УДК 517.95 Научная статья

Об одной математической модели с обобщенным уравнением Мак-Кендрика–фон Ферстера

Ф. М. Лосанова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, ул. Шортанова 89А, 360000, Кабардино-Балкарская республика.
E-mail: losanovaf@gmail.com

В данной работе предлагается обобщение математической модели биологического процесса, характеризующего динамику численности популяции, с учетом изменения возраста x за фиксированное время t и изменения количества особей в разные периоды времени при фиксированном x. Рассмотрена нелокальная краевая задача с интегральным условием. Доказана теорема существования и единственности задачи.

Ключевые слова: оператор дробного дифференцирования, оператор Римана-Лиувилля, уравнение Мак-Кендрика–фон Ферстера.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-71-77

Поступила в редакцию: 10.11.2020 В окончательном варианте: 13.12.2020

Для цитирования. Лосанова Ф. М. Об одной математической модели с обобщенным уравнением Мак-Кендрика–фон Ферстера // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 33. № 4. С. 71-77. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-71-77

Введение

При исследовании динамики численности биологических популяций важным вопросом является определение основных причин и факторов, которые влияют на изменение их численности. Для изучения таких вопросов наиболее эффективным способом является разработка и анализ соответствующей математической модели. Однако математическое моделирование живых систем, является непростым делом, т.к. это сложные системы, обладающие индивидуальностью, способные размножаться, расти, умирать и т.д.

С помощью базовых моделей математической биологии можно описать некоторые качественные свойства живых систем, таких как рост, самоограничение роста, способность к переключениям - существование в двух или нескольких стационарных режимах для стационарных случаев ([1], с. 15). Для описания развития замкнутой популяции особей с учетом межвозрастных взаимодействий используется известное уравнение Мак-Кендрика–фон Ферстера вида [2], [3].

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования

Для моделирования сред с памятью в математическом моделировании биологических процессов становится наиболее актуальным применение аппарата дробного исчисления, который позволяет осуществить учет влияния биологического явления последействия на численность популяции или на ее биомассу ([4], с. 109).

В данной работе введение операторов дробного дифференецирования дает нам возможность определить изменение количества особей при фиксированном времени, а также изменение количества особей определенного возраста в разное время. Рассматривается обобщеное уравнение Мак-Кендрика–фон Ферстера вида

$$\partial_{0t}^{\beta}u(x,t)+\lambda\partial_{0x}^{\alpha}u(x,t)+c(x)u(x,t)=f(x,t), \quad 0<\alpha,\beta<1. \tag{1}$$

Уравнение вида (1) были рассмотрены многими авторами. Для линейного дифференциального уравнения вида (1) с постоянными коэффициентами решена задача Коши в прямоугольной области в работе [5]. Для уравнения (1) с оператором Римана-Лиувилля с переменными коэффициентами в работе [6] доказана теорема об однозначной разрешимости краевой задачи в прямоугольной области, а в работе [7] для того же уравнения доказаны теоремы существования и единственности решения задачи Коши в нелокальной постановке. В [8] рассмотрена краевая задача для уравнения в частных производных дробного порядка, не превосходящего единицу в области с криволинейной границей. В работе [9] для уравнения (1) с оператором Джрбашяна-Нерсесяна построено фундаментальное решение. При $\alpha=1$ в работе [10] была рассмотрена динамика популяции, основанная на возрастной модели, учитывающей эффект «насыщения», в работе [11] рассмотрена конечно-разностная модель, позволяющая описать возрастную структуру изолированной популяции. Также автором были рассмотрены различные краевые задачи для обобщенного уравнения Мак-Кендрика–фон Ферстера в работах [12] – [13].

Построение и исследование модели

В области $\Omega=\{(x,t):0<x<l,0<t<\infty\}$ рассмотрим математическую модель динамики численности популяции вида (1), которая при $\alpha=1$ и $\beta=1$ совпадает с уравнением Мак-Кендрика-фон Ферстера ([4], с. 120).

В уравнении (1) $u=u(x,t)$ интерпретируется как численность населения возраста $x\in(0,l)$ в момент времени $t>0$, $\partial_{0x}^{\alpha}u(x,t)$ - изменение количества особей в возрасте x при фиксированном t, $\partial_{0t}^{\beta}u(x,t)$ – изменение количества особей в разное время для фиксированного x, $\partial_{0x}^{\alpha},\partial_{0t}^{\beta}$ – это дробные производные (Герасимова-Капуто) [14], $f(x,t)$, $c(x)$ – заданные функции: $c(x)$ – функция смертности, $f(x,t)$ – описывает различные демографические процессы, $\lambda=const$ – статус изменения коэффициента.

Введем понятие регулярного решения.

Решение $u(x,t)$ уравнения (1) назовем *регулярным* в области Ω, если выполнены условия $u(x,t)\in C(\overline{\Omega})$, $\partial_{0x}^{\alpha}u(x,t),\partial_{0t}^{\beta}u(x,t)\in C(\Omega)$.

К уравнению (1) присоединим условие

$$u(0,t)+\int_{0}^{l}M(x)u(x,t)dx=\varphi(t), \qquad 0\leq t<\infty, \tag{2}$$

которое является уравнением рождаемости [3], где l - предельный возраст, $M(x)$ - функция рождаемости, $\varphi(t)$ - некоторая управляющая функция, характеризующая возможность внешнего влияния на динамику популяции.

Для учета возрастной структуры популяции необходимо задать начальное условие

$$u(x,0)=\tau(x), \qquad 0\leq x\leq l, \tag{3}$$

где $\tau(x)$ - начальное распределение популяции по возрастам, которое непрерывно на $[0,l]$.

Ставится следующая

Задача. *В области Ω требуется найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (3).*

Рассмотрим случай, когда функция смертности является фиксированным числом, т.е. $c(x)=C=const$.

Представление решения

Пусть $v=v(x,t)$ решение задачи

$$v_t(x,t)+\lambda\partial_{0x}^{\alpha}v(x,t)+Cv(x,t)=f^*(x,t), \tag{4}$$

$$v(0,t)+\int\limits_0^l M(x)v(x,t)dx=\varphi^*(t), \qquad 0\leq t<\infty, \tag{5}$$

$$v(x,0)=\tau(x), \qquad 0\leq x\leq l, \tag{6}$$

где $f(x,t)=f^*(x,t)A_t^{\beta,1-\beta}$ и $\varphi(t)=\varphi^*(t)A_t^{\beta,1-\beta}$.

Тогда из свойств преобразований A^{α} выполняется равенство [15]

$$u(x,t)=A_t^{\beta,1-\beta}v(x,t), \tag{7}$$

Нелокальные краевые задачи с интегральным условием вида (5) для уравнения дробной диффузии были рассмотрены в работах [16] – [17].

Сделав замену

$$v(x,t)=v_1(x,t)e^{-Ct}, \tag{8}$$

мы редуцируем задачу (4)–(6) к задаче

$$v_{1t}(x,t)+\lambda\partial_{0x}^{\beta}v_1(x,t)=f^*(x,t)e^{Ct}, \tag{9}$$

$$v_1(0,t)+\int\limits_0^l M(x)v_1(x,t)dx=e^{Ct}\varphi^*(t), \qquad 0\leq t<\infty, \tag{10}$$

$$v_1(x,0)=\tau(x)e^{Ct}, \qquad 0\leq x\leq l.$$

Решение задачи (9)-(11) было найдено в работе [12] и оно имеет вид

$$v_1(x,t) = \int_0^t \Psi(\eta)\frac{1}{t-\eta}e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\lambda\frac{x}{(t-\eta)^\alpha}\right)d\eta -$$

$$-\lambda\int_0^x \tau(\xi)e^t\frac{1}{x-\xi}e^{0,1}_{1,\alpha}\left(-\lambda\frac{x-\xi}{t^\alpha}\right)d\xi +$$

$$+\int_0^x\int_0^t f^*(\xi,\eta)e^{Ct}\frac{1}{t-\eta}e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\lambda\frac{x-\xi}{(t-\eta)^\alpha}\right)d\eta d\xi, \tag{12}$$

где $e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\frac{x-\xi}{(t-\eta)^\alpha}\right)$ функция Райта, ее свойства подробно изучены в работе [15].

