Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 30. № 1. С. 31-41. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-30-1-31-41

УДК 517.956.6

# КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

**Р. Т. Зуннунов[1], Ж.,А. Толибжонов[2]**

[1] Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз, 100041,
ул. Мирзо Улугбека 81, г. Ташкент, Республика Узбекистан
[2] Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 100174,
ул. Университетская 4, г. Ташкент, Республика Узбекистан
E-mail: zunnunov@mail.ru

В данной работе для уравнения смешанного типа в неограниченной области эллиптическая часть которой является горизонтальной полосой исследуется задача со смещением на характеристиках разных семейств. Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии, а существование решения задачи методом функций Грина и методом интегральных уравнений.

*Ключевые слова: задача со смещением, уравнение смешанного типа, неограниченная область, метод функций Грина, метод интегральных уравнений, метод интегралов энергии*



## Введение

Краевые задачи со смещением являются одним из быстро развивающихся направлений в теории уравнений смешанного типа [1,2]. Это объясняется прежде всего тем, что нелокальные задачи содержат широкий класс локальных краевых задач и возникают при изучении различных вопросов прикладного характера, например, вопросов математической биологии [3], прогнозирования почвенной влаги [4, 5], проблем физики плазмы [6]. Ряд простейших типичных задач околозвуковой аэродинамики приводит к краевой задаче Трикоми, для которой область, лежащая в эллиптической части плоскости, представляет собой полуполосу [7]. В данной работе эллиптическая часть плоскости, представляет собой горизонтальную полосу.

## Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$signy|y|^m u_{xx}+u_{yy}=0, m=const>0 \tag{1}$$

в области $\Omega=\Omega_1\cup AB\cup\Omega_2$, где $\Omega_1=\{(x,y): -\infty<x<+\infty, 0<y<1\}$, а $\Omega_2$ – область полуплоскости $y<0$, ограниченная отрезком $\overline{AB}=\{(x,y): -1\le x\le 1, y=0\}$ и характеристиками уравнения (1):

$$AC: x-[2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2}=-1,$$

$$BC: x+[2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2}=1,$$

выходящими из точек $A(-1,0)$ и $B(1,0)$.

Введем следующие обозначения:

$$\theta_{-1}(x)=\left(\frac{x-1}{2},-\left[\frac{m+2}{2}\cdot\frac{x+1}{2}\right]^{\dfrac{2}{m+2}}\right), \theta_1(x)=\left(\frac{1+x}{2},-\left[\frac{m+2}{2}\cdot\frac{1-x}{2}\right]^{\dfrac{2}{m+2}}\right).$$

Очевидно, что $\theta_{-1}(x)$ и $\theta_1(x)$ есть точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)\in AB$ с характеристиками $AC$ и $BC$ соответственно.

**Задача $TD^{\infty}$.** *Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:*

*1) $u(x,y)\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^2(\Omega_1\cup\Omega_2)$, причем $u_y(x,0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$ на концах интервала $(-1,1)$;*

*2) удовлетворяет уравнению (1) в областях $\Omega_1$ и $\Omega_2$;*

*3) удовлетворяет условиям*

$$u(x,1)=\varphi_1(x), -\infty<x<+\infty, \quad u(x,0)=\varphi_2(x), -\infty<x\le -1,$$

$$u(x,0)=\varphi_3(x), 1\le x<\infty, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,y)=0, \quad \text{равномерно по} \quad y\in[0,1], \tag{3}$$

$$a(x)D^{\beta}_{-1x}(x+1)^{2\beta-1}u[\theta_{-1}(x)]+$$

$$+b(x)D^{\beta}_{x1}(1-x)^{2\beta-1}u[\theta_1(x)]+c(x)u(x,0)=d(x), -1\le x\le 1, \tag{4}$$

*где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ – заданные функции, причем выполняются условия: $a^2(x)+b^2(x)\ne 0$, $-1\le x\le 1$; $a(x), b(x), c(x), d(x)\in C[-1,1]$; $\varphi_1(x)\in C(-\infty,+\infty)$, $\varphi_2(x)\in C(-\infty,-1]$, $\varphi_3(x)\in C[1,+\infty)$, и для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенствам $|\varphi_j(x)|\le M_1|x|^{-\varepsilon}$, $\left(j=\overline{1,3}\right)$, $\beta=m/(2m+4)$, $M_1=const>0$, а $\varepsilon$ – достаточно малое положительное число.*

## Единственность решения задачи $TD^{\infty}$

Пусть $u(x,y)$ решение задачи $TD^{\infty}$. Введем обозначения $u(x,0)=\tau(x)$, $-1\leq x\leq 1$; $\lim\limits_{y\to 0} u_y(x,y)=\nu(x)$, $-1<x<1;\nu(x)\in {}^{2}(-1,1)$ и $\nu(x)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$ на концах интервала $(-1,1)$, а $\tau(x)\in C[-1,1]\cap C^2(-1,1)$. Тогда решение задачи $TD^{\infty}$ в области $\Omega_2$ имеет вид [2]:

$$u(x,y)=\gamma_1\int\limits_0^1\frac{\tau[x+\sigma(2t-1)]}{[t(1-t)]^{1-\beta}}dt+\left[\frac{4}{m+2}\right]^{1-2\beta}\gamma_2 y\int\limits_0^1\frac{\nu[x+\sigma(2t-1)]}{[t(1-t)]^{\beta}}dt, \qquad (5)$$

где $\sigma=\left[\dfrac{2}{m+2}\right](-y)^{(m+2)/2}$, $\gamma_1=\dfrac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)}$, $\gamma_2=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{4}{m+2}\right]^{2\beta}\dfrac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}$.

Пользуясь формулой (5), аналогично как в работе [8] получим

$$u[\theta_{-1}(x)]=\gamma_1\Gamma(\beta)(x+1)^{1-2\beta}D_{-1x}^{-\beta}\left[(x+1)^{\beta-1}\tau(x)\right]-$$

$$-\gamma_2\Gamma(1-\beta)D_{-1x}^{\beta-1}\left[(x+1)^{-\beta}\nu(x)\right], \qquad (6)$$

$$u[\theta_1(x)]=\gamma_1\Gamma(\beta)(1-x)^{1-2\beta}D_{x1}^{-\beta}\left[\tau(x)(1-x)^{\beta-1}\right]-$$

$$-\gamma_2\Gamma(1-\beta)D_{x1}^{\beta-1}\left[\nu(x)(1-x)^{-\beta}\right]. \qquad (7)$$

Умножая обе части этих равенств на $(x+1)^{2\beta-1}$ и $(1-x)^{2\beta-1}$, а затем применяя операторы $D_{-1x}^{\beta}$ и $D_{1x}^{\beta}$ соответственно с учетом свойства операторов дробного интегро-дифференцирования, получим [2,3]:

$$D_{-1x}^{\beta}(x+1)^{2\beta-1}u[\theta_{-1}(x)]= \qquad (8)$$

$$=(x+1)^{\beta-1}\left\{\Gamma(\beta)\gamma_1\tau(x)-\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)}\gamma_2\int\limits_{-1}^{x}\nu(t)(x-t)^{-2\beta}dt\right\}.$$

$$D_{x1}^{\beta}(1-x)^{2\beta-1}u[\theta_1(x)]= \qquad (9)$$

$$=(1-x)^{\beta-1}\left\{\Gamma(\beta)\gamma_1\tau(x)-\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)}\gamma_2\int\limits_{x}^{1}\nu(t)(t-x)^{-2\beta}dt\right\}.$$

Подставляя (8) и (9) в условие (4) получим основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на $AB$ из области $\Omega_2$:

$$p(x)\tau(x)=[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)]\left[\left(1-x^2\right)\right]^{1-\beta}d(x)+ \qquad (10)$$

$$+\gamma_3(1-x)^{1-\beta}a(x)\int\limits_{-1}^{x}\nu(t)(x-t)^{-2\beta}dt+\gamma_3 b(x)(x+1)^{1-\beta}\int\limits_{x}^{1}\nu(t)(x-t)^{-2\beta}dt,$$

где $p(x)=(1-x)^{1-\beta}a(x)+(x+1)^{1-\beta}b(x)+[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)]\left[\left(1-x^2\right)\right]^{1-\beta}c(x)$,

$\gamma_3 = \left[(2-4\beta)^{2\beta}\Gamma(\beta)\right] / [2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)],\ -1 \le x \le 1.$

**Теорема 1.** *Если $u(x,y)$ – решение однородной задачи $TD^{\infty}$, а заданные функции удовлетворяют следующим условиям:*

$$a(x) = (x+1)^{1-\beta+\varepsilon_1} a_0(x), \quad b(x) = (1-x)^{1-\beta+\varepsilon_1} b_0(x), \quad c(x) = \left(1-x^2\right)^{\varepsilon_1} c_0(x), \tag{11}$$

*где $a_0(x), b_0(x), c_0(x) \in C^1[0,1]$.*

$$p_0(x) \neq 0, \ \left[\frac{(1+x)^{\varepsilon_1} a_0(x)}{p_0(x)}\right]' \le 0, \ \left[\frac{(1-x)^{\varepsilon_1} b_0(x)}{p_0(x)}\right]' \ge 0, \tag{12}$$

*тогда задача $TD^{\infty}$ не может иметь более одного решения:*

*Здесь $p_0(x) = (x+1)^{\varepsilon_1} a_0(x) + (1-x)^{\varepsilon_1} b_0(x) + \left[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)\right][(1-x^2)]^{\varepsilon_1} c_0(x)$, а $\varepsilon_1$ – достаточно малое положительное число.*

Прежде чем перейти к доказательству Теоремы 1, сперва докажем следующую лемму.

**Лемма.** *Если $u(x,y)$ – решение однородной задачи $TD^{\infty}$ и выполнены условия (11) и (12), тогда справедливо неравенство*

$$\Delta = \int_{-1}^{1} \tau(x)\nu(x)dx \ge 0. \tag{13}$$

**Доказательство.** Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи $TD^{\infty}$. Тогда, согласно (10), справедливо равенство

$$p(x)\,\tau(x) = \gamma_3(1-x)^{1-\beta} a(x) \int_{-1}^{x} \nu(t)\,(x-t)^{-2\beta} dt +$$

$$+\gamma_3(x+1)^{1-\beta} b(x) \int_{x}^{1} \nu(t)\,(t-x)^{-2\beta} dt, -1 \le x \le 1. \tag{14}$$

Отсюда в силу условий (11) и $p_0(x) \neq 0$, имеем

$$\tau(x) = \gamma_3 a_1(x) \int_{-1}^{x} \nu(t)\,(x-t)^{-2\beta} dt + \gamma_3 b_1(x) \int_{x}^{1} \nu(t)\,(x-t)^{-2\beta} dt. \tag{15}$$

где $a_1(x) = (x+1)^{\varepsilon_1} a_0(x)/p_0(x),\ b_1(x) = (1-x)^{\varepsilon_1} b_0(x)/p_0(x)$.

Подставляя $\tau(x)$ в (13), используя формулу [9]:

$$|x-t|^{-2\beta} = \frac{1}{\Gamma(2\beta)\cos(\pi\beta)} \int_{0}^{\infty} z^{2\beta-1} \cos[z(x-t)]dz,$$

а затем, рассуждая аналогично получим [10]:

$$\Delta = \gamma_4 \int_{0}^{\infty} z^{2\beta-1} dz \left\{ 2\left[\left(\int_{-1}^{1} \nu(t)\cos zt dt\right)^2 + \left(\int_{-1}^{1} \nu(t)\sin zt dt\right)^2\right] - \right.$$

$$-\int\limits_{-1}^{1} a'_1(x)\left[\left(\int\limits_{-1}^{x}\nu(t)\cos zt dt\right)^2+\left(\int\limits_{-1}^{x}\nu(t)\sin zt dt\right)^2\right]dx+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1} b'_1(x)\left[\left(\int\limits_{x}^{1}\nu(t)\cos zt dt\right)^2+\left(\int\limits_{x}^{1}\nu(t)\sin zt dt\right)^2\right]dx,$$

где $\gamma_4=\left[(2-4\beta)^{2\beta}\Gamma(\beta)\right]/\left[8\Gamma(1/2-\beta)\Gamma^2(\beta)\cos\pi\beta\right]$.

Отсюда, в силу условий (12) следует, что $\Delta\geq 0$. Лемма доказана. □

Теперь можно перейти к доказательству Теоремы 1.

**Доказательство.** Пусть $u(x,y)$ – решение однородной задачи $TD^\infty$. Тогда в области $\Omega_1$ справедливо тождество.

$$(y^m u u_x)_x+(u u_y)_y-y^m(u_x)^2-(u_y)^2=0, \tag{16}$$

а на $AB$, имеет место равенство (15).

Пусть $\Omega_{1R}=\{(x,y);-R<x<R,0<y<1\}$. Интегрируя тождество (16) по области $\Omega_{1R}$, с учётом условия (3) и $\varphi_j(x)\equiv 0\left(j=\overline{1,3}\right)$, находим

$$\iint\limits_{\Omega_1}\left[y^m(u_x)^2+(u_y)^2\right]dxdy+\int\limits_0^1\tau(x)\nu(x)dx=0. \tag{17}$$

В силу утверждения леммы, из (17) получим $u(x,y)\equiv const$ в $\overline{\Omega}_1$. Учитывая условие (3) и $\varphi_j(x)\equiv 0\left(j=\overline{1,3}\right)$, имеем $u(x,y)\equiv 0$ в $\overline{\Omega}_1$. Поэтому $\tau(x)\equiv 0$, $x\in[-1,1]$, $\nu(x)\equiv 0$, $x\in[-1,1]$. Тогда, согласно формуле (5), $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar{\Omega}_2$. Следовательно, $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\bar{\Omega}$. Отсюда следует утверждение Теоремы 1. □

## Существование решения задачи $TD^\infty$

Переходим к доказательству существования решения задачи $TD^\infty$. При этом предположим, что выполнены условия теоремы 1. Пусть $u(x,y)$ решение задачи $TD^\infty$ и $u(x,0)=\tau(x)\in C[-1,1]\cap C^2(-1,1)$, $u_y(x,0)=\nu(x)\in C^2(-1,1)$ и может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$ на концах интервала $(-1,1)$. Тогда на $AB$ справедливо равенство (10).

Решая задачу Дирихле в области $\Omega_1$ методом функций Грина получим:

$$u(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tau_0(t)G_\eta(t,0;x,y)dt+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(t)G_\eta(t,1;x,y)dt, \tag{18}$$

где

$$G_\eta(t,0;x,y)=-ky\left[(t-x)^2+4\mu^2y^{m+2}\right]^{\beta-1}+$$

$$+\frac{\sqrt{y}}{(m+2)^\mu\Gamma(\mu)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho^{\mu-1}\frac{\mathrm{K}_\mu[2\mu|\rho|]}{\mathrm{I}_\mu[2\mu|\rho|]}\mathrm{I}_\mu\left[2\mu|\rho|y^{(m+2)/2}\right]e^{i\rho(t-x)}d\rho,$$

$$G_\eta(t,1;x,y)=4\mu\beta k\left(y^{(m+4)/2}+y\right)\left(r_1^2\right)^{\beta-2}F\left(1-\beta,1-\beta,2-2\beta;\frac{16\mu^2y^{(m+2)/2}}{r_1^2}\right)-$$

$$-\mu k\left(\frac{y}{\mu r_1^2}-\frac{y+y^{-m/2}}{\left(r_1^2\right)^2}\right)\left(r_1^2\right)^{\beta}F\left(1-\beta,1-\beta,1-2\beta;\frac{16\mu^2y^{(m+2)/2}}{r_1^2}\right)+$$

$$+\frac{\mu\sqrt{y}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{K}_\mu\left[2\mu\left|\rho\right|\right]}{\mathrm{I}_\mu\left[2\mu\left|\rho\right|\right]}\mathrm{I}_\mu\left[2\mu\left|\rho\right|y^{(m+2)/2}\right]\mathrm{I}_{\mu-1}\left[2\mu\left|\rho\right|\right]e^{i\rho(t-x)}d\rho,$$

$k=\dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{4}{m+2}\right)^{2-2\beta}\dfrac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}$, $r_1^2=(x-t)^2+4\mu^2y^{m+2}$, $\mu=\dfrac{1}{m+2}$. Здесь $\mathrm{I}_\mu[z]$ и $\mathrm{K}_\mu[z]$ соответственно называются модифицированными функциями Бесселя и Макдональда, а $F(a,b,c;z)$ гипергеометрическая функция Гаусса [11].

$$\tau_0(x)=\begin{cases}\varphi_2(x), & -\infty<x\le-1,\\ \tau(x), & -1\le x\le 1,\\ \varphi_3(x), & 1\le x<+\infty.\end{cases}\tag{19}$$

Учитывая (19) перепишем (18) в виде

$$u(x,y)=-ky\int\limits_{-1}^{1}\tau(t)\left[(t-x)^2+4\mu^2y^{m+2}\right]^{\beta-1}dt+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1}\tau(t)g(t;x,y)\,dt+\Phi(x,y).\tag{20}$$

$$g(t;x,y)=\frac{\sqrt{y}}{(m+2)^\mu\Gamma(\mu)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho^{\mu-1}\frac{\mathrm{K}_\mu\left[2\mu\left|\rho\right|\right]}{\mathrm{I}_\mu\left[2\mu\left|\rho\right|\right]}\mathrm{I}_\mu\left[2\mu\left|\rho\right|y^{(m+2)/2}\right]e^{i\rho(t-x)}d\rho$$

$$\Phi(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{-1}\varphi_2(t)\,G_\eta(t,0;x,y)\,dt+\int\limits_{1}^{+\infty}\varphi_3(t)G_\eta(t,0;x,y)\,dt+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(t)G_\eta(t,1;x,y)\,dt.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{y\left[(x-t)^2+4\mu^2y^{m+2}\right]^{\beta-1}\right\}=$$

$$=\frac{1}{1-2\beta}\frac{\partial}{\partial t}\left\{(x-t)\left[(x-t)^2+4\mu^2y^{m+2}\right]^{\beta-1}\right\},$$

считая $y\neq0$ и дифференцируя (20) по $y$, и переходя к пределу при $y\to0$ получим

$$\nu(x)=\frac{k}{1-2\beta}\left\{\frac{d}{dx}\int\limits_{-1}^{x}\frac{\tau(t)\,dt}{(x-t)^{1-2\beta}}-\frac{d}{dx}\int\limits_{x}^{1}\frac{\tau(t)\,dt}{(t-x)^{1-2\beta}}\right\}+$$

$$+\int_{-1}^{1}\tau(t)g_y(t;x,0)\,dt+F_1(x),-1<x<1, \tag{21}$$

где $F_1(x)=\lim_{y\to 0}\Phi_y'(x,y)$.

Равенство (21) является основным функциональным соотношением между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на $AB$ из области $\Omega_1$.

Следовательно, задача $TD^\infty$ в смысле разрешимости (в классе искомых функций) эквивалентна системе уравнений {(10), (21)}. Если из этой системы однозначно найдем функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$, то решение задачи $TD^\infty$ в областях $\Omega_1$ и $\Omega_2$ определяются формулами (5) и (18) соответственно.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены все условия Теоремы 1, а также* $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)\in C^2[-1,1]$, $a_0(1)\times b(-1)\neq 0$, $\varphi_2(-1)=\varphi_3(1)=0$, $d(x)\in C[-1,1]\cap C^2(-1,1)$, *тогда существует решение задачи* $TD^\infty$.

**Доказательство.** Исключая $\nu(x)$ из (10) и (21), получим

$$A(x)\tau(x)+\frac{B(x)}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)}{t-x}dt+\int_{-1}^{1}Q_1(x,t)\,\tau(t)\,dt=F_2(x), \tag{22}$$

где

$$A(x)=p_0(x)-\left[(1+x)^{\varepsilon_1}a_0(x)+(1-x)^{\varepsilon_1}b(x)\right]\sin\beta\pi, \tag{23}$$

$$B(x)=\left[(1+x)^{\varepsilon_1}a_0(x)+(1-x)^{\varepsilon_1}b(x)\right]i\cos\beta\pi, \tag{24}$$

$$Q_1(x,t)=\frac{Q_2(x,t)-Q_2(x,x)}{t-x}+Q_3(x,t),$$

$$Q_2(x,t)=\left[(1+x)^{\varepsilon_1}a_0(x)\left(\frac{x+1}{t+1}\right)^{1-2\beta}+(1-x)^{\varepsilon_1}b_0(x)\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{1-2\beta}\right]\frac{\cos\beta\pi}{\pi},$$

$$Q_3(x,t)=|x-t|^{2\beta-1}Q_4(x,t),Q_4(x,t)\in C(-1\le x,t\le 1)\cap C^2(-1<x,t<1),$$

$$F_2(x)=[\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)]\,d(x)+$$

$$+\gamma_3(1+x)^{\varepsilon_1}a_0(x)\int_{-1}^{x}F_1(t)(x-t)^{-2\beta}dt+\gamma_3(1-x)^{\varepsilon_1}b_0(x)\int_{x}^{1}F_1(t)(t-x)^{-2\beta}dt.$$

Очевидно, что $Q_1(x,t)$ – ядро со слабой особенностью, а на основании условий, наложенных на заданные функции следует, что $F_2(x)\in C[-1,1]\cap C^2(-1,1)$. Запишем уравнение (22) в следующем виде

$$A(x)\tau(x)+\frac{B(x)}{\pi i}\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)}{t-x}dt=F_3(x), \tag{25}$$

где $F_3(x)=F_2(x)-\int_{-1}^{1}Q_1(x,t)\tau(t)dt$.

Уравнение (25) является уравнением нормального типа, так как $A^2(x)+B^2(x)\neq 0$, $\forall x\in[-1,1]$. Индекс интегрального уравнения (25) равен нулю в классе функций, ограниченныхпри $x\to -1$ и $x\to 1$. Каноническая функция имеет вид

$$X(z)=\left[(1-z^2)\right]^{(1/2)-\beta}\omega(z),$$

где $\omega(z)\neq 0$ – функция, удовлетворяющая условию Гельдера. Поэтому сингулярное интегральное уравнение (25) имеет единственное решение в классе функций ограниченных при $x\to -1$ и $x\to 1$. Решение уравнения (25) в этом классе выписывается в виде

$$\tau(x)=\frac{A(x)F_3(x)}{A^2(x)+B^2(x)}-\frac{B(x)X(x)}{\pi\left[A^2(x)+B^2(x)\right]}\int\limits_{-1}^{1}\frac{F_3(t)\,dt}{X(t)(t-x)},-1\leq x\leq 1.$$

Подставляя выражение $F_3(x)$, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\tau(x)+\int\limits_{-1}^{1}K(x,t)\tau(t)\,dt=F_4(x). \tag{26}$$

Здесь

$$K(x,t)=\frac{A(x)Q(x)}{A^2(x)+B^2(x)}-\frac{B(x)X(x)}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\frac{Q_1(z,t)}{X(z)(z-x)}dz,$$

$$F_4(x)=\frac{A(x)Q(x)}{A^2(x)+B^2(x)}-\frac{B(x)X(x)}{\pi}\int\limits_{0}^{1}\frac{F_2(t)}{X(t)(t-x)}dt.$$

Однозначная и безусловная разрешимость интегрального уравнения (26) в силу эквивалентности, следует из единственности решения задачи $TD^{\infty}$. □

## Заключение

Из этой задачи при $a(x)\equiv b(x)\equiv 0$, следует задача Дирихле для уравнения (1) в области $\Omega_1$, а при $b(x)\equiv c(x)\equiv 0$ и $a(x)\equiv c(x)\equiv 0$ следует задача Трикоми в области с заданными значениями искомой функции на $AC$ и $BC$ соответственно, которая представляет самостоятельный интерес.

## Список литературы/References


[1] Нахушев А. М., *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*, Наука,, М., 2006, 287 с. [Nakhushev A. M., *Zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh*, Nauka,, M., 2006, 287 pp.]

[2] Смирнов М. М., *Уравнения смешанного типа*, Высшая школа, М., 1985, 304 с. [Smirnov M. M., *Uravneniya smeshannogo tipa*, Vysshaya shkola, M., 1985, 304 pp.]

[3] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., 1995, 301 с. [Nakhushev A. M., *Uravneniya matematicheskoy biologii*, Vysshaya shkola, M., 1995, 301 pp.]

[4] Нахушев А. М., “Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод”, *Дифференциальные уравнения*, **17**:1 (1982), 72-81. [Nakhushev A. M., “Ob odnom priblizhennom metode resheniya krayevykh zadach dlya differentsial’nykh uravneniy i yego prilozheniya k dinamike pochvennoy vlagi i gruntovykh vod”, *Differentsial’nyye uravneniya*, **17**:1 (1982), 72-81].

[5] Нахушев А. М., “Нагруженные уравнения и их приложения”, *Дифференциальные уравнения*, **19**:1 (1983), 86-94. [Nakhushev A. M., “Nagruzhennyye uravneniya i ikh prilozheniya”, *Differentsial’nyye uravneniya*, **19**:1 (1983), 86-94].

[6] Нахушев А. М., “О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями”, *Дифференциальные уравнения*, **21**:1 (1985), 92-101. [Nakhushev A. M., “O nelokal’nykh krayevykh zadachakh so smeshcheniyem i ikh svyazi s nagruzhennymi uravneniyami”, *Differentsial’nyye uravneniya*, **21**:1 (1985), 92-101].

[7] Овсянников Л. В., “О движении клиновидного профиля со скоростью звука”, *Труды ЛКВВИА*, 1950, №33, 25-51. [Ovsyannikov L. V., “O dvizhenii klinovidnogo profilya so skorost’yu zvuka”, *Trudy LKVVIA*, 1950, №33, 25-51].

[8] Салахитдинов М. С., Хасанов А., “Краевые задачи со смещением для уравнения”, *Дифференциальные уравнения и их приложения*, ФАН, Ташкент, 1979, 14-25. [Salakhitdinov M. S., Khasanov A., “Krayevyye zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniya”, *Differentsial’nyye uravneniya i ikh prilozheniya*, FAN, Tashkent, 1979, 14-25].

[9] Трикоми Ф., *Лекции по уравнениям в частных производных*, М., 1957, 440 с. [Trikomi F., *Lektsii po uravneniyam v chastnykh proizvodnykh*, M., 1957, 440 pp.]

[10] Салахитдинов М. С., Уринов А. К., *Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром*, ФАН, Ташкент, 1997, 168 с. [Salakhitdinov M. S., Urinov A. K., *Krayevyye zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa so spektral’nym parametrom*, FAN, Tashkent, 1997, 168 pp.]

[11] Кузнецов М. С., *Специальные функции*, Высшая школа, М., 1965, 424 с. [Kuznetsov M. S., *Spetsial’nyye funktsii*, Vysshaya shkola, M., 1965, 424 pp.]

## Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.

[2] Смирнов М. М. Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.

[3] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

[4] Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1982. Т.17. №1. С. 72-81

[5] Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19. №1. С. 86-94.

[6] Нахушев А. М. О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференциальные уравнения. 1985. Т.21. №1. С. 92-101.

[7] Овсянников Л. В. О движении клиновидного профиля со скоростью звука // Труды ЛКВВИА. 1950. вып. 33. С. 25-51.

[8] Салахитдинов М. С., Хасанов А. Краевые задачи со смещением для уравнения. Дифференциальные уравнения и их приложения. Ташкент: ФАН, 1979. С. 14-25.

[9] Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957, 440 с.

[10] Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: ФАН, 1997. 168 с.

[11] Кузнецов М. С. Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965. 424 с.

**Для цитирования:** Зуннунов Р. Т., Толибжонов Ж. А. Краевая задача со смещением для модельного уравнения смешанного типа в неограниченной области // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2020. Т. 30. № 1. С. 31-41. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-30-1-31-41

**For citation:** Zunnunov R. T., Tolibjonov J. A. A boundary value problem with an offset for a model equation of mixed type in an unbounded domain, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **30**: 1, 31-41. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-30-1-31-41

Поступила в редакцию / Original article submitted: 27.03.2020

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2020. vol. 30. no.1. pp. 31–41.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-30-1-31-41

MSC 35M12

# A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH AN OFFSET FOR A MODEL EQUATION OF MIXED TYPE IN AN UNBOUNDED DOMAIN

**R. T. Zunnunov[1], J. A. Tolibjonov[2]**

[1] Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy, Academy of Sciences of Uzbekistan, Academy of Sciences of Uzbekistan, 100170, Mirzo Ulugbek str., 85, Tashkent, Uzbekistan

[2] National University of Uzbekistan after named Mirzo Ulugbek, 100174. Universitetskaya St., 4. Tashkent. Republic of Uzbekistan

E-mail: zunnunov@mail.ru

In this paper, for a mixed type equation in an unbounded region, the elliptical part of which is a horizontal strip, we study the problem with a shift on the characteristics of different families. The uniqueness of the solution of the problem is proved by the method of energy integrals, and the existence of a solution of the problem by the method of Green functions and the method of integral equations.

*Key words: bias problem, mixed type equation, unlimited domain, Green's function method, integral equation method, energy integral method*