УДК 517.95 Научная статья

Краевые задачи с интегральным смещением для модельного уравнения эллиптического типа

З. А. Нахушева

Кабардино-Балкарский государственный университет имени Х. М. Бербекова, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173.

E-mail: z.nakhusheva@mail.ru

Для модельного эллиптического уравнения второго порядка рассматривается метод редукции нелокальных краевых задач с интегральным смещением к локальным краевым задачам для уравнения более высокого порядка составного типа. Исследуется разрешимость поставленных задач.

Ключевые слова: интегральные условия, задачи со смещением, уравнение Лапласа, уравнение Адамара, метод редукции, нелокальные краевые задачи, регулярное решение.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-65-74

Поступила в редакцию: 16.07.2020 В окончательном варианте: 09.09.2020

Для цитирования. Нахушева З. А. Краевые задачи с интегральным смещением для модельного уравнения эллиптического типа // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 32. № 3. С. 65-74. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-65-74

Введение

Как известно, необходимость в интегральных краевых условиях возникает в случае, когда в процессе математического моделирования той или иной сложной системы становится недостаточным поточечного задания граничных условий. Интегральные нелокальные условия являются обобщением дискретных нелокальных условий или условий локального смещения.

В определенных случаях интегральные условия можно свести к условиям, описанным В.А. Стекловым [1, с. 66].

$$a_1u(0,y)+a_2u_x(0,y)+a_3u(l,y)+a_4u_x(l,y)=\psi_1, \quad (1)$$

$$b_1u(0,y)+b_2u_x(0,y)+b_3u(l,y)+b_4u_x(l,y)=\psi_1, \quad (2)$$

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования

где $a_i = a_i(y)$, $b_i = b_i(y)$, $i = 1,2,3,4$; $\psi_j = \psi_j(y)$, $j = 1,2$ – заданные функции такие, что по крайней мере одна из разностей $a_i b_k - a_k b_i$ $(i,k = 1,2,3,4)$ отлична от тождественного нуля.

Краевым задачам с нелокальными условиями вида (1), (2) посвящены интересные и глубокие работы В.А. Стеклова [1], А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [2], Н.И. Ионкина и Е.И. Моисеева [3].

А.А. Самарский, в своей обзорной работе, вышедшей в журнале "Дифференциальные уравнения" в 1980 году [4], еще раз обращает внимание на актуальность задач с нелокальными, в том числе интегральными, условиями.

Задачи с интегральными условиями для параболических и гиперболических уравнений второго порядка были поставлены и изучены Л.И. Камыниным [5], А.А. Самарским [4], А.М. Нахушевым [6], Н.И. Ионкиным [7], Н.И. Юрчуком [8], А.И. Кожановым и Л.С. Пулькиной [9]-[10], Нахушевой З.А. [11]. Задачи с нелокальными условиями, в том числе и интегральными, для уравнений эллиптического типа рассматривались А.Л. Скубачевским [12]-[13], А.К. Гущиным и В.П. Михайловым [14].

Нельзя не отметить, что огромную роль в развитии нелокальных краевых задач сыграли работы А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [2], в которых систематизированы начально-краевые задачи с дискретными нелокальными условиями, поставлены и исследованы пространственно-нелокальные задачи для определенного класса уравнений эллиптического типа.

Общая постановка задачи

Для модельного эллиптического уравнения второго порядка

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{3}$$

в области $D = \{z : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ рассмотрим следующую задачу:

Задача 1. Найти регулярное в области D решение $u = u(x,y) = u(z)$, $z = x + iy$, уравнения (3) непрерывное в $\bar{D}$ и удовлетворяющее следующим условиям

$$u(x+ib) = \tau_1(x),\ 0 \le x \le a, \tag{4}$$

$$u(a+iy) = \psi(y),\ 0 \le y \le b, \tag{5}$$

$$\int\limits_0^{\alpha} u(x,y)\,dx = \psi_\alpha(y),\ 0 \le y \le b, \tag{6}$$

$$\delta u(x) + \int\limits_0^{\beta} u(x,y)\,dy = \varphi_\beta(x),\ 0 \le x \le a, \tag{7}$$

где $\tau_1(x)$, $\psi(y)$, $\psi_\alpha(y)$ и $\varphi_\beta(x)$ – заданные функции, такие, что

$$\tau_1(x) \in C^1[0,a],\ \psi(y) \in C[0,b],\ \varphi_\beta(x) \in C^2[0,a],\ \psi_\alpha(y) \in C^2[0,b], \tag{8}$$

$$u(x)=\delta\tau_0(x),\quad \delta=\begin{cases}1, \beta=0,\\ 0, \beta\neq 0.\end{cases} \tag{9}$$

Условия вида (6)-(7) назовем нелокальными условиями с интегральным смещением.

Редуцируем задачу 1 к задаче с локальным смещением.

Опираясь на уравнение Лапласа (3), заключаем, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^\beta u(x,y)dy=-\int\limits_0^\beta \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}dy=-u_y(x,\beta)+u_y(x,0),\ 0<x<a.$$

Отсюда, в силу (7) и (9) имеем

$$u_y(x,0)=u_y(x,\beta)+\varphi''_\beta(x)-\delta u''(x),\ 0<x<a. \tag{10}$$

Аналогично, из (3) получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int\limits_0^\alpha u(x,y)dx=-\int\limits_0^\alpha \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}dy=u_x(iy)-u_x(\alpha+iy),\ 0<x<a.$$

Далее с учетом (6), (8), (9) приходим к условиям

$$u_x(0,y)=u_x(\alpha,y)+\psi''_\alpha(y),\ 0<y<b. \tag{11}$$

Итак, задача 1 с интегральным смещением сведена к задаче (4)-(5), (10)-(11) с локальным смещением для уравнения (3) в области D.

Случай $\alpha=a,\ \beta=0$.

Интегральное условие со смещением на части $\tau_0=\{iy: 0\leq y\leq b\}$ границы ∂D будет иметь вид

$$\int\limits_0^a u(x+iy)dx=\psi_a(y),\ 0\leq y\leq b. \tag{12}$$

Задача 1 сводится к следующей задаче

Задача 2. Найти регулярное в области D решение $u(z)=u(x,y)$ уравнения (3), непрерывное в замкнутой области D и удовлетворяющее локальным краевым условиям

$$u(x)=\varphi_0(x),\ u(x+bi)=\tau_1(x),\ 0\leq x\leq a, \tag{13}$$

$$u(a+iy)=\psi(y),\ 0\leq y\leq b, \tag{14}$$

Здесь $\varphi_0(x),\ \tau_1(x)\in C[0,a],\ \psi_a(y),\psi(y)\in C[0,b]$.

Первое из условия (13) получаем на основании (9), (7).

В уравнении (3) перейдем к новой зависимой переменной $\upsilon=\upsilon(z)$, однозначно определяемой как решение задачи Коши

$$\upsilon(iy)=0,\ 0\leq y\leq b, \tag{15}$$

для уравнения
$$\upsilon_x(z) = u(z),\ z \in \Omega. \tag{16}$$

Единственное решение задачи (15)-(16) для любой функции $u(z) \in C(\bar{D})$ имеет вид

$$\upsilon(z) = \int\limits_0^x u(\xi + iy)d\xi. \tag{17}$$

Функция $\upsilon(z)$ в силу (12)-(13) и (17), наряду с (15), должна удовлетворять краевым условиям
$$\upsilon(x) = \upsilon_0(x),\ \upsilon(x+ib) = \upsilon_1(x),\ 0 \le x \le a, \tag{18}$$

$$\upsilon(a+iy) = \psi_a(y),\ \upsilon_x(a+iy) = \psi(y),\ 0 \le y \le b \tag{19}$$

и уравнению Адамара
$$\frac{\partial}{\partial x}(\upsilon_{xx} + \upsilon_{yy}) = 0. \tag{20}$$

Следовательно, нелокальная краевая задача 2 с интегральным смещением на части σ_0 границы области D свелась к следующей локальной краевой задаче для уравнения третьего порядка (20).

Задача 3. Найти регулярное в области D решение $\upsilon(z) = \upsilon(x,y)$ уравнения (20), которое непрерывно вместе с производной $\upsilon_x(z)$ на компакте $\overline{D}$ и удовлетворяет краевым условиям (15), (18) и (19).

Соответствующее уравнению (20) характеристическое уравнение имеет вид $\left[(dy)^2 + (dx)^2\right] dy = 0$. Оно в каждой точке имеет одно действительное и два комплексных решения и, стало быть, является уравнением составного типа. Координатные прямые $y = \mathrm{const}$ образуют семейство действительных характеристик.

Уравнение (20) как модельное уравнение с частными производными третьего порядка составного типа предложено J. Hadamard [15]–[16].

Фундаментальные результаты по уравнениям составного и смешанно–составного типа получены в работе А.В. Бицадзе и М.С. Салахитдинова [17] и в монографиях М.С. Салахитдинова [18] и Т.Д. Джураева [19].

Учитывая (11), задачу 2 можно свести и к задаче с локальным смещением для уравнения Лапласа.

Задача 4. Найти регулярное в области D и непрерывное в $\bar{D}$ решение $u(z)$ уравнения (3), удовлетворяющее условиям (13), (14) и (11).

Докажем, что в классе $C^1(\bar{D})$ однородная задача:

$$u(x) = 0,\ u(x+ib) = 0,\ 0 \le x \le a, \tag{21}$$

$$u(a+iy) = 0,\ u_x(iy) = u_x(a+iy),\ 0 \le y \le b, \tag{22}$$

соответствующая задаче 4, имеет лишь тривиальное решение $u(z) \equiv 0$.

Для любой гармонической функции $u(z)$ в области Ω справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x^2 - u_y^2\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(u_x u_y\right),\ z \in \Omega. \tag{23}$$

Проинтегрируем по частям равенство (23), воспользуемся формулой Грина и условиями (21)-(22)

$$\int_D \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x^2-u_y^2\right)dxdy=\int_{\partial D}\left(u_x^2-u_y^2\right)dy=\int_0^b\left[u_x^2(a+iy)-u_y^2(a+iy)\right]dy-$$

$$-\int_0^b\left[u_x^2(iy)-u_y^2(iy)\right]dy=\int_0^b\left[u_x^2(a+iy)-u_x^2(iy)\right]dy+\int_0^b u_y^2(iy)dy=$$

$$=\int_0^b u_y^2(iy)dy;\ -\int_D\frac{\partial}{\partial y}\left(u_xu_y\right)dxdy=\int_{\partial D}u_xu_ydx=0.$$

Видно, что $\int\limits_0^b u_y^2(iy)dy=0$ и, следовательно, $u_y(iy)=0$. Но $u(0)=0$. Поэтому $u(iy)=0$ при $0\le y\le b$. Это равенство вместе с (21) – (22) приводит к однородному условию Дирихле:

$$u|_{\partial D}=0. \tag{24}$$

Из тривиальности решения задачи Дирихле (24) для уравнения (3) следует единственность решения задачи 4.

Заметим, что задача 2 остается корректно поставленной, если условие (14) заменить условием

$$u_x(a+iy)=\psi_1(y),\ 0<y<b, \tag{25}$$

а условие (12) – условием

$$\int_0^\alpha u(x+iy)dx=\varphi_1(y),\ 0\le y\le b, \tag{26}$$

с верхним пределом интегрирования $\alpha\in]0,a[$.
Эту задачу назовем задачей 5 и сформулируем следующим образом.

Задача 5. Найти регулярное в области D решение $u(z)$ уравнения (3), непрерывное в $\overline{D}$ и удовлетворяющее краевым условиям (13), (25) и (26), где $\tau_0(x)$ и $\tau_1(x)$ принадлежат $C^1[0,a)$, а $\psi_1(y)$ и $\varphi_1(y)$ – $C[0,b]$.

Задача 5 сводится к задаче Бицадзе-Самарского [2], если ввести новую зависимую переменную $w(z)=u_x(z)$. Относительно $w(z)$ уравнение (3) и условия (13), (25) и (26) соответственно принимают вид

$$w_{xx}+w_{yy}=0, \tag{27}$$

$$w(x)=\tau_0'(x),\ w(x+ib)=\tau_1'(x),\ 0\le x\le a, \tag{28}$$

$$w(a+iy)=\psi_1(y),\ 0\le y\le b, \tag{29}$$

$$w(iy)=w(\alpha+iy)-\varphi_1(y),\ 0\le y\le b. \tag{30}$$

Задача (28)-(30) для уравнения (27) имеет, и притом единственное, решение $w(z)$. После того как найдена функция $w(z)$, решение $u(z)$ задачи 5 определяется формулой

$$u(z)=\int\limits_0^x w(\xi+iy)d\xi+w(iy).$$

1. Случай $\alpha\neq a$, $\beta\neq 0$.

Вернемся к задаче 1.

В уравнении (3) перейдем к новой зависимой переменной $v(z)=v(x,y)$:

$$v(z)=\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^y u(\xi,\eta)\,d\eta. \tag{31}$$

Функция $v(z)$ является решением задачи Гурса:

$$v(0,y)=0,\ v(x,0)=0,\ 0\le y\le b,\ 0\le x\le a \tag{32}$$

для уравнения

$$v_{xy}=u(z)\,,\ z\in D. \tag{33}$$

Подчинив функцию (31) условиям (6) и (7), получим

$$v(\alpha,y)=\Psi(y)\,,\ v(x,\beta)=\Phi(x)\,,\ 0\le y\le b,\ 0\le x\le a, \tag{34}$$

$$\Phi(x)=\int\limits_0^x d\xi\int\limits_0^\beta u(\xi,\eta)d\xi=\int\limits_0^x \varphi_\beta(\xi)\,d\xi,$$

$$\Psi(y)=\int\limits_0^y d\eta\int\limits_0^\alpha u(\xi,\eta)d\xi=\int\limits_0^y \psi_\alpha(\eta)\,d\eta.$$

Из равенств (4)-(5) и (33) следует:

$$v_{xy}(x+ib)=\tau_1(x),\ v_{xy}(a+iy)=\psi(y),\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b; \tag{35}$$

$$\Delta_z \upsilon_{xy}=0. \tag{36}$$

Равенство (36) означает, что функция $\upsilon(z)$ является решением уравнения Адамара

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\upsilon_{xx}+\upsilon_{yy})=0,z\in D. \tag{37}$$

Краевые задачи для уравнения (37) впервые исследовал J. Hadamard [15], [16]. Уравнение (37) является важной моделью уравнения составного типа четвертого порядка, которое в каждой точке z имеет две действительные характеристики $x=\mathrm{const}$, $y=\mathrm{const}$ и столько же комплексных характеристик.

Задача 1 свелась к задаче поиска регулярного в области D решения $\upsilon(z)$ уравнения (37), удовлетворяющего локальным внутренне – краевым условиям (32), (34) и (35).

При $\alpha = a$, $\beta = b$ эта задача представляет собой локальную краевую задачу:

$$\upsilon(0,y) = 0,\ \upsilon(\alpha,y) = \Psi(y),\ 0 \le y \le \beta, \tag{38}$$

$$\upsilon(x,0) = 0,\ \upsilon(x,\beta) = \Phi(x),\ 0 \le x \le \alpha, \tag{39}$$

$$\upsilon_{yx}(x,\beta) = \tau_1(x),\ \upsilon_{xy}(\alpha,y) = \psi(y),\ 0 \le x \le \alpha,\ 0 \le y \le \beta, \tag{40}$$

для уравнения Адамара (36).

Так как $\upsilon_x(x,y) = \int\limits_0^y u(x,\eta)d\eta$, $\upsilon_y(x,y) = \int\limits_0^x u(\xi,y)d\xi$ и согласно (4), (5)

$$\upsilon_y(x,\beta) = \int\limits_0^x u(\xi,\beta)d\xi = \int\limits_0^x \tau_1(\xi)d\xi,$$

$$\upsilon_x(\alpha,y) = \int\limits_0^y u(\alpha,\eta)d\eta = \int\limits_0^y \psi(\eta)d\eta,$$

то условие (40) можно заменить условием

$$\upsilon_y(x,\beta) = T_1(x), \quad \upsilon_x(\alpha,y) = \Psi_1(y), \quad 0 \le x \le \alpha, \quad 0 \le y \le \beta,$$

где

$$T_1(x) = \int\limits_0^x \tau_1(\xi)d\xi,\ \Psi_1(y) = \int\limits_0^y \psi(\eta)d\eta.$$

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответсвенность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

[1] Стеклов В.А., *Основные задачи математической физики*, Наука, М., 1983. [Steklov V.A., Osnovnyye zadachi matematicheskoy fiziki, Nauka, Moscow, 1983].

[2] Бицадзе А. В., Самарский А. А., “О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач”, *ДАН СССР*, 1969, №185(4), 739–740. [Bitsadze A. V., Samarskiy A. A., “O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh krayevykh zadach”, DAN SSSR, 1969, №185(4), 739–740].

[3] Ионкин Н. И., Моисеев Е. И., “О задаче для уравнения теплопроводности с двутотечными краевыми условиями”, *Дифференциальные уравнения*, 1979, №15(7), 1284–1295. [Ionkin N. I., Moiseyev E. I., “O zadache dlya uravneniya teploprovodnosti s dvutotechnymi krayevymi usloviyami”, Differentsialnyye uravneniya, 1979, №15(7), 1284–1295].

[4] Самарский А. А., “О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, 1980, №16(11), 1221–1228. [Samarskiy A. A., “O nekotorykh problemakh sovremennoy teorii differentsialnykh uravneniy”, Differentsialnyye uravneniya, 1980, №16(11), 1221–1228].

[5] Камынин Л. И., “Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1964, №4(6), 1006–1024. [Kamynin L. I., “Ob odnoy krayevoy zadache teorii teploprovodnosti s neklassicheskimi granichnymi usloviyami”, Zhurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki, 1964, №4(6), 1006–1024].

[6] Нахушев А. М., “Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложений к динамике почвенной влаги и грунтовых вод”, *Дифференциальные уравнения*, 1982, №18(1), 72–84. [Nakhushev A. M., “Ob odnom priblizhennom metode resheniya krayevykh zadach dlya differentsialnykh uravneniy i ego prilozheniy k dinamike pochvennoy vlagi i gruntovykh vod”, Differentsialnyye uravneniya, 1982, №18(1), 72–84].

[7] Ионкин Н. И., “Решение одной краевой задачи теплопроводности с неклассическим краевым условием”, *Дифференциальные уравнения*, 1977, №13(2), 294–304. [Ionkin N. I., “Resheniye odnoy krayevoy zadachi teploprovodnosti s neklassicheskim krayevym usloviyem”, Differentsialnyye uravneniya, 1977, №13(2), 294–304].

[8] Юрчук Н. И., “Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, 1986, №22(12), 2117–2126. [Yurchuk N. I., “Smeshannaya zadacha s integralnym usloviyem dlya nekotorykh parabolicheskikh uravneniy”, Differentsialnyye uravneniya, 1986, №22(12), 2117–2126].

[9] Кожанов А. И., Пулькина Л. С., “О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, 2006, №42(9), 1166–1179. [Kozhanov A. I., Pulkina L. S., “O razreshimosti krayevykh zadach s nelokalnym granichnym usloviyem integralnogo vida dlya mnogomernykh giperbolicheskikh uravneniy”, Differentsialnyye uravneniya, 2006, №42(9), 1166–1179].

[10] Кожанов А. И., Пулькина Л. С., “О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений”, *Математический журнал*, 2009, №9(2), 78–92. [Kozhanov A. I., Pulkina L. S., “O razreshimosti nekotorykh granichnykh zadach so smeshcheniyem dlya lineynykh giperbolicheskikh uravneniy”, Matematicheskiy zhurnal, 2009, №9(2), 78–92].

[11] Нахушева З. А., “Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений”, *Издательство КБНЦ РАН*, 2011. [Nakhusheva Z. A., “Nelokalnyye krayevyye zadachi dlya osnovnykh i smeshannogo tipov differentsialnykh uravneniy”, Izdatelstvo KBNTs RAN, 2011].

[12] Скубачевский А. Л., “Неклассические краевые задачи. I”, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2007, №26, 3–132. [Skubachevskiy A. L., “Neklassicheskiye krayevyye zadachi. I. Sovremennaya matematika. Fundamentalnyye napravleniya”, 2007, №26, 3–132].

[13] Скубачевский А. Л., “Неклассические краевые задачи. II”, *Современная математика. Фундаментальные направления*, 2009, №33, 3–179. [Skubachevskiy A. L., “Neklassicheskiye krayevyye zadachi. II. Sovremennaya matematika”, 2009, №33, 3–179].

[14] Гущин А. К., Михайлов В. П., “О непрерывности решений одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения”, *Математический сборник*, 1995, №186(2), 37–58. [Gushchin A. K., Mikhaylov V. P., “O nepreryvnosti resheniy odnogo klassa nelokalnykh zadach dlya ellipticheskogo uravneniya”, Matematicheskiy sbornik, 1995, №186(2), 37–58].

[15] Hadamard J., “Proprictes d'une equation lineare aux derivees partielles du quatrine ordre”, The Tonoku math. J., 1933, №37, 133–150.

[16] Hadamard J., “Equatuions aux derivees partielles”, L'enseigment mathematique, 1936, №35.

[17] Бицадзе А. В., Салахитдинов М. С., “К теории уравнений смешанно-составного типа”, *Сиб. матем. журн.*, 1961, №II(1). [Bitsadze A. V., Salakhitdinov M. S., “K teorii uravneniy smeshanno-sostavnogo tipa”, Sib. matem. zhurn., 1961, №II(1)].

[18] Салахитдинов М. С., *Уравнения смешанно-составного типа*, ФАН, Ташкент, 1974. [Salakhitdinov M. S., Uravneniya smeshanno-sostavnogo tipa, FAN, Tashkent, 1974].

[19] Джураев Т. Д., *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*, ФАН, Ташкент, 1979. [Dzhurayev T. D., Krayevyye zadachi dlya uravneniy smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov, FAN, Tashkent, 1979].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. М.: Наука, 1983.

[2] Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185(4). С. 739–740.

[3] Ионкин Н. И., Моисеев Е. И. О задаче для уравнения теплопроводности с двутотечными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15(7). С. 1284–1295.

[4] Самарский А. А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16(11). С. 1221–1228

[5] Камынин Л. И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964. Т. 4(6). С. 1006–1024.

[6] Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложений к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18(1). С. 72–84.

[7] Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13(2). С. 294–304.

[8] Юрчук Н. И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22(12). С. 2117–2126.

[9] Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42(9). С. 1166–1179.

[10] Кожанов А. И., Пулькина Л. С. О разрешимости некоторых граничных задач со смещением для линейных гиперболических уравнений // Математический журнал. 2009. Т. 9(2). С. 78–92.

[11] Нахушева З. А. Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений // Издательство КБНЦ РАН. 2011.

[12] Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 26. С. 3–132.

[13] Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. II // Современная математика. Фундаментальные направления. 2009. Т. 33. С. 3–179.

[14] Гущин А. К., Михайлов В. П. О непрерывности решений одного класса нелокальных задач для эллиптического уравнения // Математический сборник. 1995. Т. 186(2). С. 37–58.

[15] Hadamard J. Propriсtes d'une equation lineare aux derivees partielles du quatrine ordre // The Tonoku math. J. 1933. vol. 37. pp. 133–150.

[16] Hadamard J. Equatuions aux derivees partielles // L'enseigment mathematique. 1936. vol. 35.

[17] Бицадзе А. В., Салахитдинов М. С. К теории уравнений смешанно-составного типа // Сиб. матем. журн. 1961. II(1).

[18] Салахитдинов М. С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1974.

[19] Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: ФАН, 1979.

MSC 35J25 Research Article

Boundary problem with integral displacement for the model equation of elliptic type

Z. A. Nakhusheva

Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov, 360004, Nalchik, Chernyshevskoqo st., 173, Russia.

E-mail: z.nakhusheva@mail.ru

For a model second order elliptic equation is considered the method of reduction of nonlocal boundary value problems with integral offset to the local boundary value problems for equations of higher order composite type. The solvability of tasks is investigated.

Key words: integral conditions, problems with displacement, Laplace equation, the equation Hadamard reduction method, nonlocal boundary value problems, regular solutionintegral conditions, problems with displacement, Laplace equation, the equation Hadamard reduction method, nonlocal boundary value problems, regular solution.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-65-74

Original article submitted: 16.07.2020 Revision submitted: 09.09.2020

For citation. Nakhusheva Z. A. Boundary problem with integral displacement for the model equation of elliptic type. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **32**: 3, 65-74. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-65-74

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Acknowledgments. The authors are deeply grateful to the referee for a number of comments that contributed to the improvement of the article.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors