

УДК 51-74

Научная статья

Планирование траектории группы беспилотных летательных аппаратов с использованием годографа Пифагора и составных кривых Бернштейна-Безье на плоскости

Д. Л. Винокурский, К. Ю. Ганьшин, О. С. Мезенцева, Ф. В. Самойлов

Северо-Кавказский Федеральный Университет, 355017, г. Ставрополь,
ул. Пушкина, 1
E-mail: info@ncfu.ru

В работе представлен метод построения траектории движения группы беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) аппроксимацией годографа Пифагора составными многочленами Бернштейна-Безье на плоскости.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, многочлены Бернштейна-Безье, годограф Пифагора.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-70-78

Поступила в редакцию: 22.05.2020

В окончательном варианте: 05.06.2020

Для цитирования. Винокурский Д. Л., Ганьшин К. Ю., Мезенцева О. С., Самойлов Ф. В. Планирование траектории группы беспилотных летательных аппаратов с использованием годографа Пифагора и составных кривых Бернштейна-Безье на плоскости // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 31. № 2. С. 70-78. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-70-78

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Винокурский Д. Л. и др., 2020

Введение

Построение траектории группы беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) является наиболее сложной задачей в теории управления движением. Кроме того, что необходимо построить оптимальный и безопасный путь от начала до цели с учетом ограничений на скорость, но также требуется рассчитать и углы поворота, и минимальное расстояние между различными беспилотными летательными аппаратами. В литературе описываются различные методы построения оптимальных траекторий в зависимости от кинематических и динамических ограничений, влияния окружающей среды, а также выполняемой задачи. Основные алгоритмы построения траектории групп БПЛА следующие: диаграмма Вороного [1],[2], алгоритм Дейкстры [3], метод графов [4]-[6], методы оптимизации (линейное и нелинейное программирование, целочисленное программирование) [7]-[12], также используются методы нечеткой логики и оптимизация траектории генетическими алгоритмами [13]-[16].

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования

В данной статье используется алгоритм построения годографа Пифагора [17], [18], его разложение по составным полиномам Бернштейна-Безье пятой степени. Использование данного алгоритма обусловлено его простотой, легкостью дифференцирования и наличием возможности точного определения длины пути. Алгоритм позволяет построить оптимальные траектории движения группы БПЛА. По данному алгоритму легко определяются точки обхода препятствий на пути группы БПЛА, упрощается задача достижения цели на плоскости в кратчайшее время от заданной дистанции.

Математическая постановка задачи

- 1) Имеется группа из n одинаковых БПЛА. Все элементы группы покидают базу в одно и тоже время;
- 2) Между начальным и конечным положением группы имеется набор контрольных точек;
- 3) Каждый аппарат находится в центре круга безопасности радиусом R_s ;
- 4) Круги безопасности любых двух аппаратов не пересекаются;
- 5) При движении аппарата на плоскости, заданы его координаты x и y , высота $z = h = const$. Не меняется и угол Θ , ориентированный на головной аппарат.

Таким образом, необходимо задать:

- $P_0(x_{0i}; y_{0i}; \Theta_{0i})$ — начальную точку i -го БПЛА;
- $P_k(x_{ki}; y_{ki}; \Theta_{ki})$ — контрольную точку i -го БПЛА;
- $r_i(t) = [x(t), y(t)]$ — параметрическую кривую с кривизной K_i , причем $|K_i(t)| < K_{max}$.

Годограф Пифагора на плоскости

Описание годографа Пифагора представлено в работах [19]-[23]. Пусть задан радиус-вектор плоской кривой $r(t) = [x(t), y(t)]$, тогда длина данной кривой задается уравнением:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |r^0(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y(t)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} |\sigma(t)| dt. \quad (1)$$

$$\sigma^2(t) = x'^2(t) + y^2(t). \quad (2)$$

Зададим годограф Пифагора в виде двух многочленов $u(t)$ и $v(t)$ и $w(t) = 1$ [19], [24] в виде:

$$x'(t) = w(t)[u^2(t) - v^2(t)]. \quad (3)$$

$$y'(t) = 2w(t)u(t)v(t). \quad (4)$$

В данном случае:

$$\begin{aligned}\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} &= \sqrt{[w(t)(u^2(t) - v^2(t))]^2 + [2w(t)u(t)v(t)]^2} = \\ &= \sqrt{w^2(t)[u^2(t) + v^2(t)]^2}, \text{ т.е. } \sigma(t) = w(t)[u^2(t) + v^2(t)].\end{aligned}\quad (5)$$

Разложение годографа Пифагора на плоскости по кубическим многочленам Бернштейна-Безье

Представим многочлены $u(t)$ и $v(t)$ в линейном виде при условии $w(t) = 1$ [19], [24]:

$$u(t) = u_0t + u_1(1 - t). \quad (6)$$

$$v(t) = v_0 + v_1(1 - t). \quad (7)$$

Возведем оба уравнения в квадрат:

$$u^2(t) = u_0^2t^2 + u_1^2(1 - t)^2 + 2u_0u_1t(1 - t). \quad (8)$$

$$v^2(t) = v_0^2t^2 + v_1^2(1 - t)^2 + 2v_0v_1(1 - t). \quad (9)$$

Запишем уравнение годографа:

$$\begin{aligned}x'(t) &= u^2(t) - v^2(t) \text{ или } x'(t) = (u_0^2 - v_0^2)t^2 + \\ &+ (u_1^2 - v_1^2)(1 - t)^2 + 2(u_0u_1 - v_0v_1)t(1 - t).\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}y'(t) &= 2u(t)v(t) \text{ или } y'(t) = u_0v_0t^2 + \\ &+ u_1v_1(1 - t)^2 + (u_0v_1 + u_1v_0)t(1 - t).\end{aligned}\quad (11)$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t [(u_0^2 - v_0^2)t^2 + (u_1^2 - v_1^2)(1 - t)^2 + \\ &+ 2(u_0u_1 - v_0v_1)t(1 - t)] dt.\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t [u_0v_0t^2 + u_1v_1(1 - t)^2 + \\ &+ (u_0v_1 + u_1v_0)t(1 - t)] dt.\end{aligned}\quad (13)$$

Перепишем данные интегралы через многочлен Бернштейна-Безье [19]-[27]:

$$\int [C_{n-1}^k(1 - t)^{n-1-k}t^k] dt = \frac{1}{n} \sum_{j=k+1}^n C_n^j(1 - t)^{n-j}t^j. \quad (14)$$

Здесь:

$$C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}. \quad (15)$$

Через многочлены Бернштейна-Безье координаты записываются следующим образом:

$$x(t) = \sum_{k=0}^3 x_k C_3^k (1-t)^{3-k} t^k. \quad (16)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^3 y_k C_3^k (1-t)^{3-k} t^k. \quad (17)$$

Уравнения (16), (17) определяют годограф Пифагора на плоскости $r(t) = [x(t); y[-t]]$ с контрольными точками $P_k(x_k; y_k)$. Уравнения (16), (17) можно переписать в компактной форме:

$$r(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^3 p_k C_3^k (1-t)^{3-k} t^k, \quad (18)$$

здесь $k = 0, \dots, 3$; $C_3^k = \frac{3!}{k!(3-k)!}$ и $t \in [0; 1]$.

Контрольные точки годографа Пифагора [19] берутся в виде:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 + \frac{1}{3}(u_0^2 - v_0^2; 2u_0 v_0) \\ p_2 &= p_1 + \frac{1}{3}(u_0 u_1 - v_0 v_1; u_0 v_1 + u_1 v_0) \\ p_3 &= p_2 + \frac{1}{3}(u_1^2 - v_1^2; 2u_1 v_1). \end{aligned} \quad (19)$$

Составные кривые Бернштейна-Безье

Следуя работе [21], разложим годограф Пифагора по составным полиномам Бернштейна-Безье:

$$S(t) = \begin{cases} Q(t), & t \in [-1; 0] \\ B(t), & t \in [0; 1]. \end{cases} \quad (20)$$

$$Q(t) = \sum_{k=0}^3 y_{-1} k (-1)^k C_3^k t^k (1+t)^{3-k}. \quad (21)$$

$$B(t) = \sum_{k=0}^3 y_k C_3^k t^k (1-t)^{3-k}. \quad (22)$$

В этом случае многочлен $S(t)$ будет трижды дифференцируемым на отрезке $[-1; 1]$ и будет непрерывным в каждой точке.

Оптимальная форма кривой годографа Пифагора

Форма кривой годографа Пифагора при различных степенях многочленов Бернштейна-Безье не определяется однозначно из-за различных определений постоянных u_0, v_0, u_1, v_1 и т.д. [17], [19]. Поэтому определим наилучший путь, как тот, который обеспечивает минимум функционала энергии кривизны [17]:

$$E = \int K^2(S) ds = \int K^2(S) \frac{ds}{dt} dt = \int K^2(t) \sigma(t) dt \rightarrow \min, \quad (23)$$

здесь $K(S)$ — кривизна траектории БПЛА.

Согласно дифференциальной геометрии:

$$K = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r(t)|^3}. \quad (24)$$

$$|K(t)| < K_{max}, \quad (25)$$

или в обозначениях годографа Пифагора:

$$K(t) = \frac{2(u(t)v'(t) - u'(t)v(t))}{u^2(t) + v^2(t)}. \quad (26)$$

Результаты моделирования

Группа из трёх БПЛА движется в кругах безопасности по траекториям, обеспечивающим минимум функционала энергии. В численном эксперименте было представлено движение трех БПЛА от заданной точки к точке цели. Полет проходил в идеальных условиях без препятствий на пути. Каждый БПЛА ориентируясь на точки начала движения цели, построил свою траекторию по пяти опорным точкам траектории ведущего БПЛА 1, представленного на рисунке, используя алгоритм описанный выше. Таким образом показано, что представленный алгоритм вполне удовлетворительно справляется с задачей построения траектории движения группы БПЛА.

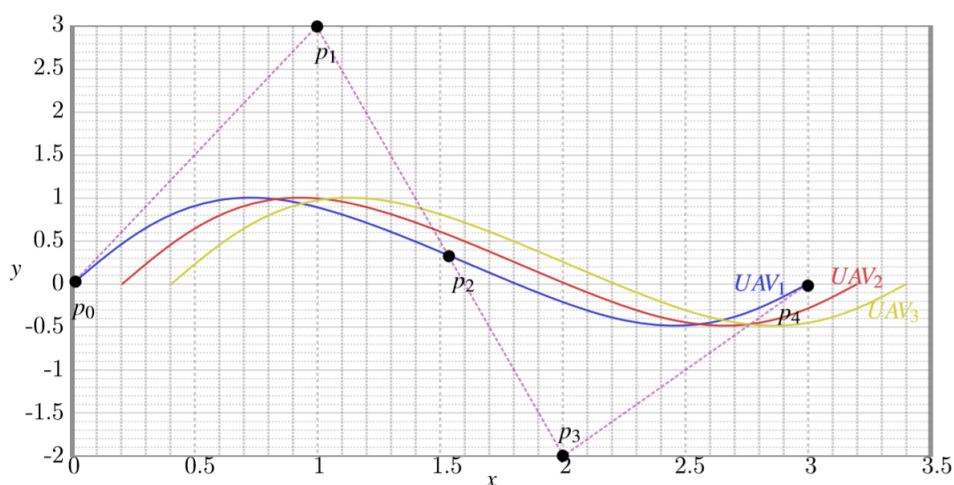


Рисунок. Траектории минимума функционала энергии для БПЛА1, БПЛА2, БПЛА3

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Список литературы/References

- [1] Kolushev A., Bodanov A., "Multiple-Agent Optimal Path Planning for Mobile Robot in Environment with Obstacles", *Proceedings of the third international Andrei Ershov memorial conference on Perspective System Informatics*, 1999, 503-510.
- [2] Tarapata Z., "Military Route Planning in Battle Field Simulation, Effectiveness Problem and Potential Solution", *Proceeding of 4th WSEAS international conference on Computer Engineering and Application CEA 10.*, 2003, 47-56.
- [3] Hart P., Nilsson N., "A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths", *Syst Sci Cybern*, **2** (1968), 100-107.
- [4] Yang D., Hong S., "Road Map Construction Algorithm for Mobile Robot Path Planning using Skeleton Map", *Advance Robotic*, **21** (2007), 51-63.
- [5] Tokuta A., "Extending the Visibility Graph Algorithm for Robot Path Planning", *Technical Report Department of Mathematics and Computer Science*.
- [6] Santos R., Steffen V., "Robot Path Planning in Constrained Work Space using Optimal Control Techniques", *Multibody System Dynamics*, 2006, 159-177.
- [7] Constantinescu D., Croft E., "Robot Smooth and Time Optimal Trajectory Planning for Industrial Manipulators along Specified Paths", *J. Robotics syst.*, **17** (2000), 223-249.
- [8] Vukdbralovic M., Kircanski M., "One Method for simplified Manipulator Model Construction and its Application in Quazioptimal Trajectory Synthesis", *Mechanism and Machine Theory*, **17** (1982), 369-378.
- [9] Pfeifer F., Johanni A., "Concept for Manipulator Trajectory Planning. IEEE Trans", *IEEE Trans Robotic Automat* 3(3), 1987, 115-123.
- [10] Singh S., Leu C., "Optimal Trajectory Generation for Robot Manipulators Using Dynamic Programming", *J. Dyn. Sys. Meas Control* 109 (2), 1987, 88-96.
- [11] Lee M., Takagi H., "Integrating Design Stages of Fuzzy Systems Using Genetic Algorithms", *Proc. 2nd IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems, San Francisco*, 1993, 612-617.
- [12] Belarbi K., Titel F., "Genetic algorithm for the design of a class of fuzzy controllers: An alternative approach", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **8** (2000), 398-405.
- [13] Goldberg D., *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. 75 Arlington Street, Suite 300 Boston, MA United States, 1989, 372 c.
- [14] Whitley D., *A Genetic Algorithm Tutorial*, Technical Report CS-93-103, Dept. of Computer Science, Colorado State University., 1994.
- [15] Subchan S., White B. et al., "Pythagorean Hodograph (PH) path planning for tracking airborne contaminant using sensor swarm.", *Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceeding 2008, IMTC 2008*, 2008, 501-506.
- [16] Armando A., Campos F., "A Path Planning Algorithm for UAVs with Limited Climb Angle", *The 2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems October 11-15, 2009 St. Louis, US*, 2009.
- [17] Farouki R., Sakkalis T., "Pythagorean hodographs", *IBM Journal of Research and Development*, 1990, № 5, 736-752.
- [18] Farouki R., Neff C., "Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics", *Mathematics of Computation*, 1995, 1589-1609.
- [19] Moon H., Farouki C. et al., "Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants", *Comput. Aided Geom. Design.*, 2001, № 2, 93-115.
- [20] Farouki R., "The elastic bending energy of Pythagorean hodograph curves", *Comput. Aided Geom. Design.*, 1996, № 2, 227-241.

- [21] Григорьев М., Малоземов В., “Полиномы Бернштейна и составные кривых Безье”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2006, 1962–1971. [Grigor’ev M., Malozemov V., “Polinomy Bernshteyna i sostavnye krivyykh Bez’e.”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, 2006, 1962–1971].
- [22] Kozak J., Knez M. et al., “On interpolation by planar cubic G2 Pythagorean-hodograph spline curves”, *Mathematics of Computation*, 2010, 305–326.
- [23] Singh I., Achille M. et al., “Modeling of Continuum Manipulators Using Pythagorean Hodograph Curves”, *Soft Robotics*, 2018.
- [24] Dhulkefl E., Durdu A. et al., “Path Planning Algorithms for Unmanned Aerial Vehicles”, *International Journal of Trend in Scientific Research and Development*, **3**:4 (2019), 359–362.
- [25] Wang X., Meng X. et al., “UAV Online Path Planning Based on Improved Genetic Algorithm”, *2019 Chinese Control Conference (CCC), Guangzhou*, 2019, 4101-4106.
- [26] Wu C., Chiu Z. et al., “Time-Optimal Trajectory Planning along Parametric Polynomial Lane-Change Curves with Bounded Velocity and Acceleration: Simulations for a Unicycle Based on Numerical Integration”, *Modelling and Simulation in Engineering*, 2018, 1-19.
- [27] Ma J., Liu Y. et al., “Robot Path Planning Based on Genetic Algorithm Fused with Continuous Bezier Optimization”, *Comput Intell Neurosci*, 2020, 1-10.

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Kolushev A., Bodanov A. Multiple-Agent Optimal Path Planning for Mobile Robot in Environment with Obstacles // Proceedings of the third international Andrei Ershov memorial conference on Perspective System Informatics. 1999. pp. 503-510.
- [2] Tarapata Z. Military Route Planning in Battle Field Simulation, Effectiveness Problem and Potential Solution // Proceeding of 4th WSEAS international conference on Computer Engineering and Application CEA 10. 2003. pp. 47-56.
- [3] Hart P., Nilsson N. A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths // Syst Sci Cybern. 1968. no. 2. pp. 100-107.
- [4] Yang D., Hong S. Road Map Construction Algorithm for Mobile Robot Path Planning using Skeleton Map // Advance Robotic. 2007. vol. 21. pp. 51-63.
- [5] Tokuta A. Extending the Visibility Graph Algorithm for Robot Path Planning // Technical Report Department of Mathematics and Computer Science.
- [6] Santos R., Steffen V. Robot Path Planning in Constrained Work Space using Optimal Control Techniques // Multibody System Dynamics. 2006. pp. 159-177.
- [7] Constantinescu D., Croft E. Robot Smooth and Time Optimal Trajectory Planning for Industrial Manipulators along Specified Paths // J. Robotics syst. 2000. vol. 17. pp. 223-249.
- [8] Vukdbralovic M., Kircanski M. One Method for simplified Manipulator Model Construction and its Application in Quasioptimal Trajectory Synthesis // Mechanism and Machine Theory. 1982. vol. 17. pp. 369-378.
- [9] Pfeifer F., Johanni A. Concept for Manipulator Trajectory Planning. IEEE Trans // IEEE Trans Robotic Automat. 1987. vol. 3(3). pp. 115-123.
- [10] Singh S., Leu C. Optimal Trajectory Generation for Robot Manipulators Using Dynamic Programming // J. Dyn. Sys. Meas Control. 1987. vol. 109. no. 2. pp. 88-96.
- [11] Lee M., Takagi H. Integrating Design Stages of Fuzzy Systems Using Genetic Algorithms // Proc. 2nd IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems, San Francisco. 1993. pp. 612-617.
- [12] Belarbi K., Titel F. Genetic algorithm for the design of a class of fuzzy controllers: An alternative approach // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2000. no. 8. pp. 398-405.
- [13] Goldberg D. Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. United States: Addison-Wesley Longman Publishing, 1989. 372 p.

- [14] Whitley D. A Genetic Algorithm Tutorial // Technical Report CS-93-103, Dept. of Computer Science, Colorado State University. 1994. pp. 65-85.
- [15] Subchan S., White B. et al. Pythagorean Hodograph (PH) path planning for tracking airborne contaminant using sensor swarm // Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceeding, 2008. pp. 501-506.
- [16] Armando A., Campos F. A Path Planning Algorithm for UAVs with Limited Climb Angle // The 2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems October 11-15, 2009 St. Louis, US. 2009.
- [17] Farouki R., Sakkalis T. Pythagorean hodographs // IBM Journal of Research and Development. 1990. no. 5. pp. 736-752.
- [18] Farouki R., Neff C. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics // Mathematics of Computation. 1995. pp. 1589-1609.
- [19] Moon H., Farouki C. et al. Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants // Comput. Aided Geom. Design. 2001. no. 2. pp. 93-115.
- [20] Farouki R. The elastic bending energy of Pythagorean hodograph curves // Comput. Aided Geom. Design. 1996. no. 2. pp. 227-241.
- [21] Григорьев М., Малоземов В. Полиномы Бернштейна и составные кривые Безье // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. С. 1962–1971
- [22] Kozak J., Knez M. et al. On interpolation by planar cubic G2 Pythagorean-hodograph spline curves // Mathematics of Computation. 2010. pp. 305–326.
- [23] Singh I., Achille M. et al. Modeling of Continuum Manipulators Using Pythagorean Hodograph Curves // Soft Robotics. 2018
- [24] Dhulkeif E., Durdu A. et al. Path Planning Algorithms for Unmanned Aerial Vehicles // International Journal of Trend in Scientific Research and Development. 2019. vol. 4. no 3. pp. 359–362.
- [25] Wang X., Meng X. et al. UAV Online Path Planning Based on Improved Genetic Algorithm // Chinese Control Conference (CCC), Guangzhou. 2019. pp. 4101-4106.
- [26] Wu C., Chiu Z. et al. Time-Optimal Trajectory Planning along Parametric Polynomial Lane-Change Curves with Bounded Velocity and Acceleration: Simulations for a Unicycle Based on Numerical Integration // Modelling and Simulation in Engineering. 2018. pp. 1-19.
- [27] Ma J., Liu Y. et al. Robot Path Planning Based on Genetic Algorithm Fused with Continuous Bezier Optimization // Comput Intell Neurosci. 2020. pp. 1-10.

MSC 65D07

Research Article

The planning of the trajectory of UAV group with the performance of Pythagorean Hodograph and Bernstein-Bezier composite curves in the plane

D. L. Vinokursky, K. Y. Ganshin, O. S. Mezentseva, Ph. V. Samoylov

Federal State Autonomous Educational Institution for Higher Education "North-Caucasus Federal University Stavropol, 355017, Pushkin st.1, Russia

E-mail: info@ncfu.ru

In this article, the method of trajectory building of motion of unmanned aerial vehicles group by approximation of Pythagorean Hodograph and Bernstein-Bezier composite polynomials has been presented.

Key words: unmanned aerial vehicles, Bernstein-Bezier polynomial, Pythagorean Hodograph

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-70-78

Original article submitted: 22.05.2020

Revision submitted: 05.06.2020

For citation. Vinokursky D. L., Ganshin K. Y., Mezentseva O. S., Samoylov Ph. V. The planning of the trajectory of UAV group with the performance of Pythagorean Hodograph and Bernstein-Bezier composite curves in the plane. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **31**: 2, 70-78. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-70-78

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Vinokursky D. L. et al, 2020

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors