

**Об обратной задаче геофизики с позиций развития
идей В.Н. Страхова**

П. Н. Александров¹, О. Б. Забиякова²

¹ Центр геоэлектромагнитных исследований — Филиал Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института Физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук, 108840, г. Москва, г. Троицк, а/я 30, Россия

² Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Научная станция Российской академии наук в г. Бишкеке, 720049, г. Бишкек-49, Киргизия

E-mail: alexandr@igemi.troitsk.ru, perah.92@inbox.ru

Рассматривается решение обратных задач магнитотеллурического зондирования (МТЗ) в аспекте развития идей В.Н. Страхова, заключающихся в решении обратных геофизических задач без решения соответствующих прямых задач. Для этого достаточно знание оператора, которому подчиняется соответствующее поле, в том числе и магнитотеллурический импеданс. Важнейшим результатом этого подхода является возможность решения обратных задач в случае анизотропных и бианизотропных моделей геологической среды, в то время как использование метода решения таких обратных задач по А.Н.Тихонову сталкивается с трудностями минимизации функционала невязки в связи с увеличением количества неизвестных электромагнитных параметров, подлежащих определению, что приводит к неустойчивости и неоднозначности интерпретации данных МТЗ. Получены уравнения Риккати для магнитотеллурического импеданса и адмитанса для бианизотропных сред, как наиболее общих линейных электромагнитных свойств горных пород и материалов. Проведены численные эксперименты, результаты которых подтверждают возможность применения идей В.Н. Страхова к решению обратных задач МТЗ. Дальнейшее развитие данного подхода сопряжено с решением некорректных задач в силу наличия различного рода помех в экспериментальных данных.

Ключевые слова: магнитотеллурическое зондирование, обратная задача, одномерная горизонтально-однородная среда, анизотропия электропроводности, бианизотропная среда.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-56-69

Поступила в редакцию: 15.04.2020

В окончательном варианте: 10.05.2020

Для цитирования. Александров П. Н., Забиякова О. Б. Об обратной задаче геофизики с позиций развития идей В.Н. Страхова // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 31. № 2. С. 56-69. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-56-69

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Александров П. Н., Забиякова О. Б., 2020

Финансирование. Результаты, представленные в работе, получены в рамках гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 20-05-00475.

Введение

Доминирующим подходом к решению обратных задач, в том числе и задач геофизики, в настоящее время является подход, основанный на предварительном решении прямых задач в выбранном классе моделей. Последующее определение параметров геологической среды сводится к аппроксимации экспериментального поля решением прямой задачи [1, 2, 3]. Однако, следуя идее В. Н. Страхова [4, 5], можно решать обратную задачу без решения прямой, зная только дифференциальный оператор, которому подчиняется поле.

Рассмотрим обратную задачу магнитотеллурического зондирования с позиции этого подхода в следующей постановке. Известно [6], что в горизонтально-однородной, одномерной среде магнитотеллурический импеданс Z подчиняется уравнению Риккати:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - \sigma Z^2 = i\omega\mu_0, \quad (1)$$

где z — вертикальная пространственная координата, измеряемая в метрах (ось Oz , в декартовой системе координат $Oxyz$, направлена вглубь Земли); $\sigma = \sigma(z)$, См/м — удельная электропроводность, которая в каждой однородной области является константой; $\omega = 2\pi f$, рад/с — угловая частота электромагнитного поля с собственной частотой f , Гц; $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$, Гн/м — магнитная проницаемость вакуума; $i = \sqrt{-1}$ — комплексная единица.

Зондирующим параметром в магнитотеллурике является частота ω . Обратная задача заключается в нахождении распределения удельной электропроводности с глубиной z по наблюдаемому на дневной поверхности ($z = z_1$) импедансу $Z(z_1, \omega_j)$ в интервале дискретно заданных частот $\{\omega\}_{j=1}^N$. При этом важным условием является монотонное убывание частот внутри диапазона, то есть $\omega_1 > \omega_2 > \dots > \omega_N$.

Продолжим импеданс Z с дневной поверхности на некоторую глубину $h = z_2 - z_1$, используя разложение импеданса в ряд Тейлора. Поскольку импеданс $Z = Z(z, \omega)$ является функцией частоты ω и пространственной координаты z , то, ограничиваясь первыми членами ряда, получим:

$$Z(z_2, \omega_2) = Z(z_1, \omega_1) + h \left. \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{\substack{z=z_1, \\ \omega=\omega_1}} + \Delta\omega_1 \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|_{\substack{z=z_1, \\ \omega=\omega_1}},$$

$$\text{где } \Delta\omega_1 = \omega_2 - \omega_1, \quad \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|_{\substack{z=z_1, \\ \omega=\omega_1}} \approx \frac{Z(z_1, \omega_2) - Z(z_1, \omega_1)}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Используя уравнение Риккати (1), получим:

$$Z(z_2, \omega_2) = Z(z_1, \omega_1) + h\sigma Z^2(z_1, \omega_1) + i\omega_1\mu_0 h + \Delta\omega_1 \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|_{\substack{z=z_1, \\ \omega=\omega_1}},$$

Аналогичное равенство получим, если разложение импеданса в двумерный ряд Тейлора будем проводить из точки (z_1, ω_3) в точку (z_2, ω_2) :

$$Z(z_2, \omega_2) = Z(z_1, \omega_3) + h\sigma Z^2(z_1, \omega_3) + i\omega_3\mu_0 h + \Delta\omega_3 \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|_{\substack{z=z_1, \\ \omega=\omega_3}},$$

где $\Delta\omega_3 = \omega_2 - \omega_3$, $\left. \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|_{\substack{z=z_1, \\ \omega=\omega_3}} \approx \frac{Z(z_1, \omega_3) - Z(z_1, \omega_2)}{\omega_3 - \omega_2}$.

На рис. 1 проиллюстрирована выше описанная схема алгоритма продолжения импеданса на глубину.

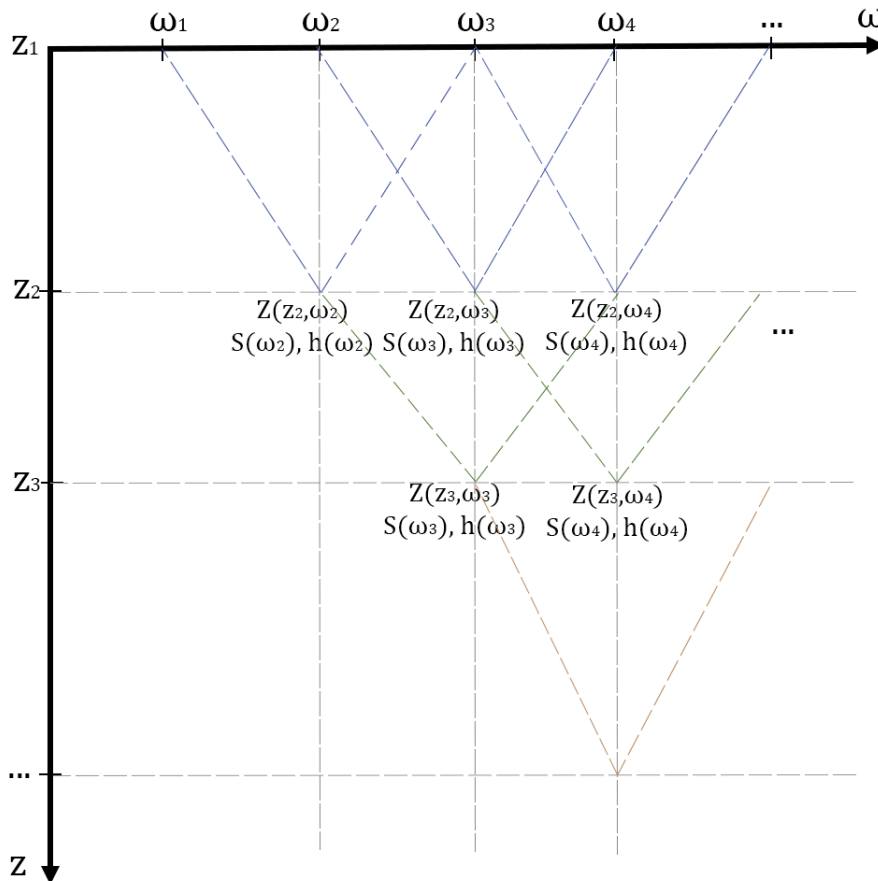


Рис. 1. Схема вычисления импеданса, суммарной продольной электрической проводимости и мощности для разных глубин и частот. Горизонтальная ось ω указывает направление убывания частот

Вычитая из первого разложения второе, получим однородное уравнение:

$$0 = Z(z_1, \omega_3) - Z(z_1, \omega_1) + h\sigma \left(Z^2(z_1, \omega_3) - Z^2(z_1, \omega_1) \right) + i(\omega_3 - \omega_1) \mu_0 h +$$

$$+ \Delta\omega_3 \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|_{\substack{z=z_1, \\ \omega=\omega_3}} - \Delta\omega_1 \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|_{\substack{z=z_1, \\ \omega=\omega_1}} .$$

Выделяя из последнего равенства действительную и мнимую части, получим уравнения для определения глубины продолжения импеданса и интегральную про-

водимость слоя $S = \sigma h$, толщиной h :

$$S = S(\omega_2) = \frac{\operatorname{Re} \left(Z(z_1, \omega_3) - Z(z_1, \omega_1) + \Delta\omega_3 \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|_{\substack{z=z_1, \\ \omega=\omega_3}} - \Delta\omega_1 \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|_{\substack{z=z_1, \\ \omega=\omega_1}} \right)}{\operatorname{Re} (Z^2(z_1, \omega_3) - Z^2(z_1, \omega_1))},$$

$$h = h(\omega_2) = \frac{\operatorname{Im} \left(Z(z_1, \omega_3) - Z(z_1, \omega_1) + S (Z^2(z_1, \omega_3) - Z^2(z_1, \omega_1)) + \Delta\omega_3 \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|_{\substack{z=z_1, \\ \omega=\omega_3}} - \Delta\omega_1 \left. \frac{\partial Z}{\partial \omega} \right|_{\substack{z=z_1, \\ \omega=\omega_1}} \right)}{(\omega_3 - \omega_1) \mu_0}.$$

Отсюда найдем среднюю удельную электропроводность слоя σ^* толщиной h :

$$\sigma^* = S/h.$$

Используя эти значения, продолжим импеданс с дневной поверхности на глубину h (из точки (z_1, ω_j) в точку (z_2, ω_j)):

$$Z(z_2, \omega_j) = Z(z_1, \omega_j) + h \left. \frac{\partial Z}{\partial z} \right|_{\substack{z=z_1, \\ \omega=\omega_j}} = Z(z_1, \omega_j) + SZ^2(z_1, \omega_j) + i\omega_j \mu_0 h, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Повторяя операцию (рекурсия), получим значения удельной электропроводности на всем диапазоне заданных частот¹. В результате можно определить интегральную проводимость $\bar{S} = \sum_{k=1}^R S_k$ и глубину $\bar{h} = \sum_{k=1}^R h_k$, где k — номер итерации, R — количество итераций, определяемое количеством частот, поскольку количество частот после каждой итерации уменьшается на две частоты в связи с необходимостью численного дифференцирования импеданса по частоте.

¹В случае продолжения импеданса Z из точки $z = z_n$ в точку $z = z_{n+1} > z_n$ через границу с координатой z_g ($z_n < z_g < z_{n+1}$) аналитическое продолжение будет состоять из двух частей — из точки z_n в точку $z_g - 0$ и из точки $z_g + 0$ в точку z_{n+1} :

$$Z(z_g - 0, \omega_{m+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(z_g - z_n)^v}{v!} \frac{(\omega_{m+1} - \omega_m)^t}{t!} \frac{\partial^{(t+v)} Z(z_n, \omega_m)}{\partial z^v \partial \omega^t}$$

и

$$Z(z_{n+1}, \omega_{m+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(z_{n+1} - z_n)^v}{v!} \frac{(\omega_{m+1} - \omega_m)^t}{t!} \frac{\partial^{(t+v)} Z(z_g + 0, \omega_m)}{\partial z^v \partial \omega^t}.$$

С учетом непрерывности импеданса и уравнения (1) ряд Тейлора примет вид:

$$Z(z_{n+1}, \omega_{m+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(\omega_{m+1} - \omega_m)^t}{t!} \frac{\partial^t}{\partial \omega^t} \sum_{v=0}^{\infty} c_v Z(z_n, \omega_m)^v,$$

где коэффициенты c_v зависят от электропроводности сочленяемых сред, частоты и интервалов продолжения.

В результате приходим к зависимости $\bar{S} = \bar{S}(\bar{h})$, аналогичной получаемой в методе становления поля [7].

Результат численного эксперимента по решению обратной задачи по предложенному алгоритму для тестовой модели, определяемой таблицей, проиллюстрирован на рис. 2. Для расчетов использовался диапазон частот: $\omega = \{2\pi e^x \mid x = \{-0.001 : -30\}\}$.

Таблица

Тестовая модель горизонтально-однородной среды

№ слоя	Удельная электропроводность слоя, См	Мощность слоя, м
1	0.1	500
2	0.025	2000
3	0.5	4000
4	0.01	∞

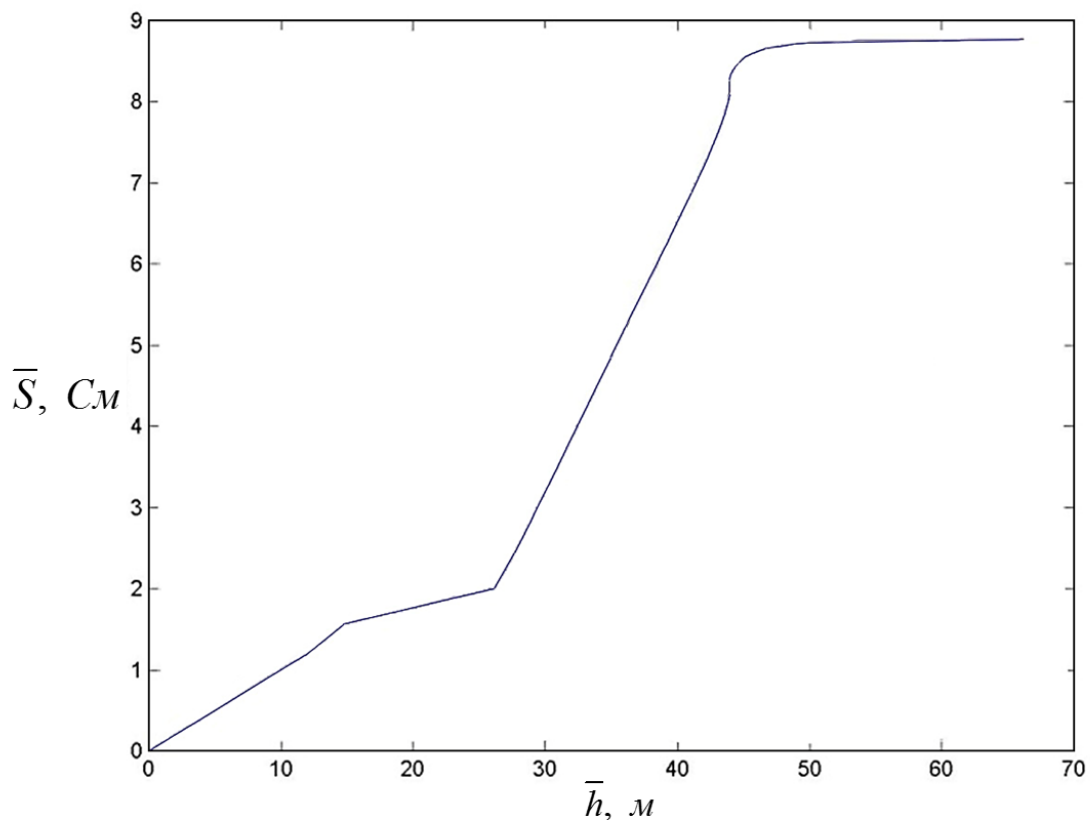


Рис. 2. График зависимости $\bar{S}(\bar{h})$, полученной для тестовой модели горизонтально-однородной среды, заданной в таблице

Из рис. 2 следует, что глубина и суммарная продольная проводимость восстанавливаются не в полном соответствии с реальной моделью — вопрос обоснования этого результата, очевидно, требует дополнительного исследования. Однако, по данному графику можно определить количество слоев в модели, а получаемое расчетное

значение средней удельной электропроводности $\sigma^* = \Delta\bar{S}/\Delta\bar{h}$ близко к реальному значению (здесь $\Delta\bar{S}$ — приращение суммарной продольной проводимости слоя, $\Delta\bar{h}$ — приращение глубины залегания слоя). Судя по количеству изломов кривой, изображенной на рис. 2, разрез состоит из четырех слоев. При этом по наклону каждой из явно различимых четырех частей этой кривой, можно приблизительно определить электропроводность σ^* каждого слоя: для первого слоя — ~ 0.1 См/м, для второго слоя — ~ 0.03 См/м, для третьего слоя — ~ 0.4 См/м, для четвертого слоя — ~ 0.01 См/м.

Таким образом, данный алгоритм позволяет определять количество слоев модели и их электропроводность. Рассмотренный подход позволяет обобщить его на случай анизотропных и бианизотропных моделей геологической среды.

Уравнения Риккати для одномерных бианизотропных сред

Электромагнитное поле, в общем случае линейной неоднородной среды, подчиняется системе уравнений Максвелла, которая в частотной области имеет вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \alpha\mathbf{H} + \mathbf{J}^{ext}, \operatorname{rot}\mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} + \beta\mathbf{E} + \mathbf{V}^{ext}, \quad (2)$$

где $\mathbf{H} = [H_x, H_y, H_z]^T$ — вектор напряженности магнитного поля, $\mathbf{E} = [E_x, E_y, E_z]^T$ — вектор напряженности электрического поля; \mathbf{J}^{ext} , \mathbf{V}^{ext} — вектора плотности стороннего электрического тока и сторонней индукции магнитного поля, соответственно, которые являются источниками электромагнитного поля; ω — частота; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; T — знак операции транспонирования. Электромагнитными параметрами неоднородной среды являются: μ — магнитная проницаемость, σ — удельная электропроводность, α , β — бианизотропные параметры [8, 9, 10], которые связаны с извилистостью токопроводящих капилляров. Эти параметры описывают наиболее общие линейные электромагнитные свойства среды и являются матрицами размерности 3×3 . Они необходимы для максимально полного описания линейных электромагнитных свойств геоэлектрической среды. Получим уравнение Риккати для бианизотропных сред относительно как магнитотеллурического импеданса, так и, как следствие, магнитотеллурического адмитанса.

Систему уравнений Максвелла (2) в случае модели плоского электромагнитного поля можно записать в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{H}_\tau}{\partial z} = a_{11}\mathbf{H}_\tau + a_{12}\mathbf{E}_\tau, \frac{\partial \mathbf{E}_\tau}{\partial z} = a_{21}\mathbf{H}_\tau + a_{22}\mathbf{E}_\tau, \quad (3)$$

где a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} — матрицы размерностью 2×2 , связанные с параметрами в общем случае бианизотропной среды σ , μ , α , β , являющимися матрицами размерностью 3×3 , формулы в явном виде для которых приведены в работе [9].

Уравнение Риккати для бианизотропных сред [9, 10] можно получить, учитывая связь между электрическим и магнитным полями в каждой точке горизонтально слоистой среды.

Рассмотрим основное импедансное соотношение, связывающее тангенциальные компоненты электромагнитного поля [1]:

$$\mathbf{E}_\tau = \mathbf{Z}\mathbf{H}_\tau, \quad (4)$$

где $\mathbf{E}_\tau = \mathbf{E}_\tau(z, \omega) = \begin{pmatrix} E_x(z, \omega) \\ E_y(z, \omega) \end{pmatrix}$ и $\mathbf{H}_\tau = \mathbf{H}_\tau(z, \omega) = \begin{pmatrix} H_x(z, \omega) \\ H_y(z, \omega) \end{pmatrix}$ – тангенциальные составляющие векторов напряженности электрического и магнитного магнитотеллурического поля соответственно, $Z = Z(z, \omega) = \begin{pmatrix} Z_{11}(z, \omega) & Z_{12}(z, \omega) \\ Z_{21}(z, \omega) & Z_{22}(z, \omega) \end{pmatrix}$ – тензор магнитотеллурического импеданса.

Продифференцируем уравнение (4) по вертикальной координате z :

$$\frac{\partial \mathbf{E}_\tau}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z} \mathbf{H}_\tau + Z \frac{\partial \mathbf{H}_\tau}{\partial z}.$$

Тогда с учетом (3), получим:

$$a_{21} \mathbf{H}_\tau + a_{22} \mathbf{E}_\tau = \frac{\partial Z}{\partial z} \mathbf{H}_\tau + Z \frac{\partial \mathbf{H}_\tau}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z} \mathbf{H}_\tau + Z(a_{11} \mathbf{H}_\tau + a_{12} \mathbf{E}_\tau),$$

или

$$a_{21} \mathbf{H}_\tau + a_{22} Z \mathbf{H}_\tau = \frac{\partial Z}{\partial z} \mathbf{H}_\tau + Z a_{11} \mathbf{H}_\tau + Z a_{12} Z \mathbf{H}_\tau.$$

В силу произвольности магнитного поля можно записать в окончательном виде:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = a_{21} + a_{22} Z - Z a_{11} - Z a_{12} Z. \quad (5)$$

Для магнитотеллурического адмитанса $Y = Z^{-1}$, используя правило дифференцирования матриц $Y \frac{\partial Z}{\partial z} Y = \frac{\partial Y}{\partial z}$, аналогичным образом получим:

$$Y a_{21} Y \mathbf{E}_\tau + a_{22} \mathbf{E}_\tau = Y \frac{\partial Z}{\partial z} Y \mathbf{E}_\tau + a_{11} Y \mathbf{E}_\tau + a_{22} \mathbf{E}_\tau,$$

или

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = a_{12} + a_{11} Y - Y a_{22} - Y a_{21} Y.$$

Таким образом, получены уравнения Риккати относительно магнитотеллурического импеданса и адмитанса, что позволяет сформулировать обратную задачу без решения прямой. Рассмотрим этот подход на примере магнитотеллурического импеданса.

Продолжение магнитотеллурического импеданса в одномерных бианизотропных средах

Пусть $Z_0 = Z(z=0)$ – магнитотеллурический импеданс, определенный по горизонтальным компонентам электромагнитного поля:

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_\tau(z=0) = Z_0 \mathbf{H}_\tau(z=0) = Z_0 \mathbf{H}_0.$$

Поле в горизонтально однородной модели среды с параметрами, включенными в матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, на глубине z равно [11]:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_\tau \\ \mathbf{E}_\tau \end{pmatrix} = e^{Az} \mathbf{X}_0 = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0 \\ \mathbf{E}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [1] \\ Z_0 \end{pmatrix} \mathbf{H}_0,$$

где $[1]$ — единичная матрица размерностью 2×2 . То есть:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} e_{11} + e_{12}Z_0 \\ e_{21} + e_{22}Z_0 \end{pmatrix} \mathbf{H}_0,$$

или

$$\mathbf{H}_\tau(z) = (e_{11} + e_{12}Z_0) \mathbf{H}_0, \mathbf{E}_\tau(z) = (e_{21} + e_{22}Z_0) \mathbf{H}_0.$$

Подставляя первое уравнение во второе, получим:

$$\mathbf{E}_\tau(z) = (e_{21} + e_{22}Z_0)(e_{11} + e_{12}Z_0)^{-1} \mathbf{H}_\tau(z) = Z(z) \mathbf{H}_\tau(z).$$

Следовательно, магнитотеллурический импеданс на глубине z в зависимости от магнитотеллурического импеданса на дневной поверхности будет иметь вид:

$$Z(z) = (e_{21} + e_{22}Z_0)(e_{11} + e_{12}Z_0)^{-1}.$$

Таким образом, получена связь между импедансом, заданным на кровле однородного слоя, с импедансом на произвольной глубине, являющимся аналитической функцией z .

С целью построения алгоритма решения обратной задачи, проведем разложение в ряд Тейлора импеданса $Z(z, \omega)$ в окрестности точки $(z = 0, \omega = \omega_1)$:

$$Z(h, \omega_2) = Z(0, \omega_1) + \Delta\omega_1 \left. \frac{\partial}{\partial \omega} Z(0, \omega) \right|_{\omega=\omega_1} + h \left. \frac{\partial}{\partial z} Z(z, \omega_1) \right|_{z=0}, \Delta\omega_1 = \omega_2 - \omega_1. \quad (6)$$

В эту же точку плоскости (h, ω_2) продолжим поле на основе разложения в ряд Тейлора поля из точки с координатой $(0, \omega_3)$:

$$Z(h, \omega_2) = Z(0, \omega_3) + \Delta\omega_3 \left. \frac{\partial}{\partial \omega} Z(0, \omega) \right|_{\omega=\omega_3} + h \left. \frac{\partial}{\partial z} Z(z, \omega_3) \right|_{z=0}, \Delta\omega_3 = \omega_2 - \omega_3. \quad (7)$$

Разность выражений (6) и (7) позволяет исключить импеданс $Z(h, \omega_2)$:

$$0 = (Z(0, \omega_1) - Z(0, \omega_3)) + \Delta\omega_1 \left. \frac{\partial}{\partial \omega} Z(0, \omega) \right|_{\omega=\omega_1} - \Delta\omega_3 \left. \frac{\partial}{\partial \omega} Z(0, \omega) \right|_{\omega=\omega_3} + h \left(\left. \frac{\partial}{\partial z} Z(z, \omega_1) \right|_{z=0} - \left. \frac{\partial}{\partial z} Z(z, \omega_3) \right|_{z=0} \right).$$

Используя уравнение Риккати (5), получим:

$$\begin{aligned} - \left(Z(0, \omega_1) - Z(0, \omega_3) \right) &= \Delta\omega_1 \left. \frac{\partial}{\partial \omega} Z(0, \omega) \right|_{\omega=\omega_1} - \Delta\omega_3 \left. \frac{\partial}{\partial \omega} Z(0, \omega) \right|_{\omega=\omega_3} + \\ &+ h \left(\left. (a_{21} + a_{22}Z - Za_{11} - Za_{12}Z) \right|_{z=0, \omega=\omega_1} - \left. (a_{21} + a_{22}Z - Za_{11} - Za_{12}Z) \right|_{z=0, \omega=\omega_3} \right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& - \left(Z(0, \omega_1) - Z(0, \omega_3) \right) - \left(\Delta\omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega} Z(0, \omega) \Big|_{\omega=\omega_1} - \Delta\omega_3 \frac{\partial}{\partial \omega} Z(0, \omega) \Big|_{\omega=\omega_3} \right) = \\
& + h \left(a_{21}(\omega_1) - a_{21}(\omega_3) \right) + h \left(a_{22}(\omega_1) Z(0, \omega_1) - a_{22}(\omega_3) Z(0, \omega_3) \right) - \\
& - h \left(Z(0, \omega_1) a_{11}(\omega_1) - Z(0, \omega_3) a_{11}(\omega_3) \right) - \\
& - h \left(Z(0, \omega_1) a_{12}(\omega_1) Z(0, \omega_1) - Z(0, \omega_3) a_{12}(\omega_3) Z(0, \omega_3) \right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Введем обозначение:

$$\begin{aligned}
J(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \left(Z(0, \omega_1) - Z(0, \omega_3) \right) + \left(\Delta\omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega} Z(0, \omega) \Big|_{\omega=\omega_1} - \Delta\omega_3 \frac{\partial}{\partial \omega} Z(0, \omega) \Big|_{\omega=\omega_3} \right) \\
&= \begin{pmatrix} J_{11}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) & J_{12}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \\ J_{21}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) & J_{22}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Конкретизируем вид подматриц матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$: пусть среда обладает только анизотропией электропроводности, тогда $a_{11} = a_{22} = [0]$, $a_{11} = -i\omega h \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $a_{12} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$. Переобозначим $M = -\frac{a_{21}}{i\omega} = \begin{pmatrix} 0 & m_{12} \\ m_{21} & 0 \end{pmatrix}$, $S = h\sigma = \begin{pmatrix} s_{11}(h) & s_{12}(h) \\ s_{21}(h) & s_{22}(h) \end{pmatrix}$.

Тогда система уравнений (8) примет вид:

$$i(\omega_1 - \omega_3)M + \left(Z(0, \omega_1)SZ(0, \omega_1) - Z(0, \omega_3)SZ(0, \omega_3) \right) = J.$$

Данная система матричных уравнений распадается на четыре уравнения:

$$\begin{aligned}
& s_{11} \left(Z_{11}^2(0, \omega_1) - Z_{11}^2(0, \omega_3) \right) + s_{12} \left(Z_{11}(0, \omega_1) Z_{21}(0, \omega_1) - Z_{11}(0, \omega_3) Z_{21}(0, \omega_3) \right) + \\
& + s_{21} \left(Z_{11}(0, \omega_1) Z_{12}(0, \omega_1) - Z_{11}(0, \omega_3) Z_{12}(0, \omega_3) \right) + \\
& \quad + s_{22} \left(Z_{21}(0, \omega_1) Z_{12}(0, \omega_1) - Z_{21}(0, \omega_3) Z_{12}(0, \omega_3) \right) = J_{11}(\omega_1, \omega_2, \omega_3); \\
& i(\omega_1 - \omega_3) m_{12} + s_{11} \left(Z_{11}(0, \omega_1) Z_{12}(0, \omega_1) - Z_{11}(0, \omega_3) Z_{12}(0, \omega_3) \right) + \\
& + s_{12} \left(Z_{11}(0, \omega_1) Z_{22}(0, \omega_1) - Z_{11}(0, \omega_3) Z_{22}(0, \omega_3) \right) + s_{21} \left(Z_{12}^2(0, \omega_1) - Z_{12}^2(0, \omega_3) \right) + \\
& \quad + s_{22} \left(Z_{12}(0, \omega_1) Z_{22}(0, \omega_1) - Z_{12}(0, \omega_3) Z_{22}(0, \omega_3) \right) = J_{12}(\omega_1, \omega_2, \omega_3); \\
& i(\omega_1 - \omega_3) m_{21} + s_{11} \left(Z_{11}(0, \omega_1) Z_{21}(0, \omega_1) - Z_{11}(0, \omega_3) Z_{21}(0, \omega_3) \right) + \\
& + s_{21} \left(Z_{11}(0, \omega_1) Z_{22}(0, \omega_1) - Z_{11}(0, \omega_3) Z_{22}(0, \omega_3) \right) + s_{12} \left(Z_{21}^2(0, \omega_1) - Z_{21}^2(0, \omega_3) \right) + \\
& \quad + s_{22} \left(Z_{21}(0, \omega_1) Z_{22}(0, \omega_1) - Z_{21}(0, \omega_3) Z_{22}(0, \omega_3) \right) = J_{21}(\omega_1, \omega_2, \omega_3); \\
& s_{11} \left(Z_{12}(0, \omega_1) Z_{21}(0, \omega_1) - Z_{12}(0, \omega_3) Z_{21}(0, \omega_3) \right) + \\
& \quad + s_{12} \left(Z_{21}(0, \omega_1) Z_{22}(0, \omega_1) - Z_{21}(0, \omega_3) Z_{22}(0, \omega_3) \right) + \\
& \quad + s_{21} \left(Z_{12}(0, \omega_1) Z_{22}(0, \omega_1) - Z_{12}(0, \omega_3) Z_{22}(0, \omega_3) \right) + \\
& \quad \quad + s_{22} \left(Z_{22}^2(0, \omega_1) - Z_{22}^2(0, \omega_3) \right) = J_{22}(\omega_1, \omega_2, \omega_3);
\end{aligned}$$

Из этой системы уравнений найдем $S = h\sigma = \begin{pmatrix} s_{11}(h) & s_{12}(h) \\ s_{21}(h) & s_{22}(h) \end{pmatrix}$ и h . Используя эти значения, а также уравнение Риккати (5), продолжим импеданс с дневной поверхности на глубину h , то есть из точки $(0, \omega_j)$ в точку (h, ω_j) , используя формулу:

$$\begin{aligned}
Z(h, \omega_j) &= Z(0, \omega_j) + h \left. \frac{\partial Z(z, \omega_j)}{\partial z} \right|_{z=0} = \\
&= Z(0, \omega_j) + h \left(a_{21} + a_{22} Z(0, \omega_j) - Z(0, \omega_j) a_{11} - Z(0, \omega_j) a_{12} Z(0, \omega_j) \right),
\end{aligned}$$

$$j = 2, \dots, N-1.$$

Рекурсивно повторяя эту процедуру, получим интегральные значения параметров среды на всем диапазоне заданных частот.

Для следующего слоя операция повторяется, начиная с глубины h , однако количество частот с каждой итерацией уменьшается. Окончание продолжение поля будет обуславливаться количеством частот, соответственно это определяет глубину продолжения поля для горизонтально слоистой модели среды. Иначе говоря, количество итераций и глубинность исследований определяется количеством частот.

В результате такой операции получим значения тензора суммарной электропроводности как функции глубины проводимости $\bar{S} = \bar{S}(h)$.

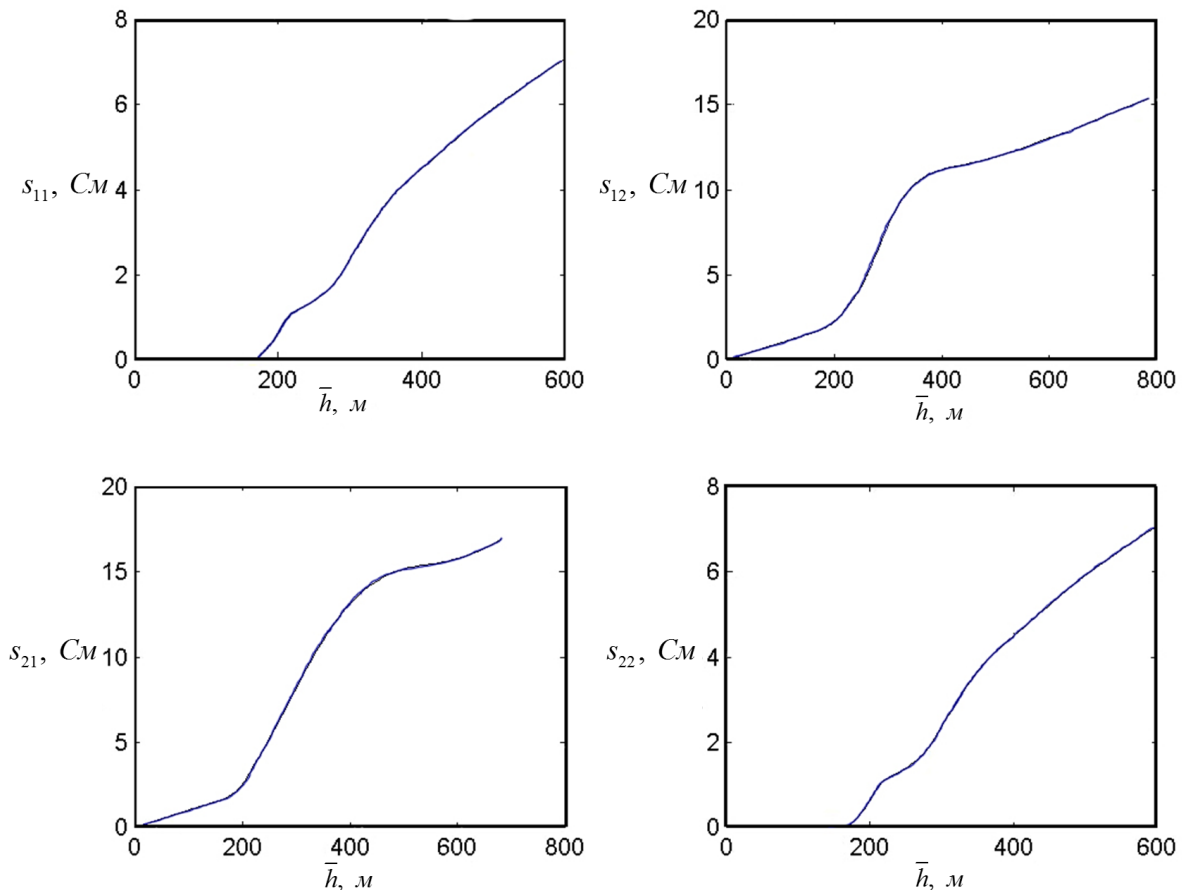


Рис. 3. Тензор интегральной проводимости $\bar{S}(\bar{h})$, как функция глубины h

На рис. 3 представлены результаты решения обратной задачи для изотропного немагнитного полупространства с удельной электропроводностью $\sigma = 0.01$ См, в котором на глубине 1000 м находится слой толщиной 2000 м, характеризуемый тензором электропроводности $\sigma = \begin{pmatrix} 0.15 & -0.05 \\ -0.05 & 0.15 \end{pmatrix}$. Для расчетов использовался диапазон частот $\omega = \{2\pi e^x \mid x = \{7 : -0.05 : -25\}\}$.

Как следует из рис. 3, глубина и суммарная продольная электрическая проводимость восстанавливаются не в полном соответствии с реальной моделью, однако, по данным графикам можно определить наличие анизотропного слоя и количество слоев в модели, а получаемые расчетные значения тензора удельной электропроводности близки к реальным. Анализируя характер кривых s_{12} и s_{21} , можно сделать вывод о наличии трехслойного разреза, для каждого слоя которого можно определить значение удельной электропроводности, исходя из наклона соответствующего участка этой кривой. Так, например, для первого и третьего слоев удельная электропроводность составляет ~ 0.01 См/м, а для второго слоя — ~ 0.1 См/м. Характер кривых s_{11} и s_{22} показывает, что второй слой разреза, начинающийся на глубине 200 м, является анизотропным, поскольку до этой глубины s_{11} и s_{22} принимают нулевые значения.

Заключение

Таким образом, рассмотренный в данной работе алгоритм решения обратных задач магнитотеллурического зондирования позволяет определять количество слоев модели и их электропроводность.

Данный подход обобщается и на другие геофизические методы. Так, например, в методах постоянного тока зондирующим параметром является разнос, в методах становления поля – время становления электромагнитного поля и т.д.

Не смотря на универсальность данного подхода, он требует решения некорректной задачи при наличии помех в связи с операцией продолжения поля, что приводит к неустойчивости вычислительной процедуры. Этот вопрос будет обсуждаться в последующих работах по данной тематике.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы участвовали в написании статьи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Список литературы/References

- [1] Бердичевский М. Н., Дмитриев В. И., *Модели и методы магнитотеллурики*, Научный мир, М., 2009, 680 с. [Berdichevskiy M. N., Dmitriev V. I., *Modeli i metody magnitotelluriki [Models and methods of magnetotellurics]*, Nauchnyy mir, M., 2009, 680 pp.]
- [2] Жданов М. С., *Теория обратных задач и регуляризации в геофизике*, Научный мир, М., 2007, 712 с. [Zhdanov M. S., *Teoriya obratnykh zadach i regularizatsii v geofizike [Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems]*, Nauchnyy mir, M., 2007, 712 pp.]
- [3] Спичак В. В., *Магнитотеллурические поля в трехмерных моделях геоэлектрики*, Научный мир, М., 1999, 204 с. [Spichak V. V., *Magnitotelluricheskie polya v trekhmernykh modelyakh geoelektriki [Magnetotelluric fields in three-dimensional models of geoelectrics]*, Nauchnyy mir, M., 1999, 204 pp.]
- [4] Страхов В. Н., “Принципиально новая теория интерпретации данных о потенциальных полях (гравитационных и магнитных аномалий)”, *Геофизический журнал*, **25**:1 (2003), 3–7. [Strakhov V. N., “Printsipial’no novaya teoriya interpretatsii dannykh o potentsial’nykh polyakh (gravitatsionnykh i magnitnykh anomalii) [Fundamentally new theory of interpretation of potential fields data (gravitational and magnetic anomalies)]”, *Geofizicheskiy zhurnal*, **25**:1 (2003), 3–7].
- [5] Страхов В. Н., Степанова И. Э., Гричук Л. В., “О решении обратных задач гравиметрии без решения прямых”, *Вопросы теории и практики комплексной геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей*, Тезисы докладов Международной школы-семинара, 3-8 октября 2002 г., Апатиты, 2002, 81–84. [Strakhov V.N., Stepanova I.E., Grichuk L.V., “O reshenii obratnykh zadach gravimetrii bez resheniya pryamykh [On solving inverse problems of gravimetry without solving of forward]”, *Voprosy teorii i praktiki kompleksnoy geologicheskoy interpretatsii gravitatsionnykh, magnitnykh i elektricheskikh poley*, Tezisy dokladov Mezhdunarodnoy shkoly-seminara, 3-8 oktyabrya 2002, Apatity, 2002, 81–84].
- [6] Бердичевский М. Н., Дмитриев В. И., *Магнитотеллурическое зондирование горизонтально-однородных сред*, Недра, М., 1992, 250 с. [Berdichevskiy M. N., Dmitriev V. I., *Magnitotelluricheskoe zondirovanie gorizontal’no-odnorodnykh sred [Magnetotelluric Sounding of Horizontally Homogeneous Media]*, Nedra, M., 1992, 250 pp.]
- [7] Сидоров В. А., *Импульсная индуктивная электроразведка*, Недра, М., 1985, 192 с. [Sidorov V. A., *Impul’snaya induktivnaya elektrorazvedka [Pulse Inductive Electrical Exploration]*, Nedra, M., 1985, 192 pp.]

- [8] Александров П. Н., “Метод сжимающихся областей в задачах геофизики”, *Вопросы теории и практики комплексной геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей*, материалы международной школы-семинара, 15-24 ноября 2000 г., г. Ухта, 2001, 6–12. [Aleksandrov P. N., “Metod szhimayushchikhsya oblastey v zadachakh geofiziki [The method of contracting areas in geophysics problems]”, *Voprosy teorii i praktiki kompleksnoy geologicheskoy interpretatsii gravitatsionnykh, magnitnykh i elektricheskikh poley*, materialy mezhdunarodnoy shkoly-seminara, 15-24 noyabrya 2000, g. Ukhta, 2001, 6–12].
- [9] Александров П. Н., “Прямая задача геоэлектрики в одномерных бианизотропных средах”, *Физика Земли*, **4** (2001), 51–61. [Aleksandrov P. N., “Pryamaya zadacha geoelektriki v odnomernykh bianizotropnykh sredakh [The forward geoelectrics problem in one-dimensional bianisotropic media]”, *Fizika Zemli*, **4** (2001), 51–61].
- [10] Александров П. Н., “Эффективные электромагнитные параметры капиллярной системы электропроводности горной породы”, *Физика Земли*, **2** (2000), 87–94. [Aleksandrov P. N., “Effektivnye elektromagnitnye parametry kapillyarnoy sistemy elektroprovodnosti gornoy porody [Effective electromagnetic parameters of a capillary system of electrical conductivity of rock]”, *Fizika Zemli*, **2** (2000), 87–94].
- [11] Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц. Издание второе, дополненное*, Наука, М., 1966, 576 с. [Gantmakher F. R., *Teoriya matrits. Izdanie vtoroe, dopolnennoe* [Matrix theory. Second edition, supplemented], Nauka, M., 1966, 576 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Бердичевский М. Н., Дмитриев В. И. Модели и методы магнитотеллурики. М.: Научный мир, 2009. 680 с.
- [2] Жданов М. С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М.: Научный мир, 2007. 712 с.
- [3] Спичак В. В. Магнитотеллурические поля в трехмерных моделях геоэлектрики. М.: Научный мир, 1999. 204 с.
- [4] Страхов В. Н. Принципиально новая теория интерпретации данных о потенциальных полях (гравитационных и магнитных аномалий) // Геофизический журнал. 2003. Т. 25. №1. С. 3–7.
- [5] Страхов В. Н., Степанова И. Э., Гричук Л. В. О решении обратных задач гравиметрии без решения прямых // Вопросы теории и практики комплексной геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. Тезисы докладов Международной школы-семинара, 3-8 октября 2002 г. Апатиты, 2002. С. 81–84.
- [6] Бердичевский М. Н., Дмитриев В. И. Магнитотеллурическое зондирование горизонтально-однородных сред. М.: Недра, 1992. 250 с.
- [7] Сидоров В. А. Импульсная индуктивная электроразведка. М.: Недра, 1985. 192 с.
- [8] Александров П. Н. Метод сжимающихся областей в задачах геофизики // Вопросы теории и практики комплексной геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. Материалы международной школы-семинара, 15-24 ноября 2000 г. г. Ухта. 2001. С. 6–12.
- [9] Александров П. Н. Прямая задача геоэлектрики в одномерных бианизотропных средах // Физика Земли. 2001. №4. С. 51–61.
- [10] Александров П. Н. Эффективные электромагнитные параметры капиллярной системы электропроводности горной породы // Физика Земли. 2000. №2. С. 87–94.
- [11] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Издание второе, дополненное. М.: Наука, 1966. 576 с.

MATHEMATICAL MODELING

MSC 86A22

Research Article

About geophysical inverse problem from the point of view of Strakhov's ideas

P. N. Alexandrov¹, O. B. Zabinyakova²

¹ Geoelectromagnetic Research Center of the Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, 108840, Moscow, Troitsk, Russian Federation

² Research Station of the Russian Academy of Sciences, 720049, Bishkek, Kyrgyzstan
E-mail: alexandr@igemi.troitsk.ru, perah.92@inbox.ru

The approach of magnetotelluric sounding (MTS) inverse problems solving is considered in the aspect of V.N. Strakhov's ideas development and is based on solving of inverse geophysical problems without the corresponding forward problems solutions. For this aim it is sufficient to know mathematical operator which describes the corresponding field, including magnetotelluric impedance. The most important result of this approach is the possibility of inverse problems solving for anisotropic and bianisotropic models of the geological medium, while the usage of the method of solving inverse problems according to A.N. Tikhonov encounters difficulties in minimizing the residual functional due to an increase in the number of unknown electromagnetic parameters wanted to be determined, and leads to instability and ambiguity in the interpretation of MT-data. Riccati equations for magnetotelluric impedance and admittance (the most common linear electromagnetic properties of rocks and materials) for bianisotropic medium are obtained. Received results of numerical experiments confirm the possibility of applying V.N. Strakhov's ideas for MTS inverse problems solving. Further development of this approach is associated with the incorrect problems solving due to the presence of various kinds of experimental data noises.

Keywords: magnetotelluric sounding, inverse problem, one-dimensional horizontally homogeneous medium, conductance anisotropy, bianisotropic medium.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-56-69

Original article submitted: 15.04.2020

Revision submitted: 10.05.2020

For citation. Alexandrov P. N., Zabinyakova O. B. About geophysical inverse problem from the point of view of Strakhov's ideas. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **31**: 2, 56-69. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-56-69

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Alexandrov P. N., Zabinyakova O. B., 2020

Funding. The results presented in the work were obtained in the framework of the grant of the Russian Foundation for Basic Research No. 20-05-00475.