Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 28. № 3. C. 26-31. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-26-31

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Р. Х. Макаова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: makaova.ruzanna@mail.ru

В работе исследуется краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка. Доказана теорема существования и единственности регулярного решения. Решение исследуемой задачи найдено в явном виде.

Ключевые слова: уравнение параболо-гиперболического типа, уравнение Аллера, метод Трикоми.

MSC 35L25, 35L80

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THIRD ORDER EQUATION OF PARABOLIC–HYPERBOLIC TYPE

R. Kh. Makaova

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89A Shortanova St., Nalchik, 360000, Russia

E-mail: makaova.ruzanna@mail.ru

In this paper we study the boundary value problem for third order equation of parabolic-hyperbolic type. The existence and uniqueness theorem of a regular solution is proved. The solution to the problem under study was found explicitly.

Key words: equation of parabolic-hyperbolic type, Hallaire equation, Tricomi method.

Введение

В евклидовой плоскости точек (x,y) рассмотрим уравнение вида

$$0 = \begin{cases} u_y - au_{xx} - bu_{xxy}, & y > 0, \\ u_y + cu_{xx}, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b и c – заданные положительные числа; $u = u(x,y)$ – искомая действительная функция независимых переменных x и y.

Рассматриваемое уравнение при $y > 0$ совпадает с уравнением Аллера [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right), \tag{2}$$

а при $y < 0$ – с обратным уравнением параболического типа [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{3}$$

Уравнение (2) также называется модифицированным уравнением диффузии [3] и относится к уравнениям псевдопараболического типа [4]. Исследованию различных локальных, нелокальных и смешанных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка, в частности для уравнения Аллера, посвящены работы [5]-[11].

Постановка задачи и полученные результаты

Пусть $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup (A_0A_r)$, где $\Omega^+ = \{(x,y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$, $\Omega^- = \{(x,y) : 0 < x < r, -T < y < 0\}$ и $A_0A_r = \{(x,0) : 0 < x < r\}$, $A_0 = (0,0)$, $A_r = (r,0)$.

Регулярным в области Ω *решением* $u = u(x,y)$ *уравнения* (1) *назовем функцию* $u = u(x,y)$ *такую, что* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $u_{xxy} \in C(\Omega^+)$ *и* $u_{xxy}(x,0) \in L_1(A_0A_r)$, *удовлетворяющую уравнению* (1).

Исследуется следующая

Задача. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее следующим краевым условиям:*

$$u(0,y) = \tau(y), \quad -T \le y \le T, \tag{4}$$

$$u(r,y) = \tau_r(y), \quad -T \le y \le T, \tag{5}$$

где $\tau(y)$, $\tau_r(y) \in C^1[T;-T]$.

Имеет место следующая

Теорема. *Регулярное решение задачи* (4), (5) *для уравнения* (1) *существует и оно единственно.*

Доказательство. Положим

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le r, \tag{6}$$

$$u_y(x,0) = \psi(x), \quad 0 < x \le r, \tag{7}$$

тогда $\varphi(0)=\tau(0)$, $\varphi(r)=\tau_r(0)$.

Переходя к пределу при $y\to+0$ с учетом (6) и (7), из (2) находим функциональное соотношение между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, принесенное из области Ω^+ на линию $y=0$, в виде

$$\psi(x)-a\varphi''(x)-b\psi''(x)=0, \tag{8}$$

а из граничных условий (4) и (5) с учетом (7) имеем, что

$$\psi(0)=\tau'(0), \tag{9}$$

$$\psi(r)=\tau_r'(0). \tag{10}$$

Рассмотрим интеграл

$$J=\int\limits_0^r u_y(x,0)u_{xx}(x,0)dx=\int\limits_0^r \psi(x)\varphi''(x)dx. \tag{11}$$

Умножив (8) на функцию $\psi(x)$ и проинтегрировав в пределах от 0 до r, получим

$$\int\limits_0^r \psi^2(x)dx-a\int\limits_0^r \psi(x)\varphi''(x)dx-b\int\limits_0^r \psi''(x)\psi(x)dx=0.$$

Откуда в силу обозначения (11) при однородных краевых условиях (4) и (5) верно, что

$$J=\frac{1}{a}\int\limits_0^r \psi^2(x)dx+\frac{b}{a}\int\limits_0^r \psi'^2(x)dx\geq 0. \tag{12}$$

Найдем теперь фундаментальное соотношение между искомыми функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, принесенное из области Ω^- на линию $y=0$. Из (3), переходя к пределу при $y\to-0$ с учетом (6) и (7), получим

$$\psi(x)+c\varphi''(x)=0. \tag{13}$$

Аналогично, умножив на функцию $\psi(x)$ и проинтегрировав в пределах от 0 до r, из (13) имеем

$$J=-\frac{1}{c}\int\limits_0^r \psi^2(x)dx\leq 0. \tag{14}$$

Таким образом, из (12) и (14) следует, что $J=0$, которое имеет место тогда и только тогда, когда $\psi(x)=0$. Тогда, как видно из (13), функция $\varphi(x)=\varphi'(0)x+\varphi(0)$. При однородных граничных условиях (4), (5) из последнего равенства следует, что $\varphi(x)=0$. Тогда в области Ω^+ приходим к задаче $u(0,y)=0$, $u(r,y)=0$ и $u(x,0)=0$ для уравнения (2), которая согласно результатам работы [11] имеет только тривиальное решение $u(x,y)=0$. А в области Ω^- решение однородной первой краевой задачи для уравнения (3) не может отличаться от нулевого. То есть, $u(x,y)\equiv 0$ в области Ω, откуда следует единственность решения исследуемой задачи.

Перейдем к доказательству существования решения исследуемой задачи. Исключая из полученных выше фундаментальных соотношений (8) и (13) функцию $\varphi''(x)$, относительно функции $\psi(x)$ приходим к задаче нахождения решения уравнения

$$\psi''(x)+\lambda\psi(x)=0, \quad \lambda=-\frac{a+c}{bc}<0,$$

удовлетворяющее условиям

$$\psi(0)=\tau'(0), \quad \psi(r)=\tau_r'(0),$$

решение которого можно выписать в явном виде

$$\psi(x)=\frac{\tau'(0)\,\mathrm{sh}[\sqrt{-\lambda}(r-x)]+\tau_r'(0)\,\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}x)}{\mathrm{sh}(\sqrt{-\lambda}r)}, \quad \lambda<0. \qquad (15)$$

Тогда из (13) и (15) с учетом краевых условий (4), (5) функция $\varphi(x)$ находится однозначно по формуле

$$\varphi(x)=\frac{1}{c}\int\limits_0^x(\xi-x)\psi(\xi)d\xi+\frac{x}{rc}\int\limits_0^r(r-\xi)\psi(\xi)d\xi+\frac{x}{r}[\tau_r(0)-\tau(0)]+\tau(0). \qquad (16)$$

Краевая задача (4)-(6) для уравнения (1) при $y>0$ совпадает с неоднородной первой краевой задачей для уравнения Аллера, решение которой находим с помощью метода функции Грина в виде

$$u(x,y)=\int\limits_0^r G(x,y;\xi,0)[\varphi(\xi)-b\varphi''(\xi)]d\xi+$$

$$+\int\limits_0^y \tau(\eta)\left[aG_\xi(x,y;0,\eta)-bG_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)\right]d\eta-$$

$$-\int\limits_0^y \tau_r(\eta)\left[aG_\xi(x,y;r,\eta)-bG_{\xi\eta}(x,y;r,\eta)\right]d\eta+$$

$$+b\left[\tau(y)G_\xi(x,y;0,y)-\tau_r(y)G_\xi(x,y;r,y)\right], \qquad (17)$$

где функция $G(x,y;\xi,\eta)$ определяется по формуле [11]:

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{2}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+b\mu_n}e^{-\frac{a\mu_n}{1+b\mu_n}(y-\eta)}\sin(\sqrt{\mu_n}\xi)\sin(\sqrt{\mu_n}x), \quad \mu_n=\left(\frac{\pi n}{r}\right)^2.$$

Решение задачи (4)-(6) для уравнения (1) при $y<0$ находим в виде

$$u(x,y)=\int\limits_0^r G^0(x,y;\xi,0)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+c\int\limits_y^0 \tau(\eta)G^0_\xi(x,y;0,\eta)d\eta-c\int\limits_y^0 \tau_r(\eta)G^0_\xi(x,y;r,\eta)d\eta, \qquad (18)$$

где

$$G^0(x,y;\xi,\eta)=\frac{2}{r}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-c\mu_n(\eta-y)}\sin(\sqrt{\mu_n}\xi)\sin(\sqrt{\mu_n}x),\quad \mu_n=\left(\frac{\pi n}{r}\right)^2.$$

Отметим, что полученная функция $G^0(x,y;\xi,\eta)$ совпадает с функцией мгновенного точечного источника для уравнения теплопроводности [12].

Следовательно, с учетом найденной функции $\varphi(x)$ по формуле (16), решение исследуемой задачи (4), (5) для уравнения (2) в области Ω^+ находится по формуле (17), а для уравнения (3) в области Ω^- находится по формуле (18).

Список литературы/References

[1] Hallaire M., “L’eau et la productions vegetable”, *Institut National de la Recherche Agronomique*, **9** (1964).

[2] Джураев Т. Д., *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.*, Фан, Ташкент, 1979, 120 с. [Dzhuraev T. D., *Kraevye zadachi dlya uravnenij smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov.*, Fan, Tashkent, 1979, 120 pp., (in Russian)].

[3] Чудновский А.Ф., *Теплофизика почв*, Наука, М., 1976, 352 с. [Chudnovskij A.F., *Teplofizika pochv*, Nauka, M., 1976, 352 pp., (in Russian)].

[4] Showalter R.E., Ting T.W., “Pseudoparabolic partial differential equations”, *SIAM J. Math. Anal.*, **1**:1 (1970), 1-26.

[5] Yangarber V.A., “The mixed problem for a modified moisture-transfer equation”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **8**:1 (1967), 62–64.

[6] Шхануков М. Х., “О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах”, *Дифференциальные уравнения*, **18**:4 (1982), 689–699. [Shkhanukov M. Kh., “Some boundary value problems for a third-order equation that arise in the modeling of the filtration of a fluid in porous media”, *Differential Equations*, **18**:4 (1982), 689–699].

[7] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., 1995, 301 с. [Nahushev A. M., *Uravneniya matematicheskoj biologii*, Vysshaya shkola, M., 1995, 301 pp., (in Russian)].

[8] Хубиев К.У., “О математической модели уравнения Аллера”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, **4-1**:16 (2016), 56–65. [Hubiev K.U., “O matematicheskoj modeli uravneniya Allera”, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, **4-1**:16 (2016), 56–65, (in Russian)].

[9] Макаова Р.Х., “Первая краевая задача в нелокальной постановке для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана - Лиувилля”, *Вестник АГУ. Серия 4: Естественно-математические и технические науки*, **4**:211 (2017), 36–41. [Makaova R.H., “Pervaya kraevaya zadacha v nelokal’noj postanovke dlya obobshchennogo uravneniya Allera s drobnoj proizvodnoj Rimana - Liuvillya”, *Vestnik AGU. Seriya 4: Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki*, **4**:211 (2017), 36–41, (in Russian)].

[10] Макаова Р.Х., “Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:3 (2015), 35–38. [Makaova R.H., “Vtoraya kraevaya zadacha dlya obobshchennogo uravneniya Allera s drobnoj proizvodnoj Rimana–Liuvillya”, *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **17**:3 (2015), 35–38, (in Russian)].

[11] Макаова Р.Х., “Первая краевая задача для неоднородного уравнения Аллера”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-Мат. науки.*, **4-1**:16 (2016), 45–49. [Makaova R.H., “Pervaya kraevaya zadacha dlya neodnorodnogo uravneniya Allera”, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki.*, **4-1**:16 (2016), 45–49, (in Russian)].

[12] Тихонов А. Н., Самарский А. А., *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1977, 736 с. [Tihonov A. N., Samarskij A. A., *Uravneniya matematicheskoj fiziki*, Nauka, M., 1977, 736 pp., (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Hallaire M. L'eau et la productions vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique. 1964. vol. 9.

[2] Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 120 с.

[3] Чудновский А.Ф. Теплофизика почв. М.: Наука, 1976. 352 с.

[4] Showalter R.E., Ting T.W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. vol. 1. no. 1. pp. 1-26.

[5] Yangarber V.A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1967. vol. 8. no. 1. pp. 62–64.

[6] Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. №4. С. 689–699.

[7] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

[8] Хубиев К. У. О математической модели уравнения Аллера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. №4-1(16). С. 56–65.

[9] Макаова Р. Х. Первая краевая задача в нелокальной постановке для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана - Лиувилля // Вестник АГУ. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2017. Т. 4. №211. С. 36–41.

[10] Макаова Р. Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. №3. С. 35–38.

[11] Макаова Р.Х. Первая краевая задача для неоднородного уравнения Аллера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-Мат. науки. 2016. №4-1(16). С. 45–49.

[12] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

Для цитирования: Макаова Р. Х. Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 28. № 3. С. 26-31. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-26-31

For citation: Makaova R. Kh. The boundary value problem for order equation of parabolic-hyperbolic type, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2019, **28**: 3, 26-31. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-26-31

Поступила в редакцию / Original article submitted: 19.09.2019