DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-6-15

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В. А. Водахова, М. С. Балкизова

Кабардино-Балкарский государственный университет, 360005,
г. Нальчик, ул. Чернышевского, 175
E-mail: Bmadina1980@yandex.ru

В работе исследована краевая задача для модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка. Доказана теорема о единственности и существовании регулярного решения исследуемой задачи. Решение исследуемой задачи выписано в явном виде.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, уравнение Аллера, уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, метод Трикоми

Введение

В прямоугольной области $\Omega=\{(x,y):\ 0<x<r,\ -\alpha<y<\beta\}$ евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_y+u_{xxx}, & y<0,\\ u_y-au_{xx}-bu_{xxy}, & y>0,\end{cases} \tag{1}$$

где $u=u(x,y)$ – искомая функция, a, b, r, α, β – заданные положительные числа.

Обозначим:

$$\Omega_1=\{(x,y):\ 0<x<r,\ -\alpha<y<0\},\ \Omega_2=\{(x,y):\ 0<x<r,\ 0<y<\beta\},$$

$$I=\{(x,y):\ 0<x<r,\ y=0\},\ \Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup I.$$

В области Ω_1 уравнение (1) совпадает с уравнением вида

$$u_y+u_{xxx}=0, \tag{2}$$

а в области Ω_2 – с уравнением вида

$$u_y - a u_{xx} - b u_{xxy} = 0. \tag{3}$$

По классификации, приведенной в монографии [1][с. 72] уравнение (2) относится к уравнениям третьего порядка параболического типа, которые в [2][с. 9] названы уравнениями третьего порядка с кратными характеристиками. Уравнение (2) является аналогом уравнения диффузии с обратным ходом времени. Как показаны в работах [3]-[4] линейное приближение распространения нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации описывается уравнением вида (1). В работах [5], [6], [7] изучены локальная, нелокальная и общие краевые задачи для общих уравнений с оператором вида (2) в главной части.

Уравнение (3) совпадает с уравнением Аллера [8] и является уравнением гиперболического типа. При $b=0$ уравнение (3) совпадает с обычным уравнением теплопроводности, в связи с чем уравнение (3) еще называют модифицированным уравнением диффузии. В монографии [9][с. 254] отмечено, что при определенных допущениях уравнение (3) описывает фильтрацию жидкости в пористых средах и его решение $u=u(x,y)$ интерпретируется как влажность почвы с коэффициентом диффузивности a и коэффициентом влагопроводности b в точке $x \quad (0<x<r)$ в момент времени $t=y$ $(0<y<\beta)$. В работах [10], [11], [12] исследованы первая и вторая краевые задачи для уравнения (3). Задача Гурса для общего уравнения вида

$$Lu = u_{xxy} + A u_{xx} + a(x)\, u_x + b(x,y)\, u_y + c(x)\, u = f(x,y), \tag{4}$$

когда заданы значения $u(x,0)$, $u(0,y)$, $u_x(0,y)$ исследована в [13], а в [14] изучена краевая задача для уравнения (4), когда в начальный момент времени $y=0$ задан глубинный ход влажности, а также заданы поток влаги на глубине $x=r$ и скорость расхода влаги $x_0 \le x \le r$, начиная с некоторой глубины $x_0 \ge 0$. Краевые задачи с нелокальными условиями А.М. Нахушева для уравнения (4) исследованы в работах [15], [16].

В данной работе в области Ω исследуется аналог задачи Трикоми для уравнения (1). Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи.

Постановка задачи

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u=u(x,y)$ из класса $u(x, y) \in C^1\left(\bar{\Omega}\right) \cap C_x^3(\Omega)$, $u_{xxx}(x, y) \in C(\Omega_1)$, $u_{xx}(x, y)$, $u_{xxy}(x, y) \in C(\Omega_2)$, $u_{xx}(x, 0) \in L_2(I)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) из класса $u_{xx}(x, y) \in C(\Omega_1 \cup \{y=0\})$, удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \; u(r, y) = \varphi_2(y), \quad -\alpha \le y \le \beta, \tag{5}$$

$$u_{xx}(0, y) = \varphi_3(y), \quad -\alpha < y < 0, \tag{6}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y) \in C^1[-\alpha, \beta]$, $\varphi_3(y) \in C^1[-\alpha, 0]$.

Теорема существования и единственности

Справедлива

Теорема. *Существует единственное регулярное в области Ω решение задачи 1.*

Доказательство. Сначала докажем единственность решения задачи (1), (5), (6). Рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче 1, то есть будем считать, что $\varphi_i(y) \equiv 0,\ i = \overline{1,3}$. Введем обозначения

$$u(x,0) = \tau(x),\ u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0 < x < r. \tag{7}$$

Путем предельного перехода при $y \to -0$ из уравнения (1) с учетом обозначений (7), получим фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ вида

$$\nu(x) + \tau'''(x) = 0, \quad 0 < x < r, \tag{8}$$

а при предельном переходе при $y \to +0$ из (1) придем ко второму фундаментальному соотношению вида

$$\nu(x) - a\tau''(x) - b\nu''(x) = 0, \quad 0 < x < r. \tag{9}$$

Рассмотрим далее интеграл:

$$J = \int\limits_0^r \tau''(x)\nu(x)\,dx.$$

Умножая соотношение (8) на $\tau''(x)$ и интегрируя полученное равенство по x от 0 до r, легко убедиться в том, что

$$J = \int\limits_0^r \tau''(x)\,\nu(x)\,dx = -\int\limits_0^r \tau''(x)\,\tau'''(x)\,dx = -\frac{1}{2}\left[\tau''(r)\right]^2 \leq 0. \tag{10}$$

Аналогично, умножая соотношение (9) на функцию $\nu(x)$ и, интегрируя полученное равенство по x от 0 до r, находим

$$J = \int\limits_0^r \tau''(x)\,\nu(x)\,dx = \frac{1}{a}\int\limits_0^r \nu^2(x)\,dx - \frac{b}{a}\int\limits_0^r \nu(x)\,\nu''(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int\limits_0^r \nu^2(x)\,dx - \frac{b}{a}\left(\nu(r)\,\nu'(r) - \nu(0)\,\nu'(0) - \int\limits_0^r \left[\nu'(x)\right]^2 dx\right).$$

Так как из однородных условий, соответствующих условиям (5) следует, что $\nu(0) = \nu(r) = 0$, то из последнего равенства приходим к неравенству

$$J = \frac{1}{a}\int\limits_0^r \nu^2(x)\,dx + \frac{b}{a}\int\limits_0^r \left[\nu'(x)\right]^2 dx \geq 0. \tag{11}$$

Из неравенств (10) и (11) следует, что интеграл $J = 0$. Но при $J = 0$ из (11) следует, что $\nu(x) \equiv 0$. Тогда из соотношения (8) имеем:

$$\tau'''(x) = 0,$$

откуда

$$\tau(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2, \quad c_1,\, c_2,\, c_3 = const. \tag{12}$$

Переходя к пределу при $y \to -0$ из однородных условий, соответствующих условиям (5), (6) получим, что

$$\tau(0) = 0,\ \tau(r) = 0,\ \tau''(0) = 0. \tag{13}$$

Из (12) при условиях (13) найдем, что $\tau(x) \equiv 0$. Таким образом, показано, что для соответствующей задаче 1 однородной задачи имеют место равенства $\tau(x) \equiv 0$ и $\nu(x) \equiv 0$. При этом в области Ω_1 приходим к задаче нахождения решения уравнения (2), удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le r \tag{14}$$

и граничным условиям

$$u(0,y) = 0,\ u(r,y) = 0,\ u_{xx}(0,y) = 0, \quad -\alpha < y < 0, \tag{15}$$

а в области Ω_2 – к задаче нахождения решения уравнения (3), удовлетворяющего начальному условию (14) и граничным условиям

$$u(0,y) = 0,\ u(r,y) = 0, \quad 0 \le y \le \beta. \tag{16}$$

Покажем, что задача (2), (14), (15) имеет только тривиальное решение. Для этого введем в уравнении (2) новую искомую функцию по формуле:

$$u(x,y) = e^{\mu y}\upsilon(x,y),\ \mu = const,\ (x,y) \in \Omega_1. \tag{17}$$

При замене (17) из уравнения (2) приходим к новому уравнению

$$L_\mu \upsilon = \upsilon_{xxx} + \upsilon_y + \mu\,\upsilon = 0$$

с начально краевыми условиями

$$\upsilon(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le r \tag{18}$$

$$\upsilon(0,y) = 0,\ \upsilon(r,y) = 0,\ \upsilon_{xx}(0,y) = 0, \quad -\alpha < y < 0. \tag{19}$$

Введем далее вспомогательную область $\Omega_{1\varepsilon} = \{(x,y):\ \varepsilon < x < r-\varepsilon,\ -\alpha+\varepsilon < y < \varepsilon\}$ и проинтегрируем уравнение $2\,\upsilon_{xx} L_\mu \upsilon = 0$ по области $\Omega_{1\varepsilon}$. Будем иметь

$$2\int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} \upsilon_{xx} L_\mu\, \upsilon\, dxdy = 2\int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} \upsilon_{xx}\left[\upsilon_{xxx} + \upsilon_y + \mu\,\upsilon\right] dxdy = 0,$$

откуда

$$2\int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} \upsilon_{xx} L_\mu\, \upsilon\, dx\,dy = \int\limits_{\Gamma_{1\varepsilon}} \left[\upsilon_{xx}^2 + 2\,\upsilon_x\,\upsilon_y + 2\,\mu\,\upsilon\,\upsilon_x\right] dy + \upsilon_x^2\, dx - 2\,\mu \int\limits_{\Omega_{1\varepsilon}} \upsilon_x^2\, dx\,dy = 0, \tag{20}$$

где $\Gamma_{1\varepsilon}$ – граница области $\Omega_{1\varepsilon}$.

Перейдем в равенстве (20) к пределу при $\varepsilon \to 0$. Легко заметить, что при этом область $\Omega_{1\varepsilon}$ переходит в Ω_1. Тогда с учетом граничных условий (18), (19) из (20) получим

$$2\int\limits_{\Omega_1} \upsilon_{xx} L_\mu \upsilon \, dx dy = \int\limits_{-\alpha}^{0} \upsilon_{xx}^2 (r, y)\, dy + \int\limits_{0}^{r} \upsilon_x^2 (x, -\alpha)\, dy - 2\mu \int\limits_{\Omega_1} \upsilon_x^2 \, dx dy = 0. \quad (21)$$

Выбирая значение постоянной $\mu < 0$ замечаем, что равенство (21) может иметь место в том и только в том случае, когда $\upsilon_x (x, y) \equiv 0$. Откуда

$$\upsilon (x, y) = g (y), \quad (22)$$

где $g (y)$ – произвольная функция от y. Удовлетворяя (22) одному из граничных условий (19) убеждаемся, что $g (y) \equiv 0$, и, стало быть, $\upsilon (x, y) \equiv 0$ в Ω_1. Тогда из замены (17) заключаем, что и $u (x, y) \equiv 0$ в Ω_1.

Как следует из результатов работы [10], однородная первая краевая задача (14), (16) для уравнения Аллера (3) имеет только тривиальное решение $u (x, y) \equiv 0$ в Ω_2. Таким образом доказано, что однородная задача, соответствующая задаче 1 имеет только тривиальное решение $u (x, y) \equiv 0$ в Ω, что говорит о единственности регулярного решения задачи (1), (5), (6).

Перейдем далее к исследованию вопроса о существовании решения задачи (1), (5), (6). Путем дифференцирования из соотношения (9) находим

$$\nu' (x) - a\,\tau''' (x) - b\,\nu''' (x) = 0, \quad 0 < x < r. \quad (23)$$

Исключая из (8) и (23) искомую функцию $\tau (x)$, относительно функции $\nu (x)$ приходим к уравнению

$$\nu''' (x) - \frac{1}{b}\,\nu' (x) - \frac{a}{b}\,\nu (x) = 0, \quad 0 < x < r. \quad (24)$$

Соответственно, путем дифференцирования с последующим предельным переходом при $y \to 0$, из граничных условий (5), (6) находим

$$\nu (0) = \varphi_1' (0), \nu (r) = \varphi_2' (0), \nu'' (0) = \varphi_3' (0). \quad (25)$$

Таким образом, для определения искомой функции $\nu (x)$ получили краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка (24) с условиями (25). Задачу (24), (25) будем решать методом функции Грина. С помощью замены

$$\nu (x) = y (x) + \left(1 - \frac{x}{r}\right) \varphi_1' (0) + \frac{x}{r}\,\varphi_2' (0) + \frac{x (x - r)}{2}\,\varphi_3' (0) \quad (26)$$

задача (24)-(25) сводится к неоднородному уравнению вида

$$2bry''' (x) - 2ry' (x) - 2ary (x) = 2 [a (r - x) - 1]\,\varphi_1' (0) +$$

$$+2 (ax + 1)\,\varphi_2' (0) + r \left[ax^2 + (2 - ar) x - r\right] \varphi_3' (0), \quad (27)$$

с однородными краевыми условиями

$$y(0)=0,\ y(r)=0,\ y''(0)=0 \tag{28}$$

относительно искомой функции $y(x)$.

Решение задачи (27)-(28) выписывается по формуле:

$$y(x)=\int\limits_0^r G(x,\xi)\left[\frac{a(r-\xi)-1}{br}\varphi_1'(0)+\frac{a\xi+1}{br}\varphi_2'(0)+\frac{a\xi^2+(2-ar)\xi-r}{2b}\varphi_3'(0)\right]d\xi, \tag{29}$$

где $G(x,\xi)$ функция Грина задачи (27), (28), явный вид которой в зависимости от знака дискриминанта $D=\left(\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}\right)=\dfrac{27a^2b-4}{108b^3}$ характеристического уравнения

$$k^3+pk+q=k^3-\frac{1}{b}k-\frac{a}{b}=0$$

выписывается по одной из следующих формул:
либо

$$G(x,\xi)=\frac{1}{\delta\Delta}\begin{cases}\delta_1e^{k_1x}+\delta_2e^{k_2x}+\delta_3e^{k_3x}, & 0\le x<\xi,\\ \delta_1e^{k_1x}+\delta_2e^{k_2x}+\delta_3e^{k_3x}+\delta\left[(k_3-k_2)e^{k_1(x-\xi)}+\right. & \\ \left.+(k_1-k_3)e^{k_2(x-\xi)}+(k_2-k_1)e^{k_3(x-\xi)}\right], & \xi<x\le r,\end{cases}$$

где $D=\frac{27a^2b-4}{108b^3}<0;\ \ \Delta=(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2)\neq0;$

$$\Delta_1=(k_2-k_3)e^{k_1(r-\xi)}+(k_3-k_1)e^{k_2(r-\xi)}+(k_1-k_2)e^{k_3(r-\xi)};$$

$$\delta=k_1(k_2-k_3)e^{k_1r}+k_2(k_3-k_1)e^{k_2r}+k_3(k_1-k_2)e^{k_3r};$$

$$\delta_1=\left(k_3^2-k_2^2\right)\Delta_1;\ \delta_2=\left(k_1^2-k_3^2\right)\Delta_1;\ \delta_3=\left(k_2^2-k_1^2\right)\Delta_1;$$

$$k_j=\frac{2}{\sqrt{3b}}\cos\left(\frac{\varphi+2\pi j}{3}\right),\ j=0,1,2,\ \text{где}\ \sin\varphi>0;$$

либо

$$G(x,\xi)=\frac{1}{\Delta\delta}\begin{cases}\left[e^{k_1x}+\frac{3k_2x-2}{2}e^{k_2x}\right]\delta_1, & 0\le x<\xi,\\ \left[e^{k_1x}+\frac{3k_2x-2}{2}e^{k_2x}\right]\delta_1+ & \\ +\delta\left\{e^{k_1(x-\xi)}+[(k_2-k_1)(x-\xi)-1]e^{k_2(x-\xi)}\right\}, & \xi<x\le r,\end{cases}$$

где $D=\frac{27a^2b-4}{108b^3}=0;\quad \Delta=(k_2-k_1)^2\neq0;\quad k_1=2\sqrt[3]{a/b};\quad k_2=-\sqrt[3]{a/b}$

$$\delta=e^{k_1r}+\frac{3k_2r-2}{2}e^{k_2r};\ \delta_1=[1+(k_1-k_2)(r-\xi)]e^{k_2(r-\xi)}-e^{k_1(r-\xi)};$$

или же

$$G(x,\xi)=\frac{1}{6\sqrt{D}}\begin{cases}\left[e^{\alpha_1x}-e^{-\frac{\alpha_1x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}\beta_1x\right)+\frac{\sqrt3(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}e^{-\frac{\alpha_1x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}\beta_1x\right)\right]a_1, & 0\le x<\xi,\\ \left[e^{\alpha_1x}-e^{-\frac{\alpha_1x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt3}{2}\beta_1x\right)+\frac{\sqrt3(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}e^{-\frac{\alpha_1x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt3}{2}\beta_1x\right)\right]a_1+\beta_1e^{\alpha_1(x-\xi)}- & \\ -e^{-\frac{\alpha_1}{2}(x-\xi)}\left\{\beta_1\cos\left[\frac{\sqrt3}{2}\beta_1(x-\xi)\right]+\sqrt3\alpha_1\sin\left[\frac{\sqrt3}{2}\beta_1(x-\xi)\right]\right\}, & \xi<x\le r,\end{cases}$$

где $D = \frac{27a^2b-4}{108b^3} > 0$; $k_1 = \alpha_1$, $k_{2,3} = -\frac{\alpha_1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1 i$, $\alpha_1 = \alpha+\beta$, $\beta_1 = \alpha-\beta$,

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}+\sqrt{\frac{27a^2b-4}{108b^3}}}, \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}-\sqrt{\frac{27a^2b-4}{108b^3}}},$$

$$a_1 = \left(\alpha^2-\beta^2\right) \frac{-\beta_1 e^{\alpha_1(z-\xi)} + e^{-\frac{\alpha_1}{2}(r-\xi)}\left\{\beta_1 \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1(r-\xi)\right] - \sqrt{3}\alpha_1 \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1(r-\xi)\right]\right\}}{(\alpha^2-\beta^2)\, e^{\alpha_1 r} - (\alpha^2-\beta^2)\, e^{-\frac{\alpha_1 r}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1 r\right) + \sqrt{3}\,(\alpha^2+\beta^2)\, e^{-\frac{\alpha_1 r}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\beta_1 r\right)}.$$

Из (26) и (29) находим:

$$\nu(x) = \frac{1}{br}\left[b\,(r-x) + \int_0^r G(x,\xi)\,(ar-1-a\xi)\,d\xi\right]\varphi_1'(0) +$$

$$+\frac{1}{br}\left[bx + \int_0^r G(x,\xi)\,(1+a\xi)\,d\xi\right]\varphi_2'(0) +$$

$$+\frac{1}{2b}\left[bx\,(x-r) + \int_0^r G(x,\xi)\left[a\xi^2 + (2-2r)\,\xi - r\right]d\xi\right]\varphi_3'(0).$$

После того как функция $\nu(x)$ найдена, $\tau(x)$ находится по формуле

$$\tau(x) = \frac{1}{a}\int_0^x (x-t)\ \nu(t)\,dt - \frac{x}{ar}\int_0^r (r-t)\ \nu(t)\,dt - \frac{b}{a}\nu(x) +$$

$$+\frac{r-x}{r}\varphi_1(0) + \frac{x}{r}\varphi_2(0) + \frac{b(r-x)}{ar}\varphi_1'(0) + \frac{bx}{ar}\varphi_1'(0).$$

Тогда в области Ω_2 приходим к задаче нахождения решения первой краевой задачи с условиями (5) и $u(x,0) = \tau(x)$ для уравнения (3), решение которой выписано в работе [10], а в области Ω_1 решение задачи (5), (6) и $u(x,0) = \tau(x)$ для уравнения (2) выписывается по формуле:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-y}^0 G(x,-y;0,-\eta)\,\varphi_3(\eta)\,d\eta - \int_{-y}^0 G_{\xi\xi}(x,-y;0,-\eta)\,\varphi_1(\eta)\,d\eta + \right.$$
$$\left. + \int_{-y}^0 G_{\xi\xi}(x,-y;r,-\eta)\,\varphi_2(\eta)\,d\eta + \int_0^r G(x,-y;\xi,0)\,\tau(\xi)\,d\xi\right\},$$

где $G(x,y;\xi,\eta) = U(x,y;\xi,\eta) - W(x,y;\xi,\eta)$ – функция Грина задачи (2), (5), (6) с начальным условием $u(x,0) = \tau(x)$; $U(x,y;\xi,\eta)$ и $W(x,y;\xi,\eta)$ фундаментальные решения уравнения (2) [2][с. 135].

Список литературы/References

[1] Нахушев А.М., *Уравнения математической биологии*, «Высшая школа», М., 1995, 301 с. [Nahushev A.M., *Uravneniya matematicheskoj biologii*, «Vysshaya shkola», M., 1995, 301 pp., (in Russian)].

[2] Джураев Т.Д., *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*, «ФАН», Ташкент, 1979, 236 с. [Dzhuraev T.D., *Kraevye zadachi dlya uravnenij smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov*, «FAN», Tashkent, 1979, 236 pp., in Russian].

[3] Красильников В.А., Кузнецов В.П, "Распространение нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации", *Акустический журнал*, **3**:20 (1974), 473–477. [Krasilnikov V. A., Kuznetsov V.G., "Rasprostraneniye nelineynykh zvukovykh voln v zhidkosti pri kavitatsii", *Akkusticheskiy zhurnal*, **3**:20 (1974), 473–477, (in Russian)]].

[4] Карпман В. И., *Нелинейные волны в диспергирующих средах*, «Наука», М., 1973, 175 с. [Karpman V. I., *Nelineynyye volny v dispergiruyushchikh sredakh*, «Nauka», M., 1973, 175 pp., (in Russian)].

[5] Иргашев Ю., *Сборник научных трудов «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения»*, «ФАН», Ташкент, 1976, 17–31 с. [Irgashev Yu., *Sbornik nauchnykh trudov «Krayevyye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya»*, «FAN», Tashkent., 1976, 17–31 pp., (in Russian)].

[6] Джураев Т. Д., Абдиназаров С., "Краевые задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками", *Известия АН Узбекской ССР*, **1** (1981), 8–11. [Juraev T. D., Abdinazarov S., "Krayevyye zadachi tipa zadachi Bitsadze-Samarskogo dlya uravneniy tret'yego poryadka s kratnymi kharakteristikami", *Izvestiya Akademii nauk Uzbekskoy SSR*, **1** (1981), 8–11, (in Russian)].

[7] Абдиназаров С., "Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками", *Дифференц. уравнения*, **17**:1 (1981), 3–12. [Abdinazarov S., "Obshchiye krayevyye zadachi dlya uravneniya tret'yego poryadka s kratnymi kharakteristikami", *Differencialnie uravneniya*, **17**:1 (1981), 3–12, (in Russian)].

[8] Hallaire M., "Potential efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement", *Assembleé geńerale de Berkeley General Assembly of Berkeley*, 1963, №62, 114–122.

[9] Нахушев А.М., *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*, «Наука», М., 2006, 287 с. [Nahushev A.M., *Zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh*, «Nauka», M., 2006, 287 pp., (in Russian)].

[10] Макаова Р. Х., "Первая краевая задача для неоднородного уравнения Аллера", *Вестник КРАУНЦ*, 2016, №4(16), 45–49. [Makaova R. Kh., "Pervaya krayevaya zadacha dlya neodnorodnogo uravneniya Allera", *Vestnik KRAUNTS*, 2016, №4 (16), 45–49, (in Russian)].

[11] Yangarber V. A., "The mixed problem for a modified moisture-transfer equation", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **8**:1 (1967), 62–64.

[12] Макаова Р. Х., "Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:3 (2015), 35–38. [Makaova R. Kh., "Vtoraya krayevaya zadacha dlya obobshchennogo uravneniya Allera s drobnoy proizvodnoy Rimana–Liuvillya", *Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk*, **17**:3 (2015), 35–38, (in Russian)].

[13] Colton D., "Pseudoparabolic equations in one space variable", *Journal of Differential Equations*, **12**:559–565 (1972), 62–64.

[14] Нахушев А. М., "Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод", *Дифференц. уравнения*, **18**:1 (1982), 72–81. [Nakhushev A. M., "Ob odnom priblizhennom metode resheniya krayevykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy i yego prilozheniya k dinamike pochvennoy vlagi i gruntovykh vod", *Differentsial'nyye uravneniya*, **18**:1 (1982), 72–81, (in Russian)].

[15] Водахова В. А., "Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса", *Дифференц. уравнения*, **18**:2 (1982), 280–285. [Vodakhova V. A., "Krayevaya zadacha s nelokal'nym usloviyem A. M. Nakhusheva dlya odnogo psevdoparabolicheskogo uravneniya vlagoperenosa", *Differentsial'nyye uravneniya*, **18**:2 (1982), 280–285, (in Russian)].

[16] Водахова В. А., "Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А.М. Нахушева", *Дифференц. уравнения*, **19**:1 (1983), 163–166. [Vodakhova V. A., "Ob odnoy krayevoy zadache dlya uravneniya tret'yego poryadka s nelokal'nym usloviyem A.M. Nakhusheva", *Differentsial'nyye uravneniya*, **19**:1 (1983), 163–166, (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

[2] Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: «ФАН», 1979. 236 с.

[3] Красильников В. А., Кузнецов В. П. Распространение нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации // Акустический журнал. 1974. Т. 3. №20. 473–477.

[4] Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: «Наука», 1973. 175 с.

[5] Иргашев Ю. Сборник научных трудов «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения». Ташкент: «ФАН», 1976. С. 17–31.

[6] Джураев Т. Д., Абдиназаров С. Краевые задачи типа задачи Бицадзе-Самарского для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Известия АН Узбекской ССР. 1981. №1. С. 8–11.

[7] Абдиназаров С. Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. №1. С. 3–12.

[8] Hallaire M. Potentiel efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement // Assemblée générale de Berkeley General Assembly of Berkeley. 1963. no. 62. pp. 114–122.

[9] Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: «Наука». 2006. 287 с.

[10] Макаова Р. Х. Первая краевая задача для неоднородного уравнения Аллера // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2016. №4(16). С. 45–49.

[11] Yangarber V. A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation//Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1967. vol. 8. no. 1. pp. 62–64.

[12] Макаова Р. Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. №3. С. 35–38.

[13] Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // Journal of Differential Equations. 1972. vol. 12. no. 559–565. pp. 62–64.

[14] Нахушев А. М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. №1 . С. 72–81.

[15] Водахова В. А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. №2. С. 280–285.

[16] Водахова В. А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А.М. Нахушева//Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. №1. С. 163–166.

Для цитирования: Водахова В. А., Балкизова М. С. Краевая задача для модельного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 28. № 3. С. 6-15. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-6-15

For citation: Vodahova V. A., Balkizova M. S. A boundary value problem with displacement for a model equation of a parabolic-hyperbolic type of the third order, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2019, **28**: 3, 6-15. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-6-15

Поступила в редакцию / Original article submitted: 19.07.2019

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2019. vol. 28. no.3. pp. 6–15.

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-6-15

MATHEMATICS

MSC 35M12

A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DISPLACEMENT FOR A MODEL EQUATION OF A PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE OF THE THIRD ORDER

V. A. Vodahova, M. S. Balkizova

Kabardino-Balkarian State University, 360005, Nalchik, Chernishevskogo st., 175, Russia
E-mail: Bmadina1980@yandex.ru

In this paper, a boundary value problem for a model inhomogeneous mixed parabolic-hyperbolic type equation of third order is investigated. A theorem on uniqueness and the existence of a regular solution of the problem under investigation is proved. The solution of the investigated problem is written out in an explicit form.

Key words: mixed type equation, Aller equation, third-order equation with multiple characteristics, Tricomi method.