Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 28. № 3. C. 16-25. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-16-25

УДК 517.91

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

М. Г. Мажгихова

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино - Балкарский научный центр РАН», 360000,
г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: mazhgihova.madina@yandex.ru

В работе доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи со смещением для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом. Решение задачи выписано в терминах функции Грина. Получено условие однозначной разрешимости и показано, что оно может нарушаться только конечное число раз.

Дифференциальное уравнение дробного порядка, дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, функция Грина, обобщенная функция Миттаг-Леффлера, обобщенная функция Райта.

Введение

Рассматрим уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(t)-\lambda u(t)-\mu H(t-\tau)u(t-\tau)=f(t),\quad 1<\alpha\leq 2,\quad 0<t<1, \tag{1}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha}u(t)=D_{0t}^{\alpha-2}u''(t)$ – дробная производная Капуто [1, с. 11], D_{0t}^{β} – оператор дробного интегродифференцирования в смысле Римана-Лиувилля с началом в точке s для любого $\beta\in\mathbb{R}$ определяется по формуле [1, с. 9]:

$$D_{st}^{\beta}g(t)=\begin{cases}\frac{\text{sign(t-s)}}{\Gamma(-\beta)}\int\limits_{s}^{t}\frac{g(\xi)d\xi}{|t-\xi|^{\beta+1}}, & \beta<0;\\ g(t), & \beta=0;\\ \text{sign}^{n}(t-s)\frac{d^n}{dt^n}D_{st}^{\beta-n}g(t), & n-1<\beta\leq n, n\in\mathbb{N},\end{cases}$$

$\Gamma(z)$ – гамма функция Эйлера, $H(t)$ – функция Хевисайда, λ, μ – произвольные постоянные, τ – фиксированное положительное число.

В работе [2] Барреттом методом последовательных приближений получено в явном виде решение дифференциального уравнения дробного порядка. Теорема существования и единственности для линейного дифференциального уравнения дробного порядка общего вида доказана в [3]. Теории дробного исчисления посвящены монографии в [4], [5], [6] (см. также ссылки в этих работах).

Дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом посвящены работы [7], [8], [9], [10]. Постановки начальной и краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом приведены в работе [11].

Начальная и краевая задачи с условиями Штурма-Лиувилля, Дирихле и Неймана для уравнения (1) решены в [12], [13], [14].

Начальная задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка изучена в [15]. Краевые задачи со смещением для дифференциального уравнения с производной Джрбашяна-Нерсесяна и для уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования исследованны соответственно в работах [16] и [17].

В работе доказана теорема существования и единственности решения краевой задачи со смещением для уравнения (1). Найдено условие однозначной разрешимости исследуемой задачи и доказано, что данное условие может нарушаться только для конечного числа вещественных значений λ.

Постановка задачи

Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(t)$, имеющую абсолютно непрерывную производную первого порядка на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяющую этому уравнению.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям:*

$$u(0) = u_0, \quad u(1) - au(t_1) = u_1, \quad 0 < t_1 < 1, \tag{2}$$

где u_0, u_1, a – заданные постоянные.

Рассмотрим функцию

$$W_\nu(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu^m (t - m\tau)_+^{\alpha m + \nu - 1} E_{\alpha, \alpha m + \nu}^{m+1}(\lambda (t - m\tau)_+^{\alpha}), \tag{3}$$

$$(t - m\tau)_+^{\rho} = \begin{cases} (t - m\tau)^{\rho}, & t - m\tau > 0 \\ 0, & t - m\tau \le 0, \end{cases}$$

$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) z!}$ – обобщённая функция Миттаг-Леффлера [18], $(\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho + k)}{\Gamma(\rho)}$ – символ Похгаммера.

В работе [13] доказаны следующие свойства для функции $W_\nu(t)$:

1. Начиная с некоторого номера m выражение $t - m\tau < 0$, поэтому в ряде (3) содержится конечное число слагаемых $N \le [\frac{t}{\tau}] + 1$;

2. Для $W_\nu(t)$ справедлива формула интегродифференцирования порядка $\alpha \in \mathbb{R}$

$$D_{0t}^{\alpha} W_\nu(t) = W_{\nu - \alpha}(t); \tag{4}$$

3. Функция $W_\nu(t)$ удовлетворяет соотношению:

$$W_\nu(t) = \lambda W_{\nu+\alpha}(t) + \mu W_{\nu+\alpha}(t-\tau) + \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, \quad \alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \nu \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$G(t,\xi) = H(t-\xi)W_\alpha(t-\xi) + \frac{W_2(t)}{W_2(1) - aW_2(t_1)}[aH(t_1-\xi)W_\alpha(t_1-\xi) - W_\alpha(1-\xi)], \tag{6}$$

при

$$W_2(1) - aW_2(t_1) \neq 0. \tag{7}$$

Функция $G(t,\xi)$ удовлетворяет свойствам:

1. Функция $G(t,\xi)$ непрерывна для всех значений t и ξ из отрезка $[0,1]$.

Справедливость этого свойства следует из формулы (6), а также из условия (7).

2. $G(t,\xi)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)|_{\xi=t-\varepsilon} - D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)|_{\xi=t+\varepsilon}] = 1.$$

Действительно,

$$D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi) = H(t-\xi)W_1(t-\xi) + \frac{W_2(t)}{W_2(1) - aW_2(t_1)}\Big(aH(t_1-\xi)W_1(t_1-\xi) - W_1(1-\xi)\Big),$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)|_{\xi=t-\varepsilon} - D_{1\xi}^{\alpha-1}G(t,\xi)|_{\xi=t+\varepsilon}] =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[W_1(\varepsilon) - \frac{W_2(t)}{W_2(1) - aW_2(t_1)}[W_1(1-t+\varepsilon) - W_1(1-t-\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon\to 0} W_1(\varepsilon) = 1.$$

3. Функция $G(t,\xi)$ является решением уравнения

$$D_{1\xi}^{\alpha}G(t,\xi) - \lambda G(t,\xi) - \mu H(1-\tau-\xi)G(t,\xi+\tau) = 0.$$

Справедливость свойства 3 следует из свойств функции (4) и (5).

4. Функция $G(t,\xi)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$D_{1\xi}^{\alpha-2}G(t,\xi)|_{\xi=0} = D_{1\xi}^{\alpha-2}G(t,\xi)|_{\xi=1} = 0.$$

Действительно,

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)|_{\xi=0} = W_2(t) + \frac{W_2(t)}{W_2(1) - aW_2(t_1)}[aW_2(t_1) - W_2(1)] = 0;$$

$$D_{0t}^{\alpha-2}G(t,\xi)|_{\xi=1} = -\frac{W_2(t)}{W_2(1) - aW_2(t_1)}W_2(0) = 0.$$

Функция $G(t,\xi)$, удовлетворяющая условиям 1-4, называется функцией Грина задачи (1), (2).

Теорема существования и единственности

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть функция* $f(t) \in C(0,1)$ *представима в виде*

$$f(t) = D_{0t}^{\alpha-2} g(t), \quad g(t) \in L(0,1), \tag{8}$$

и выполнено условие (7).

1) Тогда существует регулярное решение задачи (1), (2). *Решение имеет вид*

$$u(t) = u_0 D_{1\xi}^{\alpha-1} G(t,\xi)|_{\xi=0} - u_1 D_{1\xi}^{\alpha-1} G(t,\xi)|_{\xi=1} + \int\limits_0^1 f(\xi) G(t,\xi) d\xi. \tag{9}$$

2) Решение задачи (1), (2) *единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие* (7).

Доказательство.

1) В терминах функции (3) решение $u(t)$ (9) запишется в виде

$$u(t) = u_0 \left[W_1(t) - \frac{W_1(1) - aW_1(t_1)}{W_2(1) - aW_2(t_1)} W_2(t) \right] + u_1 \frac{W_2(t)}{W_2(1) - aW_2(t_1)} +$$

$$+ \frac{W_2(t)}{W_2(1) - aW_2(t_1)} \int\limits_0^1 f(\xi) \big(aH(t_1 - \xi) W_\alpha(t_1 - \xi) - W_\alpha(1-\xi) \big) d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t f(\xi) W_\alpha(t-\xi) d\xi \tag{10}$$

или

$$u(t) = v_1(t) + v_2(t) + v_3(t), \tag{11}$$

где

$$v_1(t) = u_0 \left[W_1(t) - \frac{W_1(1) - aW_1(t_1)}{W_2(1) - aW_2(t_1)} W_2(t) \right] + u_1 \frac{W_2(t)}{W_2(1) - aW_2(t_1)},$$

$$v_2(t) = \frac{W_2(t)}{W_2(1) - aW_2(t_1)} \int\limits_0^1 f(\xi) \big(aH(t_1 - \xi) W_\alpha(t_1 - \xi) - W_\alpha(1-\xi) \big) d\xi,$$

$$v_3(t) = \int\limits_0^t f(\xi) W_\alpha(t-\xi) d\xi.$$

Учитывая определение дробной производной Капуто $\partial_{0t}^\alpha u(t) = D_{0t}^{\alpha-2} u''(t)$ и представление функции $u(t)$ в виде (11) (а также свойство функции $W_\nu(t)$ (5)), вычислим $\partial_{0t}^\alpha [v_1(t) + v_2(t) + v_3(t)]$:

$$D_{0t}^{\alpha-2} v_1''(t) = \lambda \left[u_0 (W_1(t) - \frac{W_1(1) - aW_1(t_1)}{W_2(1) - aW_2(t_1)} W_2(t)) + u_1 \frac{W_2(t)}{W_2(1) - aW_2(t_1)} \right],$$

$$D_{0t}^{\alpha-2} v_2''(t) = \lambda \frac{W_2(t)}{W_2(1) - aW_2(t_1)} \int\limits_0^1 f(\xi) \left[aH(t_1 - \xi) W_\alpha(t_1 - \xi) - W_\alpha(1-\xi) \right] d\xi +$$

$$+\mu\frac{W_2(t-\tau)}{W_2(1)-aW_2(t_1)}\int\limits_0^1 f(\xi)\big(aH(t_1-\xi)W_\alpha(t_1-\xi)-W_\alpha(1-\xi)\big)d\xi.$$

Учитывая представление функции $f(t)$ (8) и формулу дробного интегрирования по частям [5]

$$\int\limits_a^b g(s)D_{as}^{\alpha}h(s)ds=\int\limits_a^b h(s)D_{bs}^{\alpha}g(s)ds,$$

получим, что

$$D_{0t}^{\alpha-2}v_3''(t)=D_{0t}^{\alpha-2}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^t D_{0\xi}^{\alpha-2}g(\xi)W_\alpha(t-\xi)d\xi=D_{0t}^{\alpha-2}\frac{d^2}{dt^2}\int\limits_0^t g(\xi)W_2(t-\xi)d\xi=$$

$$D_{0t}^{\alpha-2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t g(\xi)W_1(t-\xi)d\xi=D_{0t}^{\alpha-2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t g(\xi)[\lambda W_{\alpha+1}(t-\xi)+\mu W_{\alpha+1}(t-\xi-\tau)]d\xi=$$

$$=D_{0t}^{\alpha-2}[g(\xi)+\int\limits_0^t\Big(\lambda W_\alpha(t-\xi)+\mu W_\alpha(t-\xi-\tau)\Big)d\xi]=f(t)+$$

$$+\int\limits_0^t\lambda W_2(t-\xi)d\xi+\int\limits_0^t\mu W_2(t-\xi-\tau)d\xi.$$

Группируя отдельно слагаемые с λ и μ, и учитывая представление решения $u(t)$ в виде (10), получаем, что

$$\partial_{0t}^{\alpha}u(t)=f(t)+\lambda u(t)+\mu u(t-\tau).$$

Проверим, что полученное решение (9) удовлетворяет краевым условиям (2):

$$u(0)=u_0\left(W_1(0)+\frac{W_1(1)-aW_1(t_1)}{W_2(1)-aW_2(t_1)}W_2(0)\right)+u_1\frac{W_2(0)}{W_2(1)-aW_2(t_1)}=u_0;$$

$$u(1)-au(t_1)=u_0\left[W_1(1)-aW_1(t_1)-\frac{W_1(1)-aW_1(t_1)}{W_2(1)-aW_2(t_1)}\big(W_2(1)-aW_2(t_1)\big)\right]+$$

$$+u_1\left[\frac{W_2(1)}{W_2(1)-aW_2(1)}-a\frac{W_2(t_1)}{W_2(1)-aW_2(1)}\right]+$$

$$+\int\limits_0^1 f(\xi)\left[(aH(t_1-\xi)W_\alpha(t_1-\xi)-W_\alpha(1-\xi))\frac{W_2(1)-aW_2(t_1)}{W_2(1)-aW_2(t_1)}+\right.$$

$$\left.+W_\alpha(1-\xi)-aH(t_1-\xi)W_\alpha(t_1-\xi)\right]d\xi=u_1.$$

2) Теперь покажем, что если условие (7) не выполняется, то есть если

$$W_2(1)-aW_2(t_1)=0,\tag{12}$$

решение однородной задачи не единственно. Рассмотрим функцию $\bar{u}(t)=C\cdot W_2(t)$. Тогда $\bar{u}(t)$ является решением однородной задачи

$$\partial_{0t}^{\alpha}\bar{u}(t)-\lambda\bar{u}(t)-\mu H(t-\tau)\bar{u}(t-\tau)=0,$$

$$\bar{u}(0)=0,\quad \bar{u}(1)-a\bar{u}(t_1)=C\cdot(W_2(1)-aW_2(t_1))=0.$$

Теорема доказана.

О вещественных собственных значениях

Определение. Собственными значениями задачи (1), (2) назовем значения λ, при которых задача (1), (2) имеет регулярное решение, тождественно не равное нулю.

Из доказательства теоремы 1 следует, что множество вещественных собственных значений задачи (1), (2) совпадает со множеством вещественных нулей функции

$$\Phi(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}\mu^m\left[(1-m\tau)_+^{\alpha m+1}E_{\alpha,\alpha m+2}^{m+1}(\lambda(1-m\tau)_+^{\alpha})-a(t_1-m\tau)_+^{\alpha m+1}E_{\alpha,\alpha m+2}^{m+1}(\lambda(t_1-m\tau)_+^{\alpha})\right]. \quad (13)$$

Имеет место следующая

Теорема 2. *Задача* (1), (2) *имеет лишь конечное число вещественных собственных значений.*

Обобщенная функция Миттаг-Леффлера в терминах обобщенной функции Райта [21] записывается в следующем виде:

$$E_{\alpha,\alpha m+2}^{m+1}(\lambda(t-m\tau)_+^{\alpha})=\frac{1}{m!}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(m+1,1)\\(\alpha m+2,\alpha)\end{array}\middle|\lambda(t-m\tau)_+^{\alpha}\right],$$

где

$${}_p\Psi_q\left[\begin{array}{c}(a_l,\alpha_l)_{1,p}\\(b_l,\beta_l)_{1,q}\end{array}\middle|z\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{l=1}^{p}\Gamma(a_l+\alpha_l k)}{\prod_{l=1}^{q}\Gamma(b_l+\beta_l k)}\frac{z^k}{k!}.$$

Функция $\Phi(\lambda)$ является целой фунцией параметра λ. Исследуем ее свойства при $\lambda\to+\infty$ и $\lambda\to-\infty$.

При $\lambda\to+\infty$ для обощенной функции Райта справедлива асимптотическая формула [20], [21]:

$${}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(m+1,1)\\(\alpha m+2,\alpha)\end{array}\middle|\lambda(1-m\tau)_+^{\alpha}\right]=\alpha^{-m}\lambda^{\frac{m(1-\alpha)-1}{\alpha}}(1-m\tau)_+^{m(1-\alpha)-1}e^{(1-m\tau)_+\lambda^{1/\alpha}}\times$$
$$\times\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right].$$

Пусть N равно максимальному значению m, для которого $(1-m\tau)>0$. Тогда асимптотическая формула для функции (13) запишется в виде

$$\Phi(\lambda)=\sum_{m=0}^{N}\frac{\mu^m\alpha^{-m}}{m!}\lambda^{\frac{m-\alpha m-1}{\alpha}}\left[(1-m\tau)_+^m e^{(1-m\tau)_+^m\lambda^{1/\alpha}}-a(t_1-m\tau)_+^m e^{(t_1-m\tau)_+^m\lambda^{1/\alpha}}\right]\times$$
$$\times\left[1+O\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right]. \quad (14)$$

При $\lambda\to+\infty$ ряд (14) неограниченно растет.

Исследуем теперь функцию (13) при $\lambda\to-\infty$. Асимпототическая формула обобщенной функции Райта при $\lambda\to-\infty$ имеет вид [20], [21]:

$${}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c}(m+1,1)\\(\alpha m+2,\alpha)\end{array}\middle|\lambda(1-m\tau)_+^{\alpha}\right]=\frac{(-1)^{m+1}m!(1-m\tau)_+^{-\alpha(m+1)}}{|\lambda|^{m+1}\Gamma(2-\alpha)(m+1)!}+O\left(\frac{1}{|\lambda|^{m+1}}\right).$$

Тогда асимптотическая формула для функции (13) при $\lambda\to-\infty$ запишется в виде

$$\Phi(\lambda)=\sum_{m=0}^{N}\frac{(-1)^{m+1}\mu^m}{|\lambda|^{m+1}\Gamma(2-\alpha)(m+1)!}\left[1-a\left(\frac{t_1-m\tau}{1-m\tau}\right)^{1-\alpha}\right]\left[1+O\left(\frac{1}{|\lambda|^{N+1}}\right)\right]. \quad (15)$$

Рассмотрим предельное соотношение, в случае $\mu \neq 0$:

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \lambda \Phi(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \sum_{m=0}^{N} \frac{(-1)^{m+1} \mu^m (1-m\tau)_+^{1-\alpha}}{|\lambda|^m \Gamma(2-\alpha)(m+1)!} = -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \neq 0. \qquad (16)$$

В случае $\mu = 0$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \lambda \Phi(\lambda) = -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}. \qquad (17)$$

Так как $\Phi(\lambda)$ – целая функция переменной λ, то из (15), (16) и (17) следует, что ряд (13) может иметь лишь конечное число вещественных нулей.

Список литературы/References

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, Москва, 2003, 272 с. [Nakhushev A. M., *Drobnoe ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, Moskva, 2003, 272 pp., (in Russian)].

[2] Barrett J. H., “Differential equation of non-integer order”, *Canad. J. Math.*, **6**:4 (1954), 529–541.

[3] Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б., “Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка”, *Изв. АН АрмССР*, **3**:1 (1968), 3–28. [Dzhrbashyan M. M., Nersesyan A. B., “Drobnye proizvodnye i zadachi Koshi dlya differentsial’nykh uravneniy drobnogo poryadka”, *Izv. AN ArmSSR*, **3**:1 (1968), 3–28, (in Russian)].

[4] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory and Applications of Factional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006, 523 pp.

[5] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, Москва, 2005, 199 с. [Pskhu A. V., *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka*, Nauka, Moskva, 2005, 199 pp., (in Russian)].

[6] Oldham K. B., Spanier J., *The fractional calculus*, Acad. press., N.-Y. L., 1974, 234 pp.

[7] Bellman R. E., Cooke K. L., *Differential-Difference Equations*, Acad. Press., New York. London., 1963, 462 pp.

[8] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б., *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, Москва, 1971, 296 с. [El’sgol’ts L. E., *Vvedenie v teoriyu differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom*, Nauka, Moskva, 1971, (in Russian)].

[9] Мышкис А.Д., *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*, Наука, Москва, 1972, 351 с. [Myshkis A. D., *Lineynye differentsial’nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom*, Nauka, Moskva, 1972, 351 pp., (in Russian)].

[10] Hale J. K, Lunel S. M. V., *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, New York. London., 1993, 449 pp.

[11] Норкин С. Б., “О решениях линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом”, *УМН*, **14.1**:85 (1959), 199–206. [Norkin S. B., “O resheniyakh lineynogo odnorodnogo differentsial’nogo uravneniya vtorogo poryadka s zapazdyvayushchim argumentom”, *UMN*, **14.1**:85 (1959), 199–206, (in Russian)].

[12] Мажгихова М. Г., “Начальная и краевая задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом”, *Челябинский Физико-Математический Журнал*, **3**:1 (2018), 27–37. [Mazhgikhova M. G., “Initial and boundary value problems for ordinary differential equation of fractional order with delay”, *Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal*, **3**:1 (2018), 27–37, (in Russian)].

[13] Mazhgikhova M. G., “Diarichlet problem for a fractional-order ordinary differential equation with retarded argument”, *Differential equations*, **54**:2 (2018), 187–194.

[14] Мажгихова М. Г., “Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом”, *Известия КБНЦ РАН*, **70**:2 (2018), 15–20. [Mazhgikhova M. G., “Zadacha Neymana dlya obyknovennogo differentsial’nogo uravneniya drobnogo poryadka s zapazdyvayushchim argumentom”, *Izvestiya KBNTs RAN*, **70**:2 (2018), 15–20, (in Russian)].

[15] Pskhu A. V., “Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order”, *Sbornik: Mathematics*, **202**:4 (2011), 571–582.

[16] Bogatyreva F. T., “Boundary value problem with shift for an ordinary differential equation with the Dzhrbashyan-Nersesyan fractional differentiation operator”, *Differential equations*, **50**:2 (2014), 162–168.

[17] Гадзова Л. Х., “Краевая задача со смещением для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **149** (2018), 25–30. [Gadzova L. Kh., “Kraevaya zadacha so smeshcheniem dlya lineynogo obyknovennogo differentsial’nogo uravneniya s operatorom diskretno raspredelennogo differentsirovaniya”, *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.*, **149** (2018), 25–30, (in Russian)].

[18] Prabhakar T. R., “A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel”, *Yokohama Math. J.*, **19** (1971), 7–15.

[19] Shukla A. K., Prajapati J. C., “On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties”, *J. Math. Anal. Appl.*, **336** (2007), 797–811.

[20] Wright E. M., “The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function”, *J. London Math. Soc.*, **10** (1935), 286–293.

[21] Wright E. M., “The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function”, *Proc. London Math. Soc.*, **46**:2 (1940), 389–408.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[2] Barrett J. H. Differential equation of non-integer order // Canad. J. Math. 1954. vol 6. no. 4. pp. 529–541.

[3] Джрбашян М. М., Нерсесян А. Б. Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. 1968. Т. 3. №1. С. 3–28.

[4] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Factional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.

[5] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

[6] Oldham K. B., Spanier J. The fractional calculus. N.-Y. L.: Acad. press., 1974. 234 p.

[7] Bellman R. E., Cooke K. L. Differential-Difference Equations. New York. London: Acad. Press, 1963. 462 p.

[8] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

[9] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 351 с.

[10] Hale J. K, Lunel S. M. V. Introduction to Functional Differential Equations. New York. London: Springer, 1993. 449 p.

[11] Норкин С. Б. О решениях линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом // УМН. 1959. Т. 14.1. № 85. С. 199–206.

[12] Мажгихова М. Г. Начальная и краевая задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Челябинский Физико-Математический Журнал. 2018. Т. 3. №1. С. 27–37.

[13] Mazhgikhova M. G. Diarichlet problem for a fractional-order ordinary differential equation with retarded argument // Differential equations. 2018. vol. 54. no. 2. pp. 187–194.
[14] Мажгихова М. Г. Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // Известия КБНЦ РАН. 2018. Т. 70. №2. С. 15–20.
[15] Pskhu A. V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order // Sbornik: Mathematics. 2011. vol. 202. no. 4. pp. 571–582.
[16] Bogatyreva F. T. Boundary value problem with shift for an ordinary differential equation with the Dzhrbashyan-Nersesyan fractional differentiation operator // Differential equations. 2014. vol. 50. no. 2. pp. 162–168.
[17] Гадзова Л. Х. Краевая задача со смещением для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2018. Т. 149. С. 25–30.
[18] Prabhakar T. R. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J. 1971. no. 19. pp. 7–15.
[19] Shukla A. K., Prajapati J. C. On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties // J. Math. Anal. Appl. 2007. vol. 336. pp. 797–811.
[20] Wright E. M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // J. London Math. Soc. 1935. vol. 10. pp. 286–293.
[21] Wright E. M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function // Proc. London Math. Soc. 1940. vol. 46. no. 2. pp. 389–408.

Для цитирования: Мажгихова М. Г. Краевая задача со смещением для дифференциального уравнения дробного порядка с запаздывающим аргументом // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 28. № 3. С. 16-25. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-16-25

For citation: Mazhgikhova M. G. Boundary value problem with shift for a fractional order delay differential equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2019, **28**: 3, 16-25. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-16-25

Поступила в редакцию / Original article submitted: 11.07.2019

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2019. vol. 28. no.3. pp. 16–25.

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-16-25

MSC 34L99

BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH SHIFT FOR A FRACTIONAL ORDER DELAY DIFFERENTIAL EQUATION

M. G. Mazhgikhova

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center of RAS, 360000, Nalchik,
Shortanova st., 89A, Russia
E-mail: mazhgihova.madina@yandex.ru

In this paper we prove existence and uniqueness theorem to a boundary value problem with shift for a fractional order ordinary delay differential equation. The solution of the problem is written out in terms of the Green function. We find an explicit representation for solvability condition and show that it may only be violated a finite number of times.

Key words: fractional differential equation, delay differential equation, Green function, generalized Mittag-Leffler function, generalized Wright function.