УДК 517.95 Научная статья

Вторая краевая задача в полуполосе для B-параболического уравнения с производной Герасимова-Капуто по времени

Ф. Г. Хуштова

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: khushtova@yandex.ru

В работе исследуется вторая краевая задача в полуполосе для параболического уравнения с оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, и частной производной Герасимова–Капуто по времени. Доказаны теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи. Представление решения найдено в терминах интегрального преобразования с функцией Райта в ядре. Единственность решения доказана в классе функций быстрого роста. При частных значениях параметров, содержащихся в рассматриваемом уравнении, последнее совпадает с классическим уравнением диффузии.

Ключевые слова: дробная производная, оператор Бесселя, функция Райта, функция Бесселя.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-37-50

Поступила в редакцию: 16.11.2020 В окончательном варианте: 10.12.2020

Для цитирования. Хуштова Ф. Г. Вторая краевая задача в полуполосе для B-параболического уравнения с производной Герасимова-Капуто по времени // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 33. № 4. С. 37-50. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-37-50

Введение

Пусть D_{0y}^{α} — *оператор дробного дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля* порядка α, который определяется следующим образом [1], [2], [3]:

$$D_{0y}^{\alpha}g(y) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^y \frac{g(t)}{(y-t)^{\alpha+1}}dt, \quad \alpha < 0,$$

$$D_{0y}^{\alpha}g(y) = g(y), \quad \alpha = 0,$$

Финансирование. Работа выполнялась без финансовой поддержки

$$D_{0y}^{\alpha}g(y) = \frac{d^n}{dy^n} D_{0y}^{\alpha-n} g(y), \quad n-1 < \alpha \leqslant n, \ n \in N.$$

Регуляризованная дробная производная (производная Капуто) определяется равенством [1], [3]

$$\partial_{0y}^{\alpha} g(y) = D_{0y}^{\alpha-n} g^{(n)}(y), \quad n-1 < \alpha \leqslant n, \ n \in \mathbb{N},$$

и связана с производной Римана–Лиувилля соотношением

$$\partial_{0y}^{\alpha} g(y) = D_{0y}^{\alpha} g(y) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} y^{k-\alpha}, \quad n-1 < \alpha \leqslant n, \ n \in \mathbb{N}.$$

В случае, когда порядок дифференцирования $\alpha = n$ является целым, справедливы равенства

$$D_{0y}^{n} g(y) = \partial_{0y}^{n} g(y) = g^{(n)}(y), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Производная Капуто в научной литературе также известна под названием *производной Герасимова–Капуто* [4], [5].

Пусть

$$B_x = x^{-b} \frac{d}{dx}\left(x^b \frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{b}{x}\frac{d}{dx}, \quad b = \text{const},$$

– *оператор Бесселя*.

В области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < \infty, \ 0 < y < T\}$ рассмотрим уравнение

$$\mathbf{L} u(x,y) \equiv B_x u(x,y) - \partial_{0y}^{\alpha} u(x,y) = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) при $\alpha = 1$ совпадает с уравнением

$$u_{xx}(x,y) + \frac{b}{x} u_x(x,y) - u_y(x,y) = 0, \tag{2}$$

названным И. А. Киприяновым B-параболическим уравнением [6], [7]. Такого рода уравнение, а именно

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varkappa \Delta_a u, \ \ \varkappa = \text{const} > 0,$$

где

$$\Delta_a = x^{1-a} \frac{\partial}{\partial x} x^{a-1} \frac{\partial}{\partial x}$$

– «a-мерный оператор Лапласа» в работе А. М. Нахушева [1, с. 230] называется уравнением «теплопроводности на фрактале» или уравнением «аномальной диффузии».

Дифференциальные уравнения, содержащие оператор Бесселя, наиболее подробно и полно исследованы в работах И. А. Киприянова и его учеников [6], [7]. Достаточно большую библиографию по параболическим уравнениям, содержащим оператор Бесселя, можно найти также в работе [8].

В случае, когда $b = 0$, $0 < \alpha < 2$, уравнение (2) совпадает с диффузионно-волновым уравнением дробного порядка. Различные краевые задачи для него, а также для многомерных его обобщений, богато и обстоятельно исследованы в работах многих авторов. Подробную библиографию можно найти, например, в работах [3], [9]-[12].

Интерес к изучению уравнений вида (2) вызван их приложениями при решении диффузионных задач физики, химии и других прикладных наук [13]-[15].

Постановка задачи

В этой работе будем полагать $|b| < 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω будем называть функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω, и такую, что $u \in C(\overline{\Omega})$, $B_x u$, $\partial_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega)$, $\overline{\Omega}$ – замыкание области Ω.

Задача 1. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; 0 < x < \infty, \tag{3}$$

$$\lim_{x \to 0} x^b u_x(x,y) = 0, \;\;\; 0 < y < T, \tag{4}$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция.

Вспомогательные сведения

Приведём некоторые сведения из теории специальных функций и теории интегральных преобразований, которые понадобятся для изложения результатов работы.

Функция $\Gamma(s)$, определяемая интегралом

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

называется *гамма-функцией* или *эйлеровским интегралом второго рода* [16], [17].

Функция $I_\nu(z)$, определяемая рядом

$$I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n},$$

называется *модифицированной цилиндрической или бесселевой функцией первого рода порядка* ν [16, с. 121], [17, с. 139].

При малых положительных значениях z функция $I_\nu(z)$ имеет следующее поведение [17, с. 173]

$$I_\nu(z) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}, \tag{5}$$

при больших значениях z справедлива асимптотическая формула [17, с. 173]

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left[1 + O\left(|z|^{-1}\right)\right]. \tag{6}$$

Имеют место формулы [17, с. 141]

$$\frac{d}{dz}\left[z^{\nu} I_\nu(z)\right] = z^{\nu} I_{\nu-1}(z), \tag{7}$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-\nu} I_\nu(z)\right] = z^{-\nu} I_{\nu+1}(z), \tag{8}$$

$$zI_{\nu+1}(z) = zI'_\nu(z) - \nu I_\nu(z). \tag{9}$$

Функция $I_\nu(z)$ порядка $\nu = -1/2$ выражается через элементарные функции [17, с. 143]

$$I_{-\frac{1}{2}}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{\sqrt{2\pi z}}. \tag{10}$$

Известно интегральное значение [18, с. 306]

$$\int\limits_0^\infty t^{\nu+1} e^{-pt^2} I_\nu(ct)\,dt = \frac{c^\nu}{(2p)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{c^2}{4p}\right), \quad \operatorname{Re} p > 0,\ \operatorname{Re}\nu > -1. \tag{11}$$

Функция $\phi(\rho,\delta;z)$, определяемая рядом

$$\phi(\rho,\delta;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\rho n + \delta)},\ \ \rho > -1,$$

называется *функцией Райта* [26], [27].

Для неё известно представление [3, с. 88]

$$\sqrt{\pi}\,\phi\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};-z\right) = e^{-\frac{z^2}{4}}. \tag{12}$$

В работе А.В. Псху [3, с. 72] определено интегральное преобразование

$$A^{\alpha,\mu}\upsilon(y) = y^{\mu-1}\int_0^\infty \upsilon(t)\,\phi\left(-\alpha,\mu;-t\,y^{-\alpha}\right)dt,\ \ 0<\alpha<1,$$

где $\upsilon(y)$ – функция, заданная на положительной полуоси. В случае, когда $\mu = 0$, принимается обозначение $A^{\alpha,0}\upsilon(y) = A^\alpha\upsilon(y)$. Если преобразование $A^{\alpha,\mu}$ применяется к функции, зависящей от нескольких переменных, то в случае необходимости с помощью нижнего индекса обозначается переменная, по которой проводится преобразование. Например, $A_y^{\alpha,\mu}\upsilon(x,y)$.

Относительно функции $\upsilon(y)$ предполагается, что $\upsilon(y) \in L(a,b)$ для всех a и b, $0<a<b<\infty$ и выполняются предельные соотношения

$$\lim_{y\to 0} y^{-\varepsilon}\upsilon(y) = 0, \quad \lim_{y\to\infty}\exp(-y^\delta)\upsilon(y) = 0,$$

где $\varepsilon > -1$, $\delta < 1/(1-\alpha)$ [3, с. 72].

Справедливы следующие свойства преобразования $A^{\alpha,\mu}$ [3, с. 78, 80, 83]:

1°. *Пусть $\upsilon(y)$ непрерывна в точке $y=0$ и дифференцируема при $y>0$. Тогда*

$$D_{0y}^\alpha A^{\alpha,\mu}\upsilon(y) = A^{\alpha,\mu}v'(y) + \frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\upsilon(0).$$

В частности,

$$\partial_{0y}^\alpha A^{\alpha,1-\alpha}\upsilon(y) = A^{\alpha,1-\alpha}\upsilon'(y). \tag{13}$$

2°. *Пусть $\upsilon(y)$ непрерывна в точке $y=0$. Тогда*

$$\lim_{y\to 0} A^{\alpha,1-\alpha}\upsilon(y) = \upsilon(0). \tag{14}$$

3°. *Если* $u(y) \leqslant \upsilon(y)$ *и* $\mu \geqslant 0$, *то*

$$A^{\alpha,\mu}\, u(y) \leqslant A^{\alpha,\mu}\, \upsilon(y). \tag{15}$$

Для степенной функции и функции Райта справедливы формулы [3, с. 69]

$$A^{\alpha,\mu}\, y^{\delta-1} = y^{\alpha\delta+\mu-1}\,\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha\delta+\mu)},\ \ \delta>0, \mu\neq 0;\ \ \delta>-1, \delta\neq 0, \mu=0, \tag{16}$$

$$A^{\alpha,\mu}\, y^{\delta-1}\phi\,(\rho,\delta;-c\,y^{\rho}) = y^{\alpha\delta+\mu-1}\,\phi\,(\alpha\rho,\alpha\delta+\mu;-c\,y^{\alpha\rho}),\ \ \delta>\rho. \tag{17}$$

Справедлива формула [20]

$$A^{\alpha,\mu}\, y^{\delta-1}\, e^{-\frac{c^2}{4y}} = y^{\alpha\,\delta+\mu-1}\, H^{2,0}_{1,2}\left[\frac{c^2}{4y^{\alpha}}\,\middle|\, \begin{matrix}(\alpha\,\delta+\mu,\alpha)\\ (0,1),(\delta,1)\end{matrix}\right], \tag{18}$$

где $c>0$, $\delta\neq 0,\pm 1,\pm 2,...$, $H^{m,n}_{p,q}(z)$ – H-функция Фокса [21, с. 528], [22, с. 1], [23, с. 2].

Для H-функции из (18) справедлива асимптотическая оценка при $z\to\infty$ [22, с. 18], [23, с. 20]

$$H^{2,0}_{1,2}\left[z\,\middle|\, \begin{matrix}(\mu+\alpha\,\delta,\alpha)\\ (0,1),(\delta,1)\end{matrix}\right] = O\Big(z^{\frac{\delta(1-\alpha)-\mu}{2-\alpha}}\,\exp\Big[-(2-\alpha)\,\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\,z^{\frac{1}{2-\alpha}}\Big]\Big). \tag{19}$$

Основные результаты

Обозначим через

$$G(x,\xi,y) = A^{\alpha,1-\alpha}_{y}\, g(x,\xi,y), \tag{20}$$

$$g(x,\xi,y) = \frac{x^{\beta}\xi^{\beta}}{2y}\, e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}\, I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right),\ \ \beta=\frac{1-b}{2}. \tag{21}$$

Теорема 1. *Пусть функция* $\varphi(x)\in C[0,\infty)$ *и выполнено условие*

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)\,\exp\big(-\rho\, x^{\frac{2}{2-\alpha}}\big) = 0,\ \ \rho<(2-\alpha)\,2^{-\frac{2}{2-\alpha}}\,(\alpha/T)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}.$$

Тогда функция

$$u(x,y) = \int_0^{\infty}\xi^{\,1-2\beta}\, G(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi \tag{22}$$

является решением задачи 1.

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 получим прежде некоторые оценки для функции $G(x,\xi,y)$. С помощью формул (7)-(9), а также (5), из (21) при $x\xi\leqslant 2y$ нетрудно получить

$$\left|\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}\, g(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot y^{\beta-n-1},$$

$$\left|\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}\, g(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot x y^{\beta-n-2},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}\, g(x,\xi,y)\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot y^{\beta-2},$$

где $n=0,1,2,\ldots$ Применяя к последним оценкам преобразование $A^{\alpha,1-\alpha}$ по переменной y с помощью формулы (16), в силу свойств (13) и (15), приходим к оценкам

$$\left|\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}G(x,\xi,y)\right|\leqslant \mathrm{const}\cdot y^{\alpha(\beta-n-1)},$$

$$\left|\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}}G(x,\xi,y)\right|\leqslant \mathrm{const}\cdot x y^{\alpha(\beta-n-2)}, \tag{23}$$

$$\left|\partial_{0y}^{\alpha}G(x,\xi,y)\right|\leqslant \mathrm{const}\cdot y^{\alpha(\beta-2)}.$$

Далее, используя формулы (7)-(9), а также асимптотическую формулу (6), из (21) при $x\xi>2y$ получим

$$\left|\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}g(x,\xi,y)\right|\leqslant \mathrm{const}\cdot x^{\beta+\frac{2n-1}{2}}\,\xi^{\beta-\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{2n-1}{2}-1}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right], \tag{24}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}g(x,\xi,y)\right|\leqslant \mathrm{const}\cdot x^{\beta+\frac{3}{2}}\,\xi^{\beta-\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{5}{2}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right],$$

где $n=0,1,2,\ldots$ Применяя теперь к последним оценкам преобразование $A^{\alpha,1-\alpha}$ по переменной y с помощью формулы (18), затем воспользовавшись формулой (19), в силу свойств (13) и (15), находим оценки

$$\left|\frac{\partial^{n}}{\partial x^{n}}G(x,\xi,y)\right|\leqslant \mathrm{const}\cdot P_n(x,\xi,y)\exp\left[-\alpha_0\,|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}\,y^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right], \tag{25}$$

$$\left|\partial_{0y}^{\alpha}G(x,\xi,y)\right|\leqslant \mathrm{const}\cdot P_2(x,\xi,y)\exp\left[-\alpha_0\,|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}\,y^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right],$$

где $\alpha_0=(2-\alpha)\,2^{-\frac{2}{2-\alpha}}\,\alpha^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}$,

$$P_n(x,\xi,y)=(x\xi)^{\beta-\frac{1}{2}}\,|x-\xi|^{\frac{\alpha(n+1)-1}{2-\alpha}}\,y^{-\frac{\alpha(2n+1)}{2(2-\alpha)}},\ \ n=0,1,2,\ldots$$

Из полученных оценок для функции $G(x,\xi,y)$ следует существование интеграла в (22) и его производных.

Докажем, что функция $u(x,y)$, определяемая равенством (22), удовлетворяет уравнению (1). Продифференцируем равенство (22) по x, используя формулу (8) при $\nu=-\beta$. В результате получим

$$u_x(x,y)=\int_0^{\infty}\xi^{1-2\beta}\,G_x(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G_x(x,\xi,y)=A_y^{\alpha,1-\alpha}g_x(x,\xi,y),$$

$$g_x(x,\xi,y)=\left\{\frac{x^{\beta}\xi^{\beta+1}}{(2y)^2}I_{1-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)-\frac{x^{\beta+1}\xi^{\beta}}{(2y)^2}I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)\right\}e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}.$$

Применяя оператор B_x к обеим частям равенства (22), используя при этом формулы (7) при $\nu=1-\beta$ и (8) при $\nu=-\beta$, находим

$$B_x u(x,y)=\int_0^{\infty}\xi^{1-2\beta}\,B_x G(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{26}$$

где

$$B_x G(x,\xi,y) = A_y^{\alpha,1-\alpha} B_x g(x,\xi,y), \tag{27}$$

$$B_x g(x,\xi,y) = \left\{ \frac{x^{\beta+2}\xi^{\beta}}{(2y)^3} I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) + \frac{x^{\beta}\xi^{\beta+2}}{(2y)^3} I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2(1-\beta)x^{\beta}\xi^{\beta}}{(2y)^2} I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) - \frac{2x^{\beta+1}\xi^{\beta+1}}{(2y)^3} I_{1-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) \right\} e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}.$$

Далее, из формулы (13) следует

$$\partial_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \int\limits_0^{\infty} \xi^{1-2\beta}\, \partial_{0y}^{\alpha} G(x,\xi,y)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{28}$$

где

$$\partial_{0y}^{\alpha} G(x,\xi,y) = A_y^{\alpha,1-\alpha} g_y(x,\xi,y), \tag{29}$$

$$g_y(x,\xi,y) = \left\{ \frac{x^{\beta+2}\xi^{\beta}}{(2y)^3} I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) + \frac{x^{\beta}\xi^{\beta+2}}{(2y)^3} I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2x^{\beta}\xi^{\beta}}{(2y)^2} I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) - \frac{2x^{\beta+1}\xi^{\beta+1}}{(2y)^3} I'_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) \right\} e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}.$$

Используя (9) при $\nu = -\beta$, преобразуем $g_y(x,\xi,y)$ к виду

$$g_y(x,\xi,y) = \left\{ \frac{x^{\beta+2}\xi^{\beta}}{(2y)^3} I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) + \frac{x^{\beta}\xi^{\beta+2}}{(2y)^3} I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2(1-\beta)x^{\beta}\xi^{\beta}}{(2y)^2} I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) - \frac{2x^{\beta+1}\xi^{\beta+1}}{(2y)^3} I_{1-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right) \right\} e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}.$$

Подставляя теперь (26) и (28) в уравнение (1), видим, что оно обращается в тождество.

Проверим выполнимость условия (3). Из формулы (14) следует

$$\lim_{y\to 0} u(x,y) = \lim_{y\to 0} \int\limits_0^{\infty} \xi^{1-2\beta} g(x,\xi,y)\, \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \lim_{y\to 0} \left[\int\limits_0^{\infty} \xi^{1-2\beta} g(x,\xi,y) \left[\varphi(\xi) - \varphi(x)\right] d\xi + \varphi(x) \int\limits_0^{\infty} \xi^{1-2\beta} g(x,\xi,y)\, d\xi \right] =$$

$$= \lim_{y\to 0} \left[J_1(x,y) + J_2(x,y) \right].$$

Представим $J_1(x,y)$ в виде суммы трех слагаемых

$$J_1(x,y) = \int\limits_0^{x-\varepsilon} \xi^{1-2\beta} g(x,\xi,y) \left[\varphi(\xi) - \varphi(x)\right] d\xi +$$

$$+\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\xi^{\,1-2\beta}g(x,\xi,y)\,[\varphi(\xi)-\varphi(x)]\,d\xi+\int\limits_{x+\varepsilon}^{\infty}\xi^{\,1-2\beta}g(x,\xi,y)\,[\varphi(\xi)-\varphi(x)]\,d\xi=$$
$$=J_{11}(x,y)+J_{12}(x,y)+J_{13}(x,y),$$

где $\varepsilon>0$.

Из (24) при $n=0$ и $y\to 0$ следует оценка

$$|g(x,\xi,y)|\leqslant \mathrm{const}\cdot x^{\beta-1/2}\,\xi^{\,\beta-1/2}\,y^{-1/2}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}}. \qquad (30)$$

Последняя оценка позволяет написать $\lim\limits_{y\to 0}J_{11}(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}J_{13}(x,y)=0$.

Обозначим через $\omega(\varepsilon)=\sup|\varphi(x)-\varphi(\xi)|$, где $\xi\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$. В силу непрерывности функции $\varphi(x)$ очевидно, что функция $\omega(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Тогда, учитывая оценку (30), мы можем записать

$$|J_{12}(x,y)|\leqslant\omega(\varepsilon)\,\frac{x^{\beta-1/2}}{\sqrt{y}}\int\limits_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\xi^{\,1/2-\beta}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}}d\xi.$$

В последнем интеграле сделаем замену $\xi=x+2\sqrt{y}t$ и к получившемуся интегралу применим обобщённую теорему о среднем значении [24, с. 114]

$$|J_{12}(x,y)|\leqslant\omega(\varepsilon)\,x^{\beta-1/2}\int\limits_{-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}}^{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}}(x+2\sqrt{y}t)^{\,1/2-\beta}\,e^{-t^2}\,dt=\omega(\varepsilon)\int\limits_{-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}}^{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}}e^{-t^2}\,dt.$$

Последний интеграл можно оценить постоянной величиной

$$\int\limits_{-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}}^{\frac{\varepsilon}{2\sqrt{y}}}e^{-t^2}\,dt<\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}.$$

Тогда находим $\lim\limits_{y\to 0}J_{12}(x,y)=\mathrm{const}\cdot\omega(\varepsilon)$. Отсюда, в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ и произвольности выбора ε, получаем $\lim\limits_{y\to 0}J_{12}(x,y)=0$.

Вычислим интеграл $J_2(x,y)$. Подставив значение $g(x,\xi,y)$ из (21), получим

$$J_2(x,y)=\frac{x^{\beta}\varphi(x)}{2y}\,e^{-\frac{x^2}{4y}}\int\limits_0^{\infty}\xi^{\,1-\beta}e^{-\frac{\xi^2}{4y}}I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)d\xi. \qquad (31)$$

Последний интеграл вычислим с помощью формулы (11)

$$\int\limits_0^{\infty}\xi^{\,1-\beta}e^{-\frac{\xi^2}{4y}}I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right)d\xi=\frac{2y}{x^{\beta}}\,e^{\frac{x^2}{4y}}.$$

Подставляя найденное значение в (31), находим $J_2(x,y)=\varphi(x)$. Таким образом, получаем $\lim\limits_{y\to 0}u(x,y)=\varphi(x)$.

Выполнимость однородного условия (4) следует из оценки (23) при $n=0$ и условия $\beta<1$.

□

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения задачи 1 в классе функций, удовлетворяющих при некотором положительном k условию*

$$\lim_{x\to\infty} u(x,y)\exp\left(-kx^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)=0. \tag{32}$$

Доказательство. Доказательство теоремы 2 проведём методом, приведённым в [9, с. 175]. Пусть $h_r(\xi)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция со следующими свойствами:

$$h_r(\xi)=\begin{cases}1,\ 0\leqslant\xi\leqslant r,\\ 0,\ \xi\geqslant r+1,\end{cases} \tag{33}$$

$0\leqslant h_r(\xi)\leqslant 1$, $|h'_r(\xi)|+|h''_r(\xi)|\leqslant H$, где H – постоянная, не зависящая от ξ и r.

Из (27) и (29) следует, что функция $G(x,\xi,y)$, как функция переменных x и y, удовлетворяет уравнению $\mathbf{L}G(x,\xi,y)=0$, а функция $G(x,\xi,y-\eta)$, как функция переменных ξ и η, $0<\eta<y$, – сопряженному уравнению

$$\mathbf{L}^*G(x,\xi,y-\eta)\equiv B_\xi G(x,\xi,y-\eta)-D^\alpha_{y\eta}G(x,\xi,y-\eta)=0. \tag{34}$$

Рассмотрим функцию

$$\upsilon(x,\xi,y-\eta)=h_r(\xi)\,G(x,\xi,y-\eta).$$

Учитывая (34), получим

$$\mathbf{L}^*\upsilon(x,\xi,y-\eta)=2h'_r(\xi)\,G_\xi(x,\xi,y-\eta)+$$

$$+\frac{b}{\xi}h'_r(\xi)\,G(x,\xi,y-\eta)+h''_r(\xi)\,G(x,\xi,y-\eta). \tag{35}$$

Докажем сначала, что, если $\varphi(x)\equiv 0$, то $u(x,y)\equiv 0$ при $0<y<\delta$ для достаточно малого δ. Согласно теореме об общем представлении [25], регулярное в области $\Omega_r=\{(x,y):0<x<r,0<y<\delta\}$ решение однородной задачи, соответствующей задаче 1, представимо в виде

$$u(x,y)=\int\limits_0^{r+1}\int\limits_0^{y}\xi^{1-2\beta}u(\xi,\eta)\,\mathbf{L}^*\upsilon(x,\xi,y-\eta)\,d\eta\,d\xi.$$

Из (33) и (35) следует, что $\mathbf{L}^*\upsilon(x,\xi,y-\eta)=0$, если $0\leqslant\xi\leqslant r$, откуда

$$u(x,y)=\int\limits_r^{r+1}\int\limits_0^{y}\xi^{1-2\beta}u(\xi,\eta)\,\mathbf{L}^*\upsilon(x,\xi,y-\eta)\,d\eta\,d\xi.$$

Далее, в силу свойств функции $h_r(\xi)$ и оценок (25), из (35) получим

$$|\mathbf{L}^*\upsilon(x,\xi,y-\eta)|\leqslant \mathrm{const}\cdot P_1(x,\xi,y-\eta)\exp\left[-\alpha_0|x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}}(y-\eta)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}}\right].$$

Учитывая эту оценку, а также условие (32), находим

$$|u(x,y)| \leqslant \mathrm{const} \int\limits_{r}^{r+1} \int\limits_{0}^{y} P(x,\xi,y,\eta) \exp\left[-\alpha_0 |x-\xi|^{\frac{2}{2-\alpha}} (y-\eta)^{-\frac{\alpha}{2-\alpha}} + k\,\xi^{\frac{2}{2-\alpha}}\right] d\eta\, d\xi,$$

где $P(x,\xi,y,\eta) = \xi^{1-2\beta} P_1(x,\xi,y-\eta)$. При $\delta < (\alpha_0/k)^{(2-\alpha)/\alpha}$ и $r \to \infty$ правая часть последнего неравенства стремится к нулю. Это означает, что функция $u(x,y) \equiv 0$ в области $\Omega_1 = \{(x,y) : 0 < x < \infty, 0 < y < \delta\}$.

Докажем, что $u(x,y) \equiv 0$ для любого $y > 0$. Пусть $t = y - \delta$, $\delta \leqslant y < 2\delta$. Рассмотрим функцию $w(x,t) = u(x,\delta + t)$. Так как $u(x,y) \equiv 0$ при $0 < y < \delta$, то

$$\partial_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \partial_{\delta y}^{\alpha} u(x,y) = \partial_{0t}^{\alpha} w(x,t).$$

Отсюда следует, что функция $w(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$B_x w(x,t) - \partial_{0t}^{\alpha} w(x,t) = 0,\ \ 0 < x < \infty,\ 0 < t < \delta,$$

условиям (32) и

$$w(x,0) = 0,\ \ 0 < x < \infty, \lim_{x\to 0} x^b w_x(x,t) = 0,\ \ 0 < t < \delta.$$

Тогда, согласно выше доказанному, $w(x,t) \equiv 0$ в области $\Omega_2 = \{(x,t) : 0 < x < \infty, 0 < t < \delta\}$, то есть $u(x,y) \equiv 0$ в $\Omega_2 = \{(x,y) : 0 < x < \infty,\ \delta < y < 2\delta\}$. Точно так же доказывается, что $u(x,y) \equiv 0$ в полосах $(n-1)\,\delta \leqslant y < n\,\delta$, $n = 3,4,...$

□

Неоднородное уравнение

Решение первой краевой задачи для уравнения

$$\partial_{0y}^{\alpha} u(x,y) = B_x u(x,y) + f(x,y)$$

с условиями

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

$$\lim_{x\to 0} x^b u_x(x,y) = 0, \quad 0 < y < T,$$

может быть представлено в виде

$$u(x,y) = \int\limits_{0}^{y} \int\limits_{0}^{\infty} \xi^{1-2\beta} A_y^{\alpha} g(x,\xi,y-\eta) f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

При этом достаточно требовать, чтобы $y^{1-\alpha} f(x,y) \in C(\bar{\Omega})$, функция $f(x,y)$ удовлетворяла условию Гёльдера по переменной x и при $x \to \infty$ выполнялось условие $\lim\limits_{x\to\infty} y^{1-\alpha} f(x,y) \exp\left(-\rho x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0$, где ρ определяется из теоремы 1.

Представление решения в частном случае

При $\beta = 1/2$ ($b=0$) из (20) и (21) в силу (10) получим

$$G(x,\xi,y) = A_y^{\alpha,1-\alpha} g(x,\xi,y), \quad g(x,\xi,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4y}} \right].$$

Тогда, учитывая (12), функцию $g(x,\xi,y)$ можно записать в виде

$$g(x,\xi,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left[\phi\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{|x-\xi|}{\sqrt{y}}\right) + \phi\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{x+\xi}{\sqrt{y}}\right) \right].$$

Применяя к последнему равенству преобразование $A^{\alpha,1-\alpha}$ по переменной y с помощью формулы (17), из (22) получим решение второй краевой задачи в полуполосе для уравнения диффузии с регуляризованной дробной производной по времени

$$u(x,y) = \int\limits_0^\infty G(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,y) = \frac{1}{2y^\sigma} \left[\phi\left(-\sigma,1-\sigma;-\frac{|x-\xi|}{y^\sigma}\right) + \phi\left(-\sigma,1-\sigma;-\frac{x+\xi}{y^\sigma}\right) \right], \quad \sigma = \frac{\alpha}{2}.$$

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответсвенность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литература/References

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nakhushev A. M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie (Fractional calculus and its application)*, Fizmatlit, Moskva, 2003 (in Russian), 272 pp.]

[2] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Мн., 1987, 688 с. [Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.,, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications,*, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993, 976 pp.]

[3] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с. [Pskhu A. V., *Uravneniya v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka (Fractional partial differential equations)*, Nauka, Moskva, 2005, 199 pp.] [in Russian.].

[4] Килбас А. А., *Теория и приложения дифференциальных уравнений дробного порядка (курс лекций)*, Методологическая школа-конференция «Математическая физика и нанотехнологии», Самара, 2009. [Kilbas A.A., *Teoriya i prilozheniya differencial'nyh uravnenij drobnogo poryadka (kurs lekcij)*, Metodologicheskaya shkola-konferenciya «Matematicheskaya fizika i nanotekhnologii» publaddr Samara, 2009 (in Russian), 121 pp.]

[5] Новоженова О. Г., *Биография и научные труды Алексея Никифоровича Герасимова. О линейных операторах, упруго-вязкости, элевтерозе и дробных производных*, Перо, М., 2018, 235 с. [Novozhenova O. G., *Biografiya i nauchnye trudy Alekseya Nikiforovicha Gerasimova. O linejnyh operatorah, uprugo-vyazkosti, elevteroze i drobnyh proizvodnyh (Biography and scientific works of Alexei Nikiforovich Gerasimov. Linear operators, elastic-viscosity, eleutherosis and fractional derivatives)*, Pero, Moscow, 2018 (in Russian), 235 pp.]

[6] Киприянов И. А., Катрахов В. В., Ляпин В. М., “О краевых задачах в областях общего вида для сингулярных параболических систем уравнений”, *ДАН СССР*, **230**:6 (1976), 1271–1274. [Kipriyanov I. A., Katrakhov V. V., Lyapin V. M., “On boundary value problems in domains of general type for singular parabolic systems of equations”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **230**:6 (1976), 1271–1274 (in Russian)].

[7] Киприянов И. А., *Сингулярные эллиптические краевые задачи*, Наука, М., 1997, 208 с. [Kipriyanov I. A., *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi (Singular elliptic boundary value problems)*, Nauka, Moskva, 1997 (in Russian), 208 pp.]

[8] Муравник А. Б., “Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши”, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **52** (2014), 3–141. [Muravnik A. B., “Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem”, *Journal of Mathematical Sciences*, **216**:3 (2016), 345–496].

[9] Псху А. В., “Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка”, *Известия РАН. Серия математическая*, **73**:2 (2009), 141–182. [Pskhu A.,V., “The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order”, *Izvestiya: Mathematics*, **73**:2 (2009), 351–392].

[10] Kochubei A. N., “Cauchy problem for fractional diffusion-wave equations with variable coefficients”, *Applicable Analysis.*, **93**:10 (2014), 2211–2242.

[11] Luchko Y., Mainardi F., “Cauchy and signaling problems for the time-fractional diffusion-wave equation”, *Journal of Vibration and Acoustics*, **136**:5 (2014), 1–7.

[12] Псху А. В., “Первая краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения в нецилиндрической области”, *Известия РАН. Серия математическая*, **81**:6 (2017), 158–179. [Pskhu A. V., “The first boundary-value problem for a fractional diffusion-wave equation in a non-cylindrical domain”, *Izvestiya: Mathematics*, **81**:6 (2017), 1212–1233].

[13] Lucena L. S., Da Silva L. R., Tateishi A. A., Lenzi M. K., Ribeiro H. V., Lenzi E. K., “Solutions for a fractional diffusion equation with noninteger dimensions”, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **13**:4 (2012), 1955–1960.

[14] Korbel J., Luchko Y., “Modeling of financial processes with a space-time fractional diffusion equation of varying order”, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **19**:6 (2016), 1414–1433.

[15] Razminia K., Razminia A., Baleanu D., “Fractal-fractional modelling of partially penetrating wells”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **119** (2019), 135–142.

[16] Кузнецов Д. С., *Специальные функции*, Высшая школа, М., 1965, 248 с. [Kuznecov D. S., *Special'nye funkcii (Special functions)*, Moskva, Vysshaya shkola, 1965 (in Russian), 424 pp.]

[17] Лебедев Н. Н., *Специальные функции и их приложения*, Физматлит, М., 1963, 358 с. [Lebedev N. N., *Special'nye funkcii i ih prilozheniya (Special functions and their applications)*, Moskva, Fizmatlit, 1963 (in Russian), 358 pp.]

[18] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды. Специальные функции*. Т. 2, Наука, М., 1983, 752 с. [Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I., *Integraly i ryady. Special'nye funkcii. (Integrals and series. Special functions)*. V. 2, Nauka, Moskva, 1983 (in Russian), 752 pp.]

[19] Gorenflo R., Luchko Y., Mainardi F., “Analytical properties and applications of the Wright function”, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **2**:4 (1999), 383–414.

[20] Хуштова Ф. Г., “Задача Коши для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **20**:1 (2016), 74–84. [Khushtova F.G., “Cauchy problem for a parabolic equation with Bessel operator and Riemann–Liouville partial derivative”, *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, **20**:1 (2016), 74–84 (in Russian)].

[21] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды. Дополнительные главы*. Т. 3, Наука, М., 1986, 800 с. [Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.,, *Integraly i ryady. Dopolnitel'nye glavy (Integrals and series. Additional chapters)*. V. 3, Nauka, Moskva, 1986 (in Russian), 800 pp.]

[22] Kilbas A. A., Saigo M., *H-Transform. Theory and Applications*, D.C. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington, 2004, 408 pp.

[23] Mathai A.M., Saxena R.K., Haubold H.J., *The H-Function. Theory and Applications*, Springer, 2010, 270 pp.

[24] Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 2, Наука, М., 1969, 800 с. [Fikhtengol'ts G. M., *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya (A course of differential and integral calculus)*. V. 2, Nauka, Moskva, 1969 (in Russian), 800 pp.]

[25] Хуштова Ф. Г., "Фундаментальное решение модельного уравнения аномальной диффузии дробного порядка", *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **19**:4 (2015), 722–735. [Khushtova F. G., "Fundamental solution of the model equation of anomalous diffusion of fractional order", *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, **19**:4 (2015), 722–735 (in Russian)].

[26] Wright E.M., "On the coefficients of power series having exponential singularities", *Journal of the London Mathematical Society*, **s1-8**:1 (1933), 71–79.

[27] Wright E.M., "The generalized Bessel function of order greater than one", *The Quarterly Journal of Mathematics*, **os-11**:1 (1940), 36–48.

MSC 35C05, 35K20, 35R11 Research Article

The second boundary value problem in a half-strip for a B-parabolic equation with the Gerasimov–Caputo time derivative

F. G. Khushtova

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS, 360000, Nalchik, Shortanov st., 89A, Russia
E-mail: khushtova@yandex.ru

In the present paper, we investigate the second boundary value problem in a half-strip for a parabolic equation with the Bessel operator acting with respect to the spatial variable and the Gerasimov–Caputo partial time derivative. Theorems of existence and uniqueness of the solution of the problem under consideration are proved.The solution representation is found in terms of an integral transform with the Wright function in the kernel.The uniqueness of the solution is proved in the class of functions of rapid growth. The considered equation for particular values of the parameters coincides with the classical diffusion equation.

Key words: fractional derivative, Bessel operator, Wright function, Bessel function.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-37-50

Original article submitted: 16.11.2020 Revision submitted: 10.12.2020

For citation. Khushtova F. G. The second boundary value problem in a half-strip for a B-parabolic equation with the Gerasimov–Caputo time derivative. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **33**: 4, 37-50. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-37-50

Competing interests. The author declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. The work was carried out without financial support.