом нами построена математическая подмодель развития внутреннего экономико-социального фактора ЭОЭС на базе уравнений (8), уравнения диффузии

$$\frac{\partial \upsilon(X,t)}{\partial t} = (\nabla, D(X,t)\nabla\upsilon(X,t)) + f(X,t), \tag{10}$$

(или (2)) с начальными условиями (3), граничном условии υ на Σ равно нулю, где Σ– граница зоны толернатности Ω, отражающими толерантные условия развития факторов.

Предварительная обработка экспериментальных данных

Для реализации построенной модели была проделана достаточно объемная работа по сбору, анализу и выбраковке полученных экспериментальных данных. Именно на основе экспериментальных данных выясняется значение коэффициента диффузии, а также некоторые другие числовые коэффициенты, которые используются в построенных модели и подмодели.

Предварительная статистическая обработка экспериментальных данных, необходима для выявления грубых данных, их выбраковки. Выбраковка экспериментального параметра производится из уже имеющегося массива экспериментальных значений проводится методом анализа на достоверность наибольшего и наименьшего элемента ряда экспериментальных данных, определения соответствующих процентных точек распределения Стьюдента, выбраковкой (отсевом) грубых данных. Распределение Стьюдента используется при проверке статистических гипотез при небольшом объёме выборки. Известно, что оценка расхождения между средней малой выборки и генеральной средней подчинена особому закону распределения. Модель осуществляет вычисление наибольшего (наименьшего) элемента данных, статистические характеристики, такие как дисперсия и моменты; соответствующие процентные (95 % и 99 %) точек t -– распределения Стьюдента, проводит анализ достоверности выбранного элемента, в случае необходимости делает отсев. Пусть $Y_1,...,Y_n$ – независимые случайные величины, нормально распределенные с математическим ожиданием μ и дисперсией σ_2. Для отсева грубых экспериментальных данных используется следующий алгоритм:

1. Вычисляется среднее значение $Y_s = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$;
2. Находится $Y_{max} = max\{Y_i\} - Y_s$, $Y_{min} = min\{Y_i\} - Y_s$;
3. Далее вычисляется $t = max\{Y_{\max}, Y_{\min}\}$, а затем и $\tau_1 = \frac{t}{Y_s}$;
4. Определяется 5 % и 0.1 % точек t_2, t_3 распределения Стьюдента по формуле;
5. Вычисляется $\tau_{0.05}$ и $\tau_{0.01}$ по формулам: $\tau_{0.05} = \frac{t_2\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-2+\tau_2^2}}$, $\tau_{0.01} = \frac{t_3\sqrt{n-1}}{\sqrt{n-2+\tau_3^2}}$.

6. Отсеиваются те величины, для которых $\tau_1 > \tau_{0.01}$. При этом оценка математического ожидания не равна в точности μ, а лишь колеблется вокруг этой величины. Разность истинного математического ожидания и рассчитанного на основе выборки, поделенная на масштабирующий коэффициент имеет распределение, которое называется распределением Стьюдента с n степенями свободы.

Компьютерная версия модели выполнена в среде "Visual Studio". При значительном упрощении в таких требованиях, как отсутствие источников вещества и диффузии во внешнюю среду, формировании только трех, указанных выше лимитирующих факторов, выбора постоянными коэффициентов в подмодели расчета режима орошения моделируемые результаты хорошо коррелируются с экспериментальными данными. Компьютерный эксперимент показал хорошую коррелируемость результатов моделирования и эмпирических данных, взятых из мониторинга эффективности вузов (http://indicators.miccedu.ru/monitoring/?m=vpo).

Список литература/References

[1] Нахушева З.А., Ашинова И.В., Кумышева Л.А., "Математическое моделирование экономического развития высшего учебного заведения формата УНИВЕРСИТЕТ 3.0", *Прорывное развитие экономики России: условия, инструменты, эффекты*, Сборник статей международной научно-практической конференции, 2018, 190–197. [Nakhusheva Z. A., Ashinova I. V., Kumysheva L. A., "Matematicheskoe modelirovanie jekonomicheskogo razvitija vysshego uchebnogo zavedenija formata UNIVERSITET 3.0", *Proryvnoe razvitie jekonomiki Rossii: uslovija, instrumenty, jeffekty*, Sbornik statej mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii, 2018, 190–197 (in Russian)].

[2] Нахушева З. А., Ашинова И. В., Гурфова Р. В., Машуков Х. В., "Экономико-математическая модель развития регионального университета формата 3.0", *Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики*, Сборник трудов международной научной конференции, 2019, 103–110. [Nakhusheva Z.A., Ashinova I.V., Gurfova R.V., Mashukov H.V., "Jekonomiko-matematicheskaja model' razvitija regional'nogo universiteta formata 3.0", *Sovremennye problemy prikladnoj matematiki, informatiki i mehaniki*, Sbornik trudov mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii, 2019, 103–110 (in Russian)].

[3] Нахушева З. А., "Компартментальная математическая модель роста биомассы сельскохозяйственной культуры", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2015, №4, 134–141. [Nakhusheva Z. A., "Kompartmental'naja matematicheskaja model' rosta biomassy sel'skohozjajstvennoj kul'tury", *Doklady Adygskoj (Cherkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, 2015, №4, 134–141 (in Russian)].

[4] Бродский А. К., *Экология*, КНОРУС, М., 2012. [Brodskii A. K., *Jekologija*, KNORUS, M., 2012 (in Russian)].

[5] Калмыкова А.М., Машуков Х.В., "Социально-экономические условия реализации системы регионального образования", *Вестник Кабардино-Балкарского госу-дарственного университета им. Х.М. Бербекова. Серия: Право, Экономика*, 2019, №4(12), 24–28. [Kalmykova A.M., Mashukov H.V., "Social'no-jekonomicheskie uslovija realizacii sistemy regional'nogo obrazovanija", *Vestnik Kabardino-Balkarskogo gosu-darstvennogo universiteta im. H.M. Berbekova. Serija: Pravo, Jekonomika*, 2019, №4(12), 24–28 (in Russian)].

[6] Тихонов А. Н., Самарский А. А., *Уравнения математической физики*, МГУ, М., 1999. [Tihonov A. N., Samarskij A. A., *Uravnenija matematicheskoj fiziki*, МГУ, М., 1999 (in Russian)].

MSC 35J25 Research Article

Compartmental model of economic and social educational ecosystem of the territory

Z. A. Nakhusheva, I. V. Ashinova

Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, 360004, Nalchik, Chernyshevskoqo st., 173, Russia.
E-mail: z.nakhusheva@mail.ru, asin07@mail.ru

The article examines the economics of universities in regional territories. Based on the diffusion equation, a mathematical model of the genesis of the economic and social educational ecosystem is constructed.

Key words: economic and social educational ecosystem, mathematical model, diffusion equation, compartments, limiting factors.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-78-85

Original article submitted: 25.10.2020 Revision submitted: 28.11.2020

For citation. Nakhusheva Z. A., Ashinova I. V. Compartmental model of economic and social educational ecosystem of the territory. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **33**: 4, 78-85. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-78-85

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Acknowledgments. The authors are deeply grateful to the referee for a number of comments that contributed to the improvement of the article.

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant No. 19-010-00839.