Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 31. № 2. C. 8-17. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.6 Научная статья

Об однозначной разрешимости одной полунелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения Чаплыгина в прямоугольнике

С. З. Джамалов[1,2], Р. Р. Ашуров[1], М. А. Султанов[3], У. Ш. Рузиев[2]

[1] Институт Математики имени В. И. Романовского Академии наук Узбекистана, г. Ташкент, ул. Мирзо Улугбека 85, 100170, Узбекистан

[2] Филиал РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина в г. Ташкенте, 100125, г. Ташкент Мирзо-Улугбекский район, ул Дурмон йули, д. 34

[3] Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, г. Туркестан, Казахстан

E-mail: siroj63@mail.ru, ashurovr@gmail.com

В данной работе при некоторых условиях на коэффициенты нагруженного уравнения Чаплыгина в прямоугольнике доказывается однозначная разрешимость одной полунелокальной краевой задачи в пространстве Соболева.

Ключевые слова: нагруженное уравнение Чаплыгина, полунелокальная краевая задача, корректность решения, методы "ε-регуляризации", последовательных приближений, Галеркина, априорных оценок и теоремы вложения Соболева.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-8-17

Поступила в редакцию: 30.04.2020 В окончательном варианте: 02.06.2020

Для цитирования. Джамалов С. З., Ашуров Р. Р., Султанов М. А., Рузиев У. Ш. Об однозначной разрешимости одной полунелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения Чаплыгина в прямоугольнике // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 31. № 2. C. 8-17. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-8-17

Введение

Теория краевых задач для нагруженных уравнений смешанного типа, в силу теоретической и прикладной важности, является одним из интенсивно развивающихся разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными и привлекает к себе внимание многих исследователей, интересующихся как самой теорией, так и её приложениями. Многие весьма важные задачи математической физики и биологии, в частности задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод, задачи тепломассопереноса с конечной скоростью, движения

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования

мало сжимаемой жидкости, окруженной пористой средой, оптимального управления агроэкосистемой, приводят к краевым задачам для нагруженных уравнений с частными производными. Исследование краевых задач для нагруженных уравнений с частными производными более подробно изложено в работах [1]-[3]. К настоящему времени достаточно хорошо изучены краевые задачи для модельных нагруженных уравнений в плоскости, когда нагруженные части задаются следами искомой функции или первые нормальные производные от следов искомой функции [1]-[8]. Мало изученными, являются краевые задачи для уравнений смешанного типа, в частности для уравнений Трикоми или Чаплыгина когда на нагруженной части уравнения задаются не только следы искомой функции или первые нормальные производные от следов искомой функции, но и следы вторых производных искомых решений уравнений в частных производных [9]. Отметим, что классическими методами в случае, когда рассматриваемые уравнений задаются следами вторых производных искомых решений уравнений, невозможно свести поставленную задачу к интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям. В связи с этим, предлагается новый метод решения нагруженных уравнений смешанного типа, когда в нагруженной части уравнения содержатся не только следы искомой функции (решение уравнений) или первые нормальные производные от следов искомой функции, но и следы вторых производных от искомых решений. В данной работе доказывается однозначная разрешимость некоторой полунелокальной краевой задачи для нагруженного уравнения Чаплыгина, в пространстве Соболева.

Пусть Ω — есть интервал $(-1,1)$ оси Ox. В прямоугольнике $Q=\Omega\times(0,T)=\{(x,t): x\in\Omega, 0<t<T<+\infty\}\subset\mathbb{R}^2$, рассмотрим нагруженное уравнение Чаплыгина второго порядка.

$$Lu=K(x)u_{tt}-u_{xx}+a(x,t)u_t+c(x,t)u=f(x,t)+P[u(x,0)], \tag{1}$$

где $P[u(x,0)]=\sum\limits_{i=0}^{2} b_i(x,t)\dfrac{\partial^i u(x,0)}{\partial x^i}$ и $xK(x)>0$ при $x\neq 0,\ -1<x<1$.

Будем предполагать, что все коэффициенты уравнения (1), встречающиеся в статье, вещественнозначные и достаточно гладкие функции.

Полунелокальная краевая задача. Найти решение уравнения (1) из пространства Соболева $W_2^3(Q)$ удовлетворяющее следующим краевым условиям

$$\gamma D_t^p u|_{t=0}=D_t^p u|_{t=T}, \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega}=0, \tag{3}$$

где $p=0,1;\quad \gamma - const\neq 0.$

В дальнейшем для изучения задачи (1)-(3) нам необходимы следующие определения и вспомогательные предложения.

Через $W_2^m(Q)$ $(m=0,1,2,3,\ldots)$ обозначим пространство Соболева со скалярным произведением $(f,g)_m$ и нормой $\|f\|_{W_2^m(Q)}=\|f\|_m$. Здесь $W_2^0(Q)=L_2(Q)$ — пространство квадратично суммируемых функций. Через $\|u(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)}=\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx$ и также $\|u(x,t)\|^2_{L_2(Q)}=\int\limits_{Q} u^2dxdt$ обозначим нормы в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(Q)$ соответственно [10]-[12].

Отметим, что впервые в работе Т. Ш. Кальменова [13] для уравнения (1) изучена полупериодическая задача в случае, когда $P[u(x,0)]\equiv 0$ и $\gamma=1$ в пространствах Соболева.

Вначале статьи, как в работах [14, 15], изучим полунелокальную краевую задачу в случе, когда $P[u(x,0)] \equiv 0$ и $\gamma \neq 1$. При выполнении некоторых условий на коэффициенты и правую часть уравнения (1), докажем однозначную разрешимость и гладкость обобщенного решения полунелокальной краевой задачи (2),(3) в пространствах Соболева $W_2^{m+2}(Q)$, где $0 \leq m$ — целое число.

Теорема 1. (О гладкости) *Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть* $2a + \lambda K(x) \geq \delta_1 > 0$; $\lambda \cdot c - c_t \geq \delta_2 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$, $D_t^p a|_{t=0} = D_t^p a|_{t=T}$; $D_t^p c|_{t=0} = D_t^p c|_{t=T}$ *для всех* $x \in \overline{\Omega}$. *Тогда для любой функции* $f(x,t)$, *такой, что* $f \in W_2^{m+1}(Q)$, $\gamma D_t^p f|_{t=0} = D_t^p f|_{t=T}$, *где* $(p = 0,1,2,\ldots,m)$, *существует, причем единственное решение задачи (1)-(3) в пространствах Соболева* $W_2^{m+2}(Q)$, *где* $0 \leq m$ — *целое число.*

В работе [9] для уравнения (1) в прямоугольнике изучена нелокальная краевая задача по переменным t и x. Теперь используя теорему 1, изучим полунелокальную краевую задачу в случае, когда $P[u(x,0)] \not\equiv 0$, $\gamma \neq 1$. При выполнении некоторых условий на коэффициенты нагруженного уравнения (1) докажем однозначную разрешимость задачи (1)-(3) в пространстве Соболева $W_2^3(Q)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены вышеуказанные условия для коэффициентов уравнения (1), кроме того, пусть* $2a + \lambda K(x) \geq \delta_1 > 0$, $\lambda \cdot c - c_t \geq \delta_2 > 0$ *для всех* $(x,t) \in \overline{Q}$, *где* $\lambda = \frac{2}{T}\ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$, $D_t^p a|_{t=0} = D_t^p a|_{t=T}$; $D_t^p c|_{t=0} = D_t^p c|_{t=T}$ $(p = 0,1)$ *для всех* $x \in \overline{\Omega}$ *и пусть существует положительное, малое число* σ *такое, что* $\delta_0 - \sigma \geq \delta_* > 0$ *и* $2\rho \equiv M\|b\|^2_{C^1(\overline{Q})} < \delta_*$ *(где* $\delta_0 = \min\{\delta_i, i = 1,2; \lambda\}$, $\|b\|_{C^1(\overline{Q})} = \max\{|b_i|, |b_{it}|, i = 0,1,2\}$, M — *постоянное число, зависящее от* $(\sigma^{-1}, \lambda, T, \gamma)$). *Тогда для любой функции* $f \in W_2^2(Q)$ *такой, что* $\gamma D_t^p f|_{t=0} = D_t^p f|_{t=T}$ *где* $(p = 0,1)$ *существует единственное решение задачи (1)-(3) в пространстве Соболева* $W_2^3(Q)$.

Семейство нагруженных уравнений третьего порядка. Разрешимость задачи (1)-(3) докажем методом "ε- регуляризации", а именно в области Q рассмотрим семейство нагруженных уравнений третьего порядка [9, 16].

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = -\varepsilon \frac{\partial^3 u_\varepsilon}{\partial t^3} + Lu_\varepsilon = f + P[u_\varepsilon(x,0)] \equiv F_\varepsilon; \tag{4}$$

$$\gamma D_t^q u_\varepsilon|_{t=0} = D_t^q u_\varepsilon|_{t=T}; \; q = 0,1,2, \tag{5}$$

$$u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \tag{6}$$

где ε — малое положительное число, γ— некоторое постоянное число удовлетворяющее условие $|\gamma| > 1$.

Через $W(Q)$ ниже будем обозначать пространство функций $\vartheta(x,t)$ таких, что $\vartheta \in W_2^3(Q)$, $\vartheta_{tttt} \in L_2(Q)$ и удовлетворяющих соответствующим условиям (5),(6). Норму в этом пространстве определим следующим образом

$$\|\vartheta\|^2_{W(Q)} = \|\vartheta\|^2_{W_2^3(Q)} + \frac{\varepsilon}{\delta_*}\left\|\frac{\partial^4\vartheta}{\partial t^4}\right\|^2_{L_2(Q)}$$

Очевидно, что пространство $W(Q)$ с заданной нормой является банаховым [11, 12].

Определение. Решением задачи (4)-(6) будем называть функцию $\{u_\varepsilon\} \in W(Q)$ удовлетворяющую уравнению (4) почти всюду в области Q.

При доказательстве разрешимости задачи (4)-(6) нам необходима следующая

Лемма 1. *Пусть функция $u(x,t) \in W(Q)$. Тогда справедливы следующие неравенства*

$$\|u(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_0 \|u_t\|^2_{L_2(Q)}, \ \|u_x(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_1 \|u_{tx}\|^2_{L_2(Q)},$$
$$\|u_{xx}(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)} \le c_2 \|u_{txx}\|^2_{L_2(Q)}.$$

Здесь и далее через $c_j (j = 0,1,2)$ обозначены некоторые постоянные числа, зависящие от параметров T, γ.

Неравенства доказывается совершенно аналогично с доказательством неравенства Пуанкаре-Фридрихса, используя неравенству Коши с σ [11].

Разрешимость задачи (4)-(6) докажем методами априорных оценок и последовательных приближений, а именно в области Q рассмотрим семейство, бесконечное число нагруженных уравнений третьего порядка [9].

$$L_\varepsilon u_\varepsilon^{(l)} = -\varepsilon \frac{\partial^3 u_\varepsilon^{(l)}}{\partial t^3} + L u_\varepsilon^{(l)} = f + P[u_\varepsilon^{(l-1)}(x,0)] \equiv F_\varepsilon^{(l-1)}; \tag{7}$$

$$\gamma D_t^q u_\varepsilon^{(l)}\Big|_{t=0} = D_t^q u_\varepsilon^{(l)}\Big|_{t=T}, \quad q = 0,1,2 \tag{8}$$

$$u_\varepsilon^{(l)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{9}$$

где $l = 0,1,2,3,\ldots$.

Лемма 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 2, тогда для решения задачи (7)-(9) справедлива следующая первая априорная оценка*

$$(I). \left\|u_\varepsilon^{(l)}\right\|^2_W \le \|f\|_2^2 \cdot const(\widehat{l}); \ \forall l = 0,1,2,\ldots$$

Символом $const(\widehat{l})$ здесь и далее обозначим постоянную, не зависящую от l.

Доказательство. С помощью метода индукции докажем справедливость первой априорной оценки.

"ШАГ-0". В качестве "нулевого приближения"возьмем функцию $u_\varepsilon^{(0)}$ как решение следующей задачи [14, 15].

$$L_\varepsilon u_\varepsilon^{(0)} = -\varepsilon \frac{\partial^3 u_\varepsilon^{(0)}}{\partial t^3} + L u_\varepsilon^{(0)} = f; \tag{10}$$

$$\gamma D_t^q u_\varepsilon^{(0)}\Big|_{t=0} = D_t^q u_\varepsilon^{(0)}\Big|_{t=T}, \quad q = 0,1,2 \tag{11}$$

$$u_\varepsilon^{(0)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{12}$$

Докажем справедливость первой оценки. Рассмотрим следующее тождество:

$$2(L_\varepsilon u_\varepsilon^{(0)}, e^{-\lambda t} P u_\varepsilon^{(0)})_0 = 2(f, e^{-\lambda t} P u_\varepsilon^{(0)})_0, \tag{13}$$

Здесь $Pu_\varepsilon^{(0)} = (\mu u_{\varepsilon t}^{(0)} - u_{\varepsilon ttt}^{(0)} + \lambda \Box u_\varepsilon^{(0)})$; $\Box u_\varepsilon^{(0)} = u_{\varepsilon tt}^{(0)} - u_{\varepsilon xx}^{(0)}$, где $\lambda, \mu - const$; $\lambda > 0, \mu > 0$, и $(\cdot,\cdot)_0$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$. Используя результаты работы [14, 15], учитывая полунелокальные краевые условие (11), (12) и условии теоремы 2, интегрируя по частям тождество (13),получим для функции $u_\varepsilon^{(0)}$ следующую априорную оценку

$$\frac{\varepsilon}{\delta_*} \cdot \left\|\frac{\partial^3 u_\varepsilon^{(0)}}{\partial t^3}\right\|^2_0 + \left\|u_\varepsilon^{(0)}\right\|^2_2 \le \quad c(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2) \le c\|f\|_1^2. \tag{14}$$

Далее, учитывая условия теоремы 2 и полунелокальные краевые условие (11),(12), при $\varepsilon > 0$, $t = 0, t = T$ из равенства

$$(e^{-\frac{\lambda t}{2}} \cdot L_\varepsilon u_\varepsilon^{(0)})\,|_{t=0}^{t=T} = (-\varepsilon \cdot e^{\frac{-\lambda t}{2}} \cdot \frac{\partial^3 u_\varepsilon^{(0)}}{\partial t^3} + e^{\frac{-\lambda t}{2}} \cdot L u_\varepsilon^{(0)})\,|_{t=0}^{t=T} = (e^{\frac{-\lambda t}{2}} \cdot f(x,t))\,|_{t=0}^{t=T} \tag{15}$$

получим следуюшие условие

$$\gamma u_{\varepsilon ttt}^{(0)}(x,0) = u_{\varepsilon ttt}^{(0)}(x,T). \tag{16}$$

Отсюда следует, что функция $\vartheta_\varepsilon^{(0)}(x,t) = u_{\varepsilon\ t}^{(0)}(x,t)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$P_\varepsilon \vartheta_\varepsilon^{(0)} = L_\varepsilon\, \vartheta_\varepsilon^{(0)} + K_t\, \vartheta_{\varepsilon t}^{(0)} = f_t - \alpha_t\, u_{\varepsilon\ t}^{(0)} - c_t\, u_\varepsilon^{(0)} = F_\varepsilon. \tag{17}$$

с полунелокальными краевыми условиями (11),(12),(16). Из условий теоремы 2 и оценок (14) следует, что семейство функций $\{F_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в пространстве $L_2(Q)$, то есть справедлива оценка

$$\|F_\varepsilon\|_0^2 \le c\left(\|f\|_0^2 + \|f_t\|_0^2\right).$$

Далее, так как коэффициенты оператора $P_\varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 2 учитывая оценку (14) для функции $\vartheta_\varepsilon^{(0)}$ получим аналогичные оценки

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial^3 \vartheta_\varepsilon^{(0)}}{\partial t^3} \right\|_0^2 + \left\| \vartheta_\varepsilon^{(0)} \right\|_2^2 = \varepsilon \left\| \frac{\partial^4 u_\varepsilon^{(0)}}{\partial t^4} \right\|_0^2 + \left\| u_{\varepsilon t}^{(0)} \right\|_2^2 \le c\,(\|f\|_1^2 + \|f_{tt}\|_0^2) \le c\,\|f\|_2^2. \tag{18}$$

Далее, функция $u_\varepsilon^{(0)}$ удовлетворяет параболическому уравнению

$$u_{\varepsilon t}^{(0)} - u_{\varepsilon xx}^{(0)} = f + \varepsilon\, \frac{\partial^3 u_\varepsilon^{(0)}}{\partial\, t^3} - K(x)\, u_{\varepsilon tt}^{(0)} - (a-1)\, u_{\varepsilon t}^{(0)} - c\, u_\varepsilon^{(0)} = \Phi_\varepsilon, \tag{19}$$

с полунелокальными краевыми условиями

$$\gamma u_\varepsilon^{(0)}\Big|_{t=0} = u_\varepsilon^{(0)}\Big|_{t=T}, \tag{20}$$

$$u_\varepsilon^{(0)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{21}$$

причем $\Phi_\varepsilon \in W_2^1(Q)$, а в силу выше доказанного, семейство функций $\{\Phi_\varepsilon\}$ равномерно ограничено в пространстве $W_2^1(Q)$, т.е.

$$\|\Phi_\varepsilon\|_1^2 \le c\left(\|f\|_1^2 + \|f_{tt}\|_0^2\right) \le c\,\|f\|_2^2. \tag{22}$$

Отсюда на основании априорных оценок для параболических уравнений [11] и неравенства (22) получим

$$\left\| u_\varepsilon^{(0)} \right\|_3^2 \le c\,\|f\|_2^2. \tag{23}$$

Суммируя оценки (14),(18),(22), получим первую оценку для $u_\varepsilon^{(0)}$ — решения задачи (10)-(12), то есть

$$\left\| u_\varepsilon^{(0)} \right\|_W^2 \le c\,\|f\|_2^2.$$

"ШАГ-1".

Подставляя рассмотренное выше решение $u_\varepsilon^{(0)}$ в правую часть уравнения (7), из (7)-(9), получим для функции $u_\varepsilon^{(1)}$ следующую задачу

$$L_\varepsilon u_\varepsilon^{(1)} = -\varepsilon \frac{\partial^3 u_\varepsilon^{(1)}}{\partial t^3} + L u_\varepsilon^{(1)} = f + P[u_\varepsilon^{(0)}(x,0)] \equiv F_\varepsilon^{(0)}; \tag{24}$$

$$\gamma D_t^q u_\varepsilon^{(1)}\Big|_{t=0} = D_t^q u_\varepsilon^{(1)}\Big|_{t=T}, \quad q = 0,1,2, \tag{25}$$

$$u_\varepsilon^{(1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{26}$$

Применяя результаты "ШАГ-0"и оценки леммы 1, получим для решения $u_\varepsilon^{(1)}$ задачи (24)-(26) следующую априорную оценку

$$\left\| u_\varepsilon^{(1)} \right\|_W^2 = \frac{\varepsilon}{\delta_*} \left\| \frac{\partial^4 u_\varepsilon^{(1)}}{\partial t^4} \right\|_0^2 + \left\| u_\varepsilon^{(1)} \right\|_{W_3^3(Q)}^2 \leq \ c_0 \|f\|_{L_2(Q)}^2 + c_1 \left\| P u_\varepsilon^{(0)} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq$$

$$\leq c_0 \|f\|_{W_2^2(Q)}^2 + \frac{\rho}{\delta_*} \left\| u_\varepsilon^{(0)} \right\|_{W_2^3(Q)}^2 \leq c_2 \|f\|_{W_2^2(Q)}^2,$$

"ШАГ-l".

Продолжая этот процесс, для решения задачи (7)-(9), учитывая условия теоремы 2 и оценки леммы 1, методом индукции получим следующую рекуррентную формулу

$$\left\| u_\varepsilon^{(l)} \right\|_W^2 \leq \ c \|f\|_2^2 + \frac{\rho}{\delta_*} \left\| u_\varepsilon^{(l-1)} \right\|_3^2 \leq c \|f\|_2^2 + \frac{\rho}{\delta_*} \left\| u_\varepsilon^{(l-1)} \right\|_W^2,$$

отсюда для функции $u_\varepsilon^{(l)}$,$\forall\ l \geq 2$ получим первую априорную оценку:

$$\left\| u_\varepsilon^{(l)} \right\|_W^2 \leq \|f\|_2^2 const(\widehat{l}).$$

Лемма 2 доказана. □

Теперь введём новую функцию в пространстве W по формуле $\vartheta_\varepsilon^{(l)} = u_\varepsilon^{(l)} - u_\varepsilon^{(l-1)}$, $\varepsilon > 0;\ \ l = 1,2,3,\ldots$.

Тогда для неё справедлива следующая.

Лемма 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2 и лемм 1 и 2. Тогда для функции $\vartheta_\varepsilon^{(l)} \in W(Q)$ справедлива следующая, вторая оценка*

$$(II). \quad \left\| \vartheta_\varepsilon^{(l)} \right\|_W^2 \ \leq\ \left(\frac{\rho}{\delta_*}\right)^{(l)} const(\widehat{l}), l = 0,1,2,3,\ldots$$

Доказательство. Из (7)-(9) для функции $\vartheta_\varepsilon^{(l)} \in W$ получим следующую задачу

$$L_\varepsilon \vartheta_\varepsilon^{(l)} = -\varepsilon \frac{\partial^3 \vartheta_\varepsilon^{(l)}}{\partial t^3} + L \vartheta_\varepsilon^{(l)} = P[\vartheta_\varepsilon^{(l)}(x,0)]; \tag{27}$$

$$\gamma D_t^q \vartheta_\varepsilon^{(l)}\Big|_{t=0} = D_t^q \vartheta_\varepsilon^{(l)}\Big|_{t=T}, \quad q = 0,1,2 \tag{28}$$

$$\vartheta_{\varepsilon}^{(l)}\Big|_{\partial\Omega}=0, \tag{29}$$

Так как для функции $u_{\varepsilon}^{(l)}\in W;\ \varepsilon>0;\ \ \forall l=0,1,2,3,\ldots$ справедлива первая оценка, то, повторяя рассуждения лемм 1 и 2, для решения задачи (27)-(29) учитывая условия теоремы 2, методом индукции получим следующую рекуррентную формулу

$$\left\|\vartheta_{\varepsilon}^{(l)}\right\|_{W}^{2}\leq\ \ \frac{\rho}{\delta_{*}}\left\|\vartheta_{\varepsilon}^{(l-1)}\right\|_{3}^{2}\leq\frac{\rho}{\delta_{*}}\left\|\vartheta_{\varepsilon}^{(l-1)}\right\|_{W}^{2}.$$

Полагая, что $\vartheta_{\varepsilon}^{(0)}=u_{\varepsilon}^{(0)}$, для функции $\vartheta_{\varepsilon}^{(l)}$, $\forall l\geq 2,\quad l=2,3,\ldots$ получим вторую априорную оценку, то есть

$$\left\|\vartheta_{\varepsilon}^{(l)}\right\|_{W}^{2}\ \leq\ (\frac{\rho}{\delta_{*}})^{(l)}\ const(\widehat{l}).$$

Лемма 3 доказана. □

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда задача (4)-(6) однозначно разрешима в пространстве $W(Q)$.*

Доказательство. Теорему 3 докажем методом сжимающихся отображений [12]. Если правая часть уравнения (7) известно, то, как показано в работах [9, 14, 15], решение задачи (7)-(9), существует и единственно в пространстве $W(Q)$. Следовательно, в W определим оператор, R по формуле

$$u_{\varepsilon}^{(l)}=L_{\varepsilon}^{-1}F_{\varepsilon}^{(l-1)}\equiv Ru_{\varepsilon}^{(l-1)}.$$

Из утверждения леммы 2 следует, что оператор R отображает пространство $W(Q)$ в себя, то есть $R:W(Q)\to W(Q)$. Из утверждения леммы 3 следует, что R — сжимающий оператор. Таким образом, по известному принципу сжимающих отображений [12], задача (4)-(6) имеет единственное решение $u_{\varepsilon}(x,t)=\lim\limits_{l\to\infty}u_{\varepsilon}^{(l)}(x,t)$, принадлежащее пространству W. Тем самым доказана теорема 3. □

Существование решение задачи (1)-(3). Метод "ε-регуляризации".

Существование решения задачи (1)-(3) докажем методом "ε —регуляризации".

Доказательство. Пусть $u_{\varepsilon}(x,t)\in W(Q)$ при фиксированном $\varepsilon>0$ есть единственное решение задачи (4)-(6). Тогда при $\varepsilon>0$ для функции $u_{\varepsilon}(x,t)$ справедлива первая и вторая оценка. По теореме о слабой компактности [11, 12], из ограниченной последовательности $\{u_{\varepsilon}\}$ можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность функции $\{u_{\varepsilon_j}\}$, такую, что $u_{\varepsilon_j}\to u$ слабо в W при $\varepsilon_j\to 0$. Покажем, что предельная функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в $W\,^{3}_{2}(Q)$ почти всюду [9, 14, 15, 16]. Действительно, так как под последовательность $\{u_{\varepsilon_j}\}$ сходится слабо в $W(Q)$ и подпоследовательность $\sqrt{\varepsilon_j}\left\|\frac{\partial^3 u_{\varepsilon_j}}{\partial t^3}\right\|_0$ равномерно ограничено в $L_2(Q)$ а оператор $L-$ линеен, то имеем

$$Lu-f-Pu(x,0)=\varepsilon_j\frac{\partial^3 u_{\varepsilon_j}}{\partial t^3}+L(u_{\varepsilon_j}-u)+P[u_{\varepsilon}(x,0)-u(x,0)]. \tag{30}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon_j\to 0$, в тождестве (30) получаем $Lu=f+P[u(x,0)]$ в $W\,^{3}_{2}(Q)$ почти всюду [9, 16]. Следовательно, доказана разрешимость задачи (1)-(3). Тем самым доказана теорема 2. □

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы участвовали в написании статьи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ряд замечаний, которые способствовали улучшению статьи.

Список литературы/References

[1] Дженалиев М. Т., *К теории краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений*, Институт теоретической и прикладной математики, Алматы, 1995. [Dzhenaliyev M. T., *K teorii krayevykh zadach dlya nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy*, Institut teoreticheskoy i prikladnoy matematiki, Almaty, 1995].

[2] Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения, *Дифференциальные уравнения*, **19**:1 (1983), 86-94. [Nakhushev A. M. Nagruzhennyye uravneniya i ikh prilozheniya, *Differentsial'nyye uravneniya*, **19**:1 (1983), 86-94 Свернуть].

[3] Нахушев А. М., *Нагруженные уравнения и их применения*, Наука, М, 2012, 232 с. [Nakhushev A. M., *Nagruzhennyye uravneniya i ikh primeneniya*, Nauka, M, 2012, 232 pp.]

[4] Дзарахохов А. В., Елеев В. А., "Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения третьего порядка", **6**:3 (2004), 36-46. [Dzarakhokhov A. V., Yeleyev V. A., "Ob odnoy nelokal'noy krayevoy zadache dlya nagruzhennogo uravneniya tret'yego poryadka", **6**:3 (2004), 36-46].

[5] Кожанов А. И., "Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **44**:4 (2004), 694-716. [Kozhanov A. I., "Nelineynyye nagruzhennyye uravneniya i obratnyye zadachi", *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, **44**:4 (2004), 694-716].

[6] Сабитов К. Б., Мелишева Е. П., "Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области", *Известия вузов. Математика*, 2013, №7, 62-76. [Sabitov K. B., Melisheva Ye. P., "Zadacha Dirikhle dlya nagruzhennogo uravneniya smeshannogo tipa v pryamougol'noy oblasti", *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2013, №7, 62-76].

[7] Сабитов К. Б., "Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми", *Известия вузов. Математика*, 2015, №6, 31-42. [Sabitov K. B., "Nachal'no-granichnaya zadacha dlya parabolo-giperbolicheskogo uravneniya s nagruzhennymi slagayemymi", *Izvestiya vuzov. Matematika*, 2015, №6, 31-42].

[8] Baltaeva U. I., "On the Solvability of Boundary-Value Problems with Continuums and Generalized Gluing Conditions for the Equation of Mixed type with loaded term", *Ukrainian Mathematical Journal*, **69 (12)** (2018), 1845-1854.

[9] Dzhamalov S. Z., Ashurov R. R., "On a nonlocal boundary value problem for Chaplygin's loaded equation in a rectangle", *UzMJ*, 2018, №4, 49-57.

[10] Кузьмин А. Г., *Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике*, ЛГУ, Ленинград, 1990, 204 с. [Kuz'min A. G., *Neklassicheskiye uravneniya smeshannogo tipa i ikh prilozheniya k gazodinamike*, LGU, Leningrad, 1990, 204 pp.]

[11] Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М, 1973, 408 с. [Ladyzhenskaya O. A., *Krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki*, Nauka, M, 1973, 408 pp.]

[12] Треногин В. А., *Функциональный анализ*, Наука, М, 1980, 488 с. [Trenogin V. A., *Funktsional'nyy analiz*, Nauka, M, 1980, 488 pp.]

[13] Кальменов Т. Ш., "О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа", *Дифференц. уравнения*, **14**:3 (1978), 546-548. [Kal'menov T. SH., "O poluperiodicheskoy zadache dlya mnogomernogo uravneniya smeshannogo tipa", *Differents. uravneniya*, **14**:3 (1978), 546-548].

[14] Джамалов С. З., "Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа", *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки*, **21**:4 (2017), 1-14. [Dzhamalov S. Z., "Ob odnoy nelokal'noy krayevoy zadache s postoyannymi

koeffitsiyentami dlya mnogomernogo uravneniya smeshannogo tipa", *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskiye nauki*, **21**:4 (2017), 1-14].

[15] Джамалов С. З., Ашуров Р. Р. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве, "Казахский математический журнал", 2018, № 2, 59-70. [Dzhamalov S. Z., Ashurov R. R. O gladkosti odnoy nelokal'noy krayevoy zadachi dlya mnogomernogo uravneniya Chaplygina v prostranstve, "Kazakhskiy matematicheskiy zhurnal", 2018, № 2, 59-70].

[16] Врагов В. Н., *Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики*, НГУ, Новосибирск, 1983, 84 с. [Vragov V. N., *Krayevyye zadachi dlya neklassicheskikh uravneniy matematicheskoy fiziki*, NGU, Novosibirsk, 1983, 84 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

[1] Дженалиев М. Т. К теории краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Институт теоретической и прикладной математики, 1995.

[2] Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19. №1. С. 86-94.

[3] Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012. 232 с.

[4] Дзарахохов А. В., Елеев В. А. Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения третьего порядка // Владикавказский математический журнал. 2004. Т. 6. №3. С. 36-46.

[5] Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 4. С. 694-716.

[6] Сабитов К. Б., Мелишева Е. П. Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Известия вузов. Математика. 2013. №7. С. 62-76.

[7] Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми // Известия вузов. Математика. 2015. №6. С. 31-42.

[8] Baltaeva U. I. On the Solvability of Boundary- Value Problems with Continuums and Generalized Gluing Conditions for the Equation of Mixed type with loaded term // Ukrainian Mathematical Journal. 2018. vol. 69 (12). pp. 1845-1854.

[9] Dzhamalov S. Z., Ashurov R. R. On a nonlocal boundary value problem for Chaplygin's loaded equation in a rectangle // UzMJ. 2018. No 4. P. 49-57.

[10] Кузьмин А. Г. Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Ленинград: ЛГУ, 1990. 204 с.

[11] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М: Наука, 1973. 408 с.

[12] Треногин В. А. Функциональный анализ. М: Наука, 1980, 488 с.

[13] Кальменов Т. Ш. О полупериодической задаче для многомерного уравнения смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. №3. С. 546-548.

[14] Джамалов С. З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для многомерного уравнения смешанного типа // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки. 2017. Т.21. №4. С. 1-14.

[15] Джамалов С. З., Ашуров Р. Р. О гладкости одной нелокальной краевой задачи для многомерного уравнения Чаплыгина в пространстве // Казахский математический журнал. 2018. №2. С. 59-70.

[16] Врагов В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983. 84 с.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2020. vol. 31. no. 2. pp. 8–17. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

MSC 35M10, 35M20 Research Article

On the unique solvability of a seminonlocal boundary value problem for the loaded Chaplygin equation in a rectangle

S. Z. Dzhamalov[1,2], R. R. Ashurov[1], M. A. Sultanov[3], U. Sh. Ruziev[2]

[1] Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy, Academy of Sciences of Uzbekistan, Academy of Sciences of Uzbekistan, Mirzo Ulugbek str., 85, Tashkent, 100170, Uzbekistan

[2] Branch of the Russian State University of Oil and Gas (NRU) named after I. M. Gubkin in Tashkent, 100125, Tashkent, Mirzo-Ulugbek district, Durmon Yuli St., 34

[3] International Kazakh-Turkish University named after Khoja Ahmed Yasawi, Turkestan, Kazakhstan

E-mail: siroj63@mail.ru, ashurovr@gmail.com

In this work, under certain conditions on the coefficients of the loaded Chaplygin equation in a rectangle, the unique solvability of a seminonlocal boundary value problem in Sobolev space is proved.

Key words: loaded Chaplygin equation, seminonlocal boundary-value problem, the correctness of the solution, methods of "ε-regularization", Galerkin's and successive approximations.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-8-17

Original article submitted: 30.04.2020 Revision submitted: 02.06.2020

For citation. Dzhamalov S. Z., Ashurov R. R., Sultanov M. A., Ruziev U. Sh On the unique solvability of a seminonlocal boundary value problem for the loaded Chaplygin equation in a rectangle. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **31**: 2, 8-17. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-8-17

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Acknowledgments. The authors are deeply grateful to the referee for a number of comments that contributed to the improvement of the article.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors