

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.958 + 550.3 + 551.5

Научная статья

Моделирование электро-динамических процессов при самоорганизации фрактально-конвективных облачных структур

Т. С. Кумыков

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000,
г. Нальчик, ул. Шортанова 89 а
E-mail: macist20@mail.ru

В работе рассмотрена модель электро-динамического процесса возникновения больших потенциалов на фронте кристаллизации при самоорганизации конвективных облачных структур, в котором учитывается фрактальность облачной среды. В аналитическом виде найдено решение уравнения модели. С помощью численных расчетов показано зависимость разности потенциала от фрактальности среды и зависимость уровня фрактальной зоны от радиуса частицы.

Ключевые слова: потенциал, кристаллизация капель, фрактальная среда, математическая модель.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-63-70

Поступила в редакцию: 14.11.2020

В окончательном варианте: 11.12.2020

Для цитирования. Кумыков Т.С. Моделирование электро-динамических процессов при самоорганизации фрактально-конвективных облачных структур // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 33. № 4. С. 63-70. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-63-70

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Кумыков Т.С., 2020

Введение

Известно, [1] что облака относятся к нерегулярным самоафинным фракталам, и процессы, протекающие в такой среде, описываются дифференциальными уравнениями, содержащими производные дробного порядка. Такой подход позволяет неявно включать дополнительные факторы взаимодействия физической системы [2]. Одним из таких факторов является фрактальность облачной среды. Фрактальная среда представляет собой среду, распределенную в пространстве, массовая размерность которой меньше размерности заполняемого пространства. Учет этого фактора принципиально меняет уравнения динамики атмосферных процессов, превращая их в дифференциальные уравнения дробного порядка.

Многие физические процессы в облаках либо вообще игнорируются, либо учитываются весьма приближенно. В частности, пока еще мало учитываются при моделировании электрические процессы в облаках, не говоря уже о влиянии

Финансирование. Работа выполнялась без финансовой поддержки

фрактальности среды. Лабораторные исследования показывают, что большинство микрофизических процессов протекают иначе в присутствии электрических полей. Электрические поля и заряды на частицах сказываются на условиях конденсации пара, коэффициенте захвата частиц, разрушении капель, вероятности их замерзания. Между каплями возникает сила притяжения, и их столкновения становятся более вероятными, если они несут электрические заряды. При этом притягиваются не только разноименные частицы, но и нейтральные к заряженным.

Поэтому большой интерес представляет теоретическое исследование возникновения больших потенциалов в самоорганизующихся облачных структурах, в которых учитываются фрактальность среды.

Исследованию разделения зарядов при кристаллизации водных растворов посвящены многие работы [3]-[8] в которых показаны образования разности потенциалов между твердой и жидкой фазой. Были предприняты ряд попыток теоретического объяснения этого явления, основанных в конечном итоге на диффузионном механизме разделения зарядов.

В работе [9] показано, что диффузия ионов не может привести к возникновению больших потенциалов на фронте кристаллизации и что это явление до сих пор не получило удовлетворительного объяснения.

В настоящей работе с помощью аппарата дробного интегро-дифференцирования проводится моделирование фрактально-динамических процессов, в частности возникновение больших потенциалов на фронте кристаллизации при самоорганизации конвективных облачных структур, в котором учитывается фрактальность облачной среды.

Постановка и решение задачи

Исходя из фрактальности облачной среды используя производную по Капуто $\partial_{at}^\alpha u(t) = \text{sign}^n(a-t) D_{at}^{\alpha-n} \frac{\partial^n u(t)}{\partial t^n}$, $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in N$, где D_{at}^α — оператор дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля, которая определяется следующим образом:

$$D_{at}^\alpha u(t) = \begin{cases} \frac{\text{sign}(t-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{u(s) ds}{|t-s|^{\alpha+1}}, & \alpha < 0, \\ u(t), & \alpha = 0, \\ \text{sign}^n(t-a) \frac{\partial^n}{\partial t^n} D_{at}^{\alpha-n} u(t), & n-1 < \alpha \leq n, n \in N, \end{cases}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, было найдено зависимость заряда капель и пузырьков от их размеров, содержащихся в каплях [10, 11] и получено обобщенное уравнение динамики электрического поля, возникающее при разделении зарядов во фрактальной облачной капле.

По аналогии рассмотрим процесс кристаллизации облачных капель. При соударении переохлажденных облачных капель с градинами и частицами крупы температура капель повышается до нуля градусов. В момент повышения температуры капель смесь воздуха в каплях становится пересыщенным, причем степень пересыщения зависит от температуры облачной среды. С другой стороны, согласно работе [12], пузырьки в воде начинают зарождаться в зависимости от степени ее чистоты, при пересыщениях 1.1-1.4. Следовательно, при столкновении

переохлажденных капель с поверхностью градин при температурах ниже -4°C внутри капель всегда должны появляться пузырьки, которые зарождаются на мельчайших частичках пыли, содержащиеся в облачной воде в большом количестве. В процессе намерзания капель эти пузырьки вместе с другими посторонними примесями вытесняются из зоны кристаллизации, образуя коллоидные частицы, и переходят в окружающий воздух. При этом газовые пузырьки и частицы примесей, в зависимости от природы последних, могут адсорбировать ионы или одного знака, или противоположных знаков.

Интенсивное выделение воздуха при замерзании переохлажденных капель наблюдались в работах [13]–[20].

При медленной кристаллизации капли, газ, вытесняющийся из объема растущего льда, отводится от фронта кристаллизации и практически перед фронтом кристаллизации не зарождаются пузырьки, и поэтому сосредоточим внимание на электрокинетических явлениях, связанных с возникновением значительного количества пузырьков газа перед фронтом кристаллизации.

Известно [13], что размер и заряд воздушных пузырьков в облачных каплях с учетом фрактальности среды определяются следующим образом

$$a(t) = a_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha), q_r(t) = nq_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha),$$

где a_0 — размер пузырька в начальный момент времени, n - количество пузырьков, q_0 - заряд пузырька в начальный момент времени, $E_{\alpha,1}(kt^\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^i t^{\alpha i}}{\Gamma(1 + \alpha i)}$ — функции типа Миттаг-Леффлера, $k = 2.4 \frac{\varphi p^2}{\lambda p_0 \sigma}$, φ - пересыщение, p — давление внутри пузырька, p_0 — атмосферное давление, σ — поверхностное натяжение воды, $\lambda = \text{const} > 0$.

Свойство фрактальности учитывается через феноменологический параметр α [21], а степенной множитель t^α возникает в различных физических характеристиках процессов во фрактальных средах, к каковым и относятся грозовые облака.

При движении фронта кристаллизации вместе со смесью воздуха переносятся в лед их заряды, а компенсирующий заряд остается в жидкой части.

Тогда поток электричества, обусловленный движением пузырьков, относительно фронта кристаллизации во фрактальной облачной среде будет

$$j(t) = vn\xi a = vn\xi a_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha), \tag{1}$$

где ξ — электрокинетический потенциал, v — скорость роста льда.

Закон изменения заряда льда можно записать в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = j - \delta E(t), \tag{2}$$

где δ — проводимость льда, $E(t)$ — электрическое поле, возникающее при разделении зарядов.

Принимая во внимание фрактальность облачной среды и что $\frac{\partial Q}{\partial t} = \left(\frac{\epsilon_l}{4\pi}\right) \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right)$, запишем

$$\left(\frac{\epsilon_l}{4\pi}\right) \left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) + \delta E(t) = vn\xi a_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha), \tag{3}$$

где $\epsilon_{\text{л}}$ — диэлектрическая постоянная для льда.

Решение уравнения (2), удовлетворяющее условию $E(0) = 0$ имеет вид

$$E(t) = \frac{vn\xi a_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha)}{\delta} \left[1 - \exp\left(\frac{4\pi\delta}{\epsilon_{\text{л}}}t\right) \right].$$

Разность потенциалов, которая возникает на электродах в системе твердая-жидкая фаза, будет с учетом фрактальности среды

$$\Delta\varphi = E(t)d = \frac{vn\xi a_0 d E_{\alpha,1}(kt^\alpha)}{\delta} \left[1 - \exp\left(\frac{4\pi\delta}{\epsilon_{\text{л}}}t\right) \right], \quad (4)$$

где $d = vt$ — толщина образующегося льда.

Из формулы (4) следует, что $\Delta\varphi$ существенно зависит от скорости роста льда, фрактальности среды и дисперсности пузырьков.

Оценить концентрацию n можно лишь приближенно, поэтому предполагая, что весь газ, вытесняющийся из зоны кристаллизации, превращается в пузырьки со средним радиусом a и учитывая зависимость давления газа внутри пузырька от его радиуса и фрактальность среды, получим

$$n = \frac{3\gamma}{4\pi a_0^3 (E_{\alpha,1}(kt^\alpha))^3 \left[1 + \frac{2\sigma}{pa_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha)} \right]},$$

где γ — растворимость воздуха.

Подставляя значение концентрации в (4), при $t \gg \tau_{\text{л}} = \frac{\epsilon_{\text{л}}}{4\pi}$ — время релаксации во льду, получим

$$\Delta\varphi = \frac{3\gamma v^2 t \xi p}{4\pi \delta a_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha) [pa_0 E_{\alpha,1}(kt^\alpha) + 2\sigma]}. \quad (5)$$

Подставляя характерные значения параметров, получаем, что величина $\Delta\varphi = 1.8t$.

Анализ полученных результатов

На рис. 1 и рис. 2 представлены расчетные кривые, определяющие разность потенциала в зависимости от различных значений параметров t и α согласно формулам (5) с учетом того, что $0 < \alpha < 1$.

Отсюда видно, что с увеличением показателя α до некоторого момента наблюдается рост разности потенциалов, а после перехода через фрактальную зону, происходит замедление процесса, который влечет к снижению величины потенциала при кристаллизации облачных капель. Это означает, что показатель α отвечает за интенсивность процесса. Если среда фрактальная, то процесс протекает медленнее, чем в аналогичной сплошной среде, о чем свидетельствуют расчетные кривые на обеих рисунках. Также заметна и роль размера пузырьков, выходящих при кристаллизации капли, где слева на рис.2. а) это размер пузырька соответствующий $a_0 = 10^{-6}$ м, а справа б) соответствует размеру $a_0 = 10^{-5}$ м. Можно отметить, что фрактальная зона снижается при уменьшении радиуса.

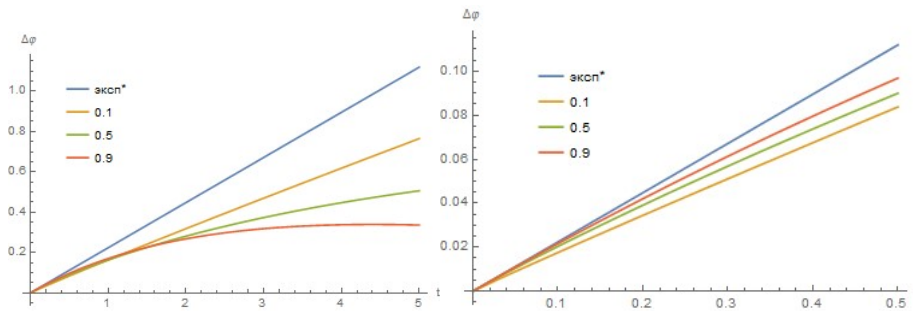


Рис. 1. Разность потенциала в зависимости от различных значений параметров t и α при $a_0 = 10^{-6}$ м.

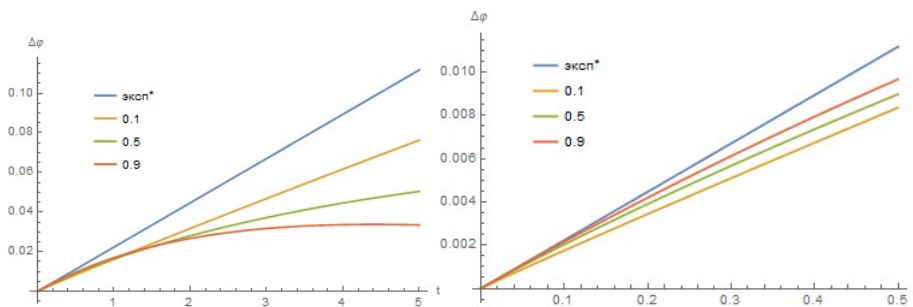


Рис. 2. Разность потенциала в зависимости от различных значений параметров t и α при $a_0 = 10^{-5}$ м.

Заключение

В заключение можно отметить, что грозо-градовые процессы тесно связаны с фрактальной структурой среды подтверждением которого являются результаты данной работы. Показано, влияние фрактальной структуры на электрические процессы в облаках, в частности показано влияние порядка дробной производной по времени в законе изменения заряда льда, связанное с фрактальной размерностью среды на возникновение больших потенциалов при кристаллизации капель. Таким образом, за счет рассмотренного выше механизма скачок потенциала на фронте кристаллизации может достигать больших значений, в которой фрактальность облачной среды играет существенную роль.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литература/References

[1] Кумыков Т. С., “Исследование влияния фрактальности среды на механизмы роста облачных частиц”, *Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики» и XIV Школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи современные проблемы анализа и информатики»*, Терскол, КБР, 2016, 172–173. [Kumykov T. S., “Issledovanie vliyaniya fraktal’nosti sredy na mekhanizmy rosta oblachnykh chastits”, *Materialy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Aktual’nye problemy prikladnoy matematiki i informatiki» i XIV Shkoly molodykh*

- uchenykh «Nelokal'nye kraevye zadachi sovremennye problemy analiza i informatiki», Terskol, KBR, 2016, 172–173 (in Russian)].*
- [2] Шогенов В. Х. и др., “Дробные производные: интерпретация и некоторые применения в физике”, *Сообщения объединенного института ядерных исследований*, Дубна, 1997, 20. [Shogenov V. Kh. at all., “Drobnnye proizvodnye: interpretatsiya i nekotorye primeneniya v fizike”, *Soobshcheniya ob"edinennogo instituta yadernykh issledovaniy*, Dubna, 1997, 20 (in Russian)].
- [3] Workman E. J., Reynolds S. E., *Phys. Rev.*, **78** (1950), 254-260.
- [4] Ribeiro J. C., *An. Acad. Brasil Cienc.*, **22** (1950), 325.
- [5] Качурин Л. Г. и др., “Экспериментальное исследование электрического явления, возникающего при кристаллизации слабых водных растворов”, *ДАН СССР*, **174**:5 (1967), 1122-1125. [Kachurin L. G. at all., “Eksperimental'noe issledovanie elektricheskogo yavleniya, vznikayushchego pri kristallizatsii slabykh vodnykh rastvorov”, *DAN SSSR*, **174**:5 (1967), 1122-1125 (in Russian)].
- [6] Gill E.W. Brit. J., *Appl. Phys., Suppl.*, **2** (1953), 16.
- [7] Imyanitov I. M., Mordovina L. S., “О причине возникновения больших потенциалов в процессе замерзания некоторых водных растворов”, *Dokl. AN SSSR*, **190**:3 (1970), 632 (in Russian).
- [8] Френкель Я. И., *Собрание избранных трудов*. Т. 2, Наука, М.-Л., 1958, 538-567 с. [Frenkel' Ya.I., *Sobranie izbrannykh trudov*. V. 2, Nauka, M.-L., 1958 (in Russian)].
- [9] Жекамухов М. К., Камбиев М. М., “Об одном возможном механизме больших потенциалов при кристаллизации водных растворов”, *ЖТФ*, 1984, № 11, 2884-2886. [Zhekamukhov M. K., Kambiev M. M., “Ob odnom vozmozhnom mekhanizme bol'shikh potentsialov pri kristallizatsii vodnykh rastvorov”, *JTF*, 1984, № 11, 2884-2886 (in Russian)].
- [10] Кумыков Т. С., Паровик Р. И., “Математическое моделирование закона изменения заряда облачных капель во фрактальной среде”, *Вестник КРАУНЦ, Физико-математические науки*, 2015, № 1, 12–17. [Kumukov T. S., Parovik R. I., “Mathematical modeling of the law of cloud droplet charge change in fractal environment”, *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, **10**:1 (2015), 11-15].
- [11] Кумыков Т. С., “Моделирование динамики заряда пузырьков во фрактальных облачных каплях”, *Известия КБНЦ РАН*, 2015, № 6(1), 23–27. [Kumukov T. S., “Modelirovanie dinamiki zaryada puzyr'kov vo fraktal'nykh oblachnykh kaplyakh”, *Izvestiya KBNTs RAN*, 2015, № 6(1), 23–27 (in Russian)].
- [12] Brownscombe J. L., Hallett J., “Experimental and field studies of precipitation particles formed by the freezing of supercooled water”, *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 1967, № 398(93), 455–473.
- [13] Iribarne J. V., Mason B. J., “Electrication accompanying the bursting of bubbles in water and dilute aqueous solutions”, *Trans. Faraday Soc.*, **537(63)** (1967), 143–151.
- [14] Dinger J. E., Gunn R., “Electrical effects associated with a change of state of water”, *Terr. Magn Atmos. Elect.*, 1946, № 4(51), 477–496.
- [15] Мучник В. М., Рудько Ю. С., “Особенности замерзания переохлажденных капель воды”, *УкрНИРМП*. Т. 26, 1961, 64–73. [Muchnik V.M., Rud'ko Yu.S., “Osobennosti zamerzaniya pereokhlazhdennykh kapel' vody”, *UkrNIRMP*. V. 26, 1961, 64–73 (in Russian)].
- [16] Аджиев А. Х., Тамазов С. Т., “Разделение электрических зарядов при кристаллизации капель воды”, *Метеорология и гидрология*, 1987, № 8, 57–62. [Adzhiev A. Kh., Tamazov S. T., “Razdelenie elektricheskikh zaryadov pri kristallizatsii kapel' vody”, *Meteorologiya i gidrologiya*, 1987, № 8, 57–62 (in Russian)].
- [17] Аджиев А. Х., Тамазов С. Т., “Разделение электрических зарядов в грозах”, *Активные воздействия на гидрометеорологические процессы*, Труды Всесоюзной конференции, Гидрометеоздат, Л., 1990, 428-431. [Adzhiev A. Kh., Tamazov S. T., “Razdelenie elektricheskikh zaryadov v grozakh”, *Aktivnye vozdeystviya na gidrometeorologicheskie protsessy*, Trudy Vsesoyuznoy konferentsii, Hidrometeoizdat, L., 1990, 428-431 (in Russian)].
- [18] Качурин Л. Г., Бекряев В. И., “Исследования процесса электризации кристаллизующейся воды”, *ДАН СССР*, **130**:1 (1960), 57–60. [Kachurin L. G., Bekryaev V. I., “Issledovaniya protsessa elektrizatsii kristallizuyushcheysya vody”, *DAN SSSR*, **130**:1 (1960), 57–60 (in Russian)].

- [19] Бекряев В. И., “Электризация кристаллизующихся водных аэрозолей как механизм генерации грозового электричества”, *Труды ЛГМИ*, 1964, № 26, 295–308. [Bekryaev V. I., “Elektrizatsiya kristallizuyushchikhsya vodnykh aerorozley kak mekhanizm generatsii grozovogo elektrichestva”, *Trudy LGMI*, 1964, № 26, 295–308 (in Russian)].
- [20] Жекамухов М. К., *Некоторые проблемы формирования структуры градин*, Гидрометеоздат, Л., 1982, 173 с. [Zhekamukhov M. K., *Nekotorye problemy formirovaniya struktury gradin*, Gidrometeoizdat, L., 1982 (in Russian), 173 pp.]
- [21] Рехвиашвили С. Ш., “К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования”, *Нелинейный мир*, 5:4 (2004), 194-197. [Rekhviashvili S. Sh., “K opredeleniyu fizicheskogo smysla drobnogo integro-differentsirovaniya”, *Nelineynyy mir*, 5:4 (2007), 194-197 (in Russian)].

Modeling of electrodynamic processes in self-organization of fractal-convective cloud structures

T. S. Kumykov

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 360004 Nalchik,
Shortanova st., 89 a, Russia
E-mail: macist20@mail.ru

The paper considers a model of fractal-dynamic process of occurrence of large potentials on the crystallization front in the self-organization of convective cloud structures, which takes into account the fractality of the cloud environment. The solution of the model equation is found in the analytical form. With the help of numerical calculations demonstrate the dependence of the potential difference from the fractality of environment and the dependence of the level of the fractal of the radius of the particle.

Key words: potential, droplet crystallization, fractal medium, mathematical model.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-63-70

Original article submitted: 14.11.2020

Revision submitted: 11.12.2020

For citation. Kumykov T. S. Modeling of electrodynamic processes in self-organization of fractal-convective cloud structures. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **33**: 4, 63-70. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-63-70

Competing interests. The author declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Kumykov T. S., 2020

Funding. The work was carried out without financial support.