$$\Psi(t) = F(t) - \int_0^t R(t-\eta)F(\eta)d\eta, \tag{13}$$

где $R(t-\eta)$ резольвента ядра $M_1(t-\eta)$, где

$$M_1(t-\eta) = \int_0^l M(\xi)e^{-Ct}\frac{1}{t-\eta}e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\lambda\frac{\xi}{(t-\eta)^\alpha}\right)d\xi,$$

$$F(t) = \varphi^*(t) + \lambda\int_0^l M(\xi)e^{-Ct}\int_0^\xi \tau(\xi_1)e^{-Ct}\frac{1}{\xi-\xi_1}e^{0,1}_{1,\alpha}\left(-\lambda\frac{\xi-\xi_1}{t^\alpha}\right)d\xi_1 d\xi -$$

$$-\int_0^l M(\xi)e^{-Ct}\int_0^\xi\int_0^t f^*(\xi_1,\eta)e^{Ct}\frac{1}{t-\eta}e^{1,0}_{1,\alpha}\left(-\lambda\frac{\xi-\xi_1}{(t-\eta)^\alpha}\right)d\eta d\xi_1 d\xi.$$

Возвращаясь к функции $v(x,t)$ с помощью (7), приходим к равенству

$$u(x,t) = A_t^{\beta,1-\beta}\left[e^{-Ct}v_1(x,t)\right].$$

Следовательно, из (12) мы получаем решение задачи (1) – (3), где $\Psi(t)$ определяется формулой (13)

$$u(x,t) = \int_0^t \Psi(\eta)w(x,t-\eta)d\eta + \lambda\int_0^x \tau(\xi)e^{Ct}w(x-\xi,t)d\xi +$$

$$+\int_0^x\int_0^t f(\xi,\eta)e^{Ct}w(x-\xi,t-\eta)d\eta d\xi, \tag{14}$$

где

$$w(x,t) = A_t^{\beta,1-\beta}\left[e^{-Ct}\frac{x^{\alpha-1}}{t}e^{1,0}_{1,\beta}\left(-\frac{x}{t^\beta}\right)\right].$$

Таким образом доказана

Теорема. *Пусть* $0 < \alpha, \beta < l$, $\tau(x) \in C[0,l]$, $\varphi(t) \in C[0,\infty)$, $f(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $f(x,t)$ *удовлетворяет условию Гёльдера хотя бы по одной из переменных и выполнено условие согласования*

$$\tau(0) + \int_0^l M(x)\tau(x)dx = \varphi(0).$$

Тогда, существует единственное регулярное решение уравнения (1) в области Ω, *удовлетворяющее граничным условиям (2) и (3) которое представимо в виде (16).*

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответсвенность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литература/References

[1] Ризниченко Г. Ю., *Лекции по математическим моделям в биологии (изд. 2-е, испр. и дополн.)*, Издательство РХД, 2011, 560 с. [Riznichenko G. Y., *Lektsii po matematicheskim modelyam v biologii (izd. 2-ye, ispr. i dopoln.)*, Izdatel'stvo RKHD, 2011 (in Russian), 560 pp.]

[2] McKendrik A. G., "Applications of mathematics to medical problems", *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **44**:1 (1926), 98-130.

[3] Von Foerster H., "Some remarks on changing populations", *The Kinetics of Cellular proliferation*, Grune and Stratton, New York, 1959, 382-407.

[4] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высш. шк., М., 1995, 301 с. [Nakhushev A. M., *Uravneniya matematicheskoy biologii*, Vyssh. shk., M., 1995 (in Russian), 301 pp.]

[5] Псху А.В., "Краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка", *Известия КБНЦ РАН*, 2002, №1(8), 76-78. [Pskhu A. V., "Krayevaya zadacha dlya differentsial'nogo uravneniya s chastnymi proizvodnymi drobnogo poryadka", *Izvestiya KBNTS RAN*, 2002, №1(8), 76-78 (in Russian)].

[6] Мамчуев М. О., "Краевая задача для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами", *Доклады АМАН*, **11**:1 (2009), 32-35. [Mamchuev M. O., "Krayevaya zadacha dlya uravneniya pervogo poryadka s chastnoy proizvodnoy drobnogo poryadka s peremennymi koeffitsiyentami", *Doklady AMAN*, **11**:1 (2009), 32-35 (in Russian)].

[7] Мамчуев М. О., "Задача Коши в нелокальной постановке для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами", *Доклады АМАН*, **11**:2 (2009), 21-24. [Mamchuev M.O., "Zadacha Koshi v nelokal'noy postanovke dlya uravneniya pervogo poryadka s chastnoy proizvodnoy drobnogo poryadka s peremennymi koeffitsiyentami", *Doklady AMAN*, **11**:2 (2009), 21-24 (in Russian)].

[8] Псху А.В., "О краевой задаче для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей", *Дифференц. уравн.*, **51**:8 (2015), 1076-1082. [Pskhu A. V., "O krayevoy zadache dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka v oblasti s krivolineynoy granitsey", *Differents. uravn.*, **51**:8 (2015), 1076-1082 (in Russian)].

[9] Богатырева Ф. Т., "Краевая задача для уравнения в частных производных с оператором дробного дифференцирования", *Доклады АМАН*, **17**:2 (2015), 17-24. [Bogatyreva F. T., "Krayevaya zadacha dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh s operatorom drobnogo differentsirovaniya", *Doklady AMAN*, **17**:2 (2015), 17-24 (in Russian)].

[10] Кайгермазов А. А., Кудаева Ф. Х., "Стационарные состояния обобщенной популяционной модели Вейбулла", *Южно – Сибирский научный вестник*, 2015, №1(19), март, 10-14.

[Kaygermazov A. A., Kudayeva F. KH., “Statsionarnyye sostoyaniya obobshchen-noy populyatsionnoy modeli Veybulla”, *Yuzhno – Sibirskiy nauchnyy vestnik*, **17**:1(19), mart (2015), 10-14 (in Russian)].

[11] Ковалева М. О., “Возрастная структура изолированной популяции”, *Сборник трудов I Всероссийского конгресса молодых ученых. Спб: НИУ ИТМО*, 2012, 15-20. [Kovaleva M. O., “Vozrastnaya struktura izolirovannoy populyatsii”, *Sbornik trudov I Vserossiyskogo kongressa molodykh uchenykh. Spb: NIU ITMO*, 2012, 15-20 (in Russian)].

[12] Лосанова Ф. М., Кенетова Р. О., “Нелокальная задача для обобщенного уравнения Мак-Кендрика – фон Ферстера с оператором Капуто”, *Нелинейный мир*, **16**:1 (2018), 49-53. [Losanova F. M., Kenetova R. O., “Nelokal’naya zadacha dlya obobshchennogo uravneniya Mak-Kendrika – fon Ferstera s operatorom Kaputo”, *Nelineynyy mir*, **16**:1 (2018), 49-53 (in Russian)].

[13] Кенетова Р. О., Лосанова Ф. М., “О нелокальной краевой задаче для обобщенного уравнения Мак-Кендрика-Фон Ферстера”, *Известия КБНЦ РАН*, 2017, №2 (76), 49-53. [Kenetova R. O., Losanova F. M., “O nelokal’noy krayevoy zadache dlya obobshchennogo uravneniya Makkendrika-Fon Ferstera”, *Izvestiya KBNTS RAN*, 2017, №2 (76), 49-53 (in Russian)].

[14] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 1995, 272 с. [Nakhushev A. M., *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye*, Fizmatlit, M., 2003 (in Russian), 272 pp.]

[15] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с. [Pskhu A. V., *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka*, Nauka, M., 2005 (in Russian), 199 pp.]

[16] Лосанова Ф. М., “Задача с интегральным условием для уравнения дробной диффузии с оператором Капуто”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2016, №4-1(16), 38-44. [Losanova F. M., “Zadacha s integral’nym usloviyem dlya uravneniya drobnoy diffuzii s operatorom Kaputo”, *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, 2016, №4-1(16), 38-44 (in Russian)].

[17] Лосанова Ф. М., “Задача с нелокальным смещением для уравнения дробной диффузии”, *Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер.*, **24**:3 (2018), 35-40. [Losanova F. M., “Zadacha s nelokal’nym smeshcheniyem dlya uravneniya drobnoy diffuzii”, *Vestnik. SamgU. Yestestvennonauchnaya. ser.*, **24**:3 (2018), 35-40 (in Russian)].

MSC 26A33 Research Article

A mathematical model with the generalized McKendrick–von Foerster equation

F. M. Losanova

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik.
E-mail: losanovaf@gmail.com

In this paper, we propose a generalization of the mathematical model of a biological process that characterizes the dynamics of the population size, taking into account the change in age x for a fixed time t and changes in the number of individuals in different periods of time for a fixed x. A nonlocal boundary value problem with an integral condition is considered. The theorem of existence and uniqueness of the problem is proved.

Key words: fractional differentiation operator, Rieman-Liouville operator, McKendrick–von Foerster equation.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-71-77

Original article submitted: 30.04.2020 Revision submitted: 02.06.2020

For citation. Losanova F. M. A mathematical model with the generalized McKendrick–von Foerster equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **33**: 4, 71-77. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-71-77

Competing interests. The author declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors