Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 27. № 2. С. 47-54. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-27-2-47-54

УДК 512.24

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОЧЕК ПОКОЯ ДРОБНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ВАН ДЕР ПОЛЯ-ДУФФИНГА*

Е. Р. Новикова

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: elizaveta_333@mail.ru

В работе проводится исследование на асимптотическую устойчивость точек покоя дробного осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга. Дробный осциллятор Ван дер Поля-Дуффинга представляет собой колебательную систему двух дифференциальных уравнений с производными дробных порядков в смысле Герасимова-Капуто. Порядки дробных производных характеризуют свойства среды (эффекты памяти), в которой происходит колебательный процесс и могут быть одинаковыми (соизмеримыми) или разными (несоизмеримыми). С помощью теорем для соизмеримой и несоизмеримой систем на конкретных примерах исследуется асимптотическая устойчивость точек покоя дробного осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга. Результаты исследований были подтверждены с помощью построения соответствующих осциллограмм и фазовых траекторий.

Ключевые слова: дробный осциллятор Ван-дер-Поля Дуффинга, особые точки, соизмеримые и несоизмеримые системы, асимптотичская устойчивость, осциллограммы и фазовые траектории

Введение

Исследование дробных (эредитарных) динамических систем является актуальным, так как имеет широкое практическое применение в физике, биологии, экономике и других науках. Дробные динамические системы обладают свойствами наследственности и впервые были описаны в работах по наследственной механике для описания вязкоупругих или пластичных сред [1]-[3], хотя явление последействия встречалось ранее, например, в работах Вольтерры [4].

Дробные колебательные системы (осцилляторы), являются разновидностью дробных динамических систем и описывают колебательные процессы с памятью. С точки зрения математики дробные осцилляторы можно описать с помощью интегро-дифференциальных уравнений с разностными ядрами, которые иногда называют

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ № МК-1152.2018.1

функциями памяти. В большинстве случаях функции памяти являются степенными и тогда удобно перейти от интегро-дифференциальных уравнений к уравнениям с производными дробных порядков, что дает возможность использовать математический аппарат дробного исчисления [5]. Необходимо отметить, что для описания дробных осцилляторов существует несколько определений производной дробного порядка, например, в работе [6] были исследованы дробные осцилляторы с производными Римана-Лиувилля, в работе [7] с производными Герасимова-Капуто, фактически, если вместо степенной функции выбрать другую специальную функцию, то мы можем получить новое определение производной дробного порядка.

В статье мы будем исследовать один из видов дробных осцилляторов – дробный осциллятор Ван дер Поля – Дуффинга с производной Герасимова-Капуто [8]. Используя методику работы [9], мы проведем исследование его точек покоя на асимптотическую устойчивость в зависимости от различных значений порядков дробных производных и сопоставим результаты исследований с его осциллограммами и фазовыми траекториями.

Постановка задачи и методы исследования

Рассмотрим некоторые определения.

Определение 1. Дробным осциллятором Ван дер Поля-Дуффинга будем называть динамическую систему:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1} x(\tau) = y(t), \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} y(\tau) = (\lambda - x^2(t))y(t) - x(t) - \xi x^3(t) + c\sin(\omega t), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

где дифференциальные операторы [3,10]:

$$\partial_{0t}^{\alpha_1} x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha_1}}, \partial_{0t}^{\alpha_2} y(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_2)} \int_0^t \frac{\dot{y}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha_2}}, \tag{2}$$

определены в смысле Герасимова-Капуто с дробными порядками $\frac{1}{2} < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, λ – управляющий параметр, ω – частота внешнего сигнала, – его амплитуда, ξ – параметр фазовой нелинейности; $x(t)$ – функция решения, мембранный потенциал; $t \in [0,T]$ – время процесса; $T > 0$ – время моделирования; x_0 и y_0 – начальные условия.

Замечание 1. Система (1) описывает дробный осциллятор Ван дер Поля-Дуффинга, а в случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ она совпадает с классическим осциллятором Ван дер Поля-Дуффинга.

Замечание 2. Необходимо отметить, что производные Герасимова-Капуто (2) дают возможность ставить классическое локальное начальное условие.

Определение 2. Динамическая система (1) называется соизмеримой, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и несоизмеримой, если $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Определение 3. Точки покоя системы (1) $E(x^*, y^*)$ являются решениями системы:

$$\begin{cases} y^*(t) = 0 \\ x^*(t) - \xi x^{*3}(t) + c\sin(\omega t) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

В частности, при $t=0$ получим из системы (3) следующие точки покоя:

$$E^*(0,0), E^*\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}},0\right), E^*\left(-\frac{1}{\sqrt{\xi}},0\right). \quad (4)$$

Определение 4. Якобианом системы (1) является следующий определитель:

$$J=\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2xy-1-3\xi x^2 & \lambda - x^2 \end{array}\right]. \quad (5)$$

Справедливы следующие теоремы [11].

Теорема 1. *(Соизмеримый случай). Пусть* $\alpha=\frac{\beta}{m}$, β, m *- целые числа. Точки покоя* $E(x^*,y^*)$ *являются асимптотически устойчивыми, если корни* μ_i *характеристического уравнения* $|J-\mu E^*|=0$ *удовлетворяют следующему условию:*

$$|\arg(\mu_i)| > \frac{\gamma\pi}{2}, \gamma = 1/m, i=1,2,...,\beta. \quad (6)$$

Теорема 2. *(Несоизмеримый случай). Пусть* $\alpha_1=\frac{\beta_1}{m}, \alpha_2=\frac{\beta_2}{m}$, m,β_1,β_2 *- целые числа. Точки покоя* $E(x^*,y^*)$ *являются асимптотически устойчивыми, если корни* μ_i *характеристического уравнения* $|J-\mu E^*|=0$ *удовлетворяют следующему условию:*

$$|\arg(\mu_i)| > \frac{\gamma\pi}{2}, \gamma = \frac{1}{m}, i=1,2,..,\beta_1+\beta_2. \quad (7)$$

Результаты исследования

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Рассмотрим случай, когда система (1) соизмерима $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha} x(\tau) = y(t), \\ \partial_{0t}^{\alpha} y(\tau) = (\lambda - x^2(t))y(t) - x(t) - \xi x^3(t) + c\sin(\omega t). \end{cases} \quad (8)$$

Матрица Якоби системы (8) записывается следующим образом:

$$J=\left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2x^*y^*-1-3\xi x^{*2} & \lambda - x^{*2} \end{array}\right], \quad (9)$$

где точка покоя системы (8) будет $E^*=(x^*,y^*)$. В соизмеримом случае, когда $\alpha_1 = \alpha_2=\alpha=\dfrac{\beta}{m}$, β, m – целые числа. Тогда характеристические уравнения для системы (8) с учетом (9) имеют вид:

для точки$E^*(0,0)$:

$$|J-\mu E^*| = \left[\begin{array}{cc} 0-\mu^{m\alpha} & 1 \\ -2x^*y^*-1-3\xi x^{*2} & \lambda - x^{*2}-\mu^{m\alpha} \end{array}\right] = \mu^{2\beta}-\lambda\mu^{\beta}+1=0, \quad (10)$$

для точек $E^*\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}},0\right)$ и $E^*\left(-\frac{1}{\sqrt{\xi}},0\right)$:

$$|J-\mu E^*| = \begin{bmatrix} 0-\mu^{m\alpha} & 1 \\ -2x^*y^*-1-3\xi x^{*2} & \lambda - x^{*2}-\mu^{m\alpha} \end{bmatrix} = \mu^{2\beta}+\left(\frac{1}{\xi}-\lambda\right)\mu^{\beta}+4=0. \quad (11)$$

Отметим, что в случае $\alpha=1$ уравнения (10) и (11) переходят в квадратные уравнения:

$$\mu^2-\lambda\mu+1=0, \mu^2+\left(\frac{1}{\xi}-\lambda\right)\mu+4=0. \quad (12)$$

Выберем значения параметров системы (8): $\alpha=1, \xi=0.2, \lambda=0.5$. Тогда мы получим решение для первого уравнения (12) $\mu_{1,2}=0.25\pm0.9682458366I$идля второго уравнения (12) $\mu_1=-1.219223594$,μ_2= -3.280776406. Поэтому с учетом условия Теоремы 1 для первой пары корней $|\arg(\mu_i)|=1.318116072<\pi/2$ и точка $E^*(0,0)$ является неустойчивой, а для второй пары $|\arg(\mu_i)|=3.141592654>\pi/2$точки $E^*(2.236067977,0)$ и $E^*(-2.236067977,0)$ являются асимптотически устойчивыми. В первом случае точка $E^*(0,0)$ неустойчивый фокус, а точки $E^*(2.236067977,0)$ и $E^*(-2.236067977,0)$ - устойчивые узлы.

Необходимо отметить, что фазовая траектория, соответствующая точке покоя $E^*(0,0)$ выходит на предельный цикл (рис. 1б).

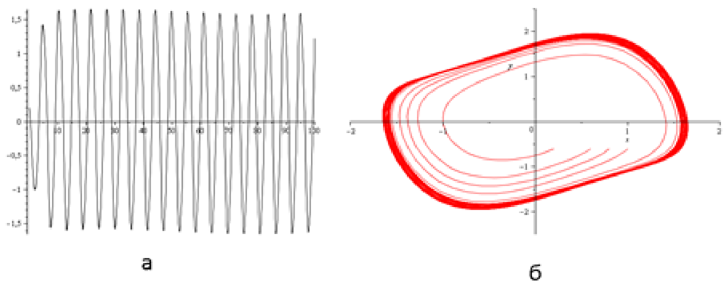

Рис. 1. а – осциллограмма; б – фазовая траектория при $\alpha_1=\alpha_2=1$

В случае $\alpha_1=\alpha_2=0.8$ характеристическое уравнение (10) имеет вид:

$$\mu^{16}-0.5\mu^8+1=0,$$

корни которого удовлетворяют условию Теоремы 1 и точка покоя $E^*(0,0)$ асимптотически устойчивая (устойчивый фокус) (рис. 2).

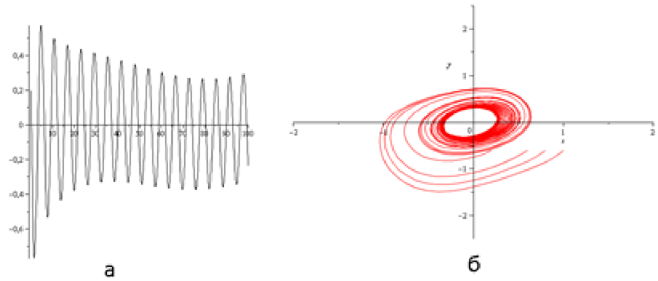

Рис. 2. а – осциллограмма; б – фазовая траектория при $\alpha_1=\alpha_2=0.8$

Для точек $E^*(2.236067977,0)$ и $E^*(-2.236067977,0)$ характеристическое уравнение (11) запишется в виде:

$$\mu^{16}+4.5\mu^8+4=0,$$

корни которого удовлетворяют условию Теоремы 1 и следовательно точки $E^*(2.236067977,0)$ и $E^*(-2.236067977,0)$ являются асимптотически устойчивыми (устойчивые фокусы).

Пример 2. Рассмотрим случай, когда система (1) несоизмерима $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Пусть $\alpha_1=\dfrac{\beta_1}{m}, \alpha_2=\dfrac{\beta_2}{m}$. Тогда Якобиан системы (1) для точки $E^*(0,0)$ будет:

$$|J-\mu E^*| = \begin{bmatrix} 0-\mu^{a_1} & 1 \\ -2x^*y^*-1-3\xi x^{*2} & \lambda - x^{*2}-\mu^{a_2} \end{bmatrix} = \mu^{\beta_1+\beta_2}-\lambda\mu^{\beta_2}+1=0. \qquad (13)$$

Для точек $E^*\left(\frac{1}{\sqrt{\xi}},0\right)$ и $E^*\left(-\frac{1}{\sqrt{\xi}},0\right)$:

$$|J-\mu E^*| = \begin{bmatrix} 0-\mu^{\alpha_1} & 1 \\ -2x^*y^*-1-3\xi x^{*2} & \lambda - x^{*2}-\mu^{\alpha_2} \end{bmatrix} = \mu^{\beta_1+\beta_2}+\left(\frac{1}{\xi}-\lambda\right)\mu^{\beta_2}+4=0. \quad (14)$$

Пусть $\alpha_1=1$ и $\alpha_2=0.5$ или $\beta_1=10$ и $\beta_2=5$, $m=10$. Тогда уравнения (13) и (14) примут вид:

$$\mu^{15}-\lambda\mu^5+1=0, \mu^{15}+\left(\frac{1}{\xi}-\lambda\right)\mu^5+4=0. \qquad (15)$$

Значение параметров λ и ξ возьмем из предыдущего примера. Все корни уравнений (15) удовлетворяют условиям Теоремы 2 и точки $E^*(0,0)$, $E^*(2.236067977,0)$ и $E^*(-2.236067977,0)$ являются асимптотически устойчивыми (устойчивые фокусы). На рис. 3. приведены в качестве примера осциллограммы и фазовые траектории для точки покоя $E^*(0,0)$ при различных начальных условиях.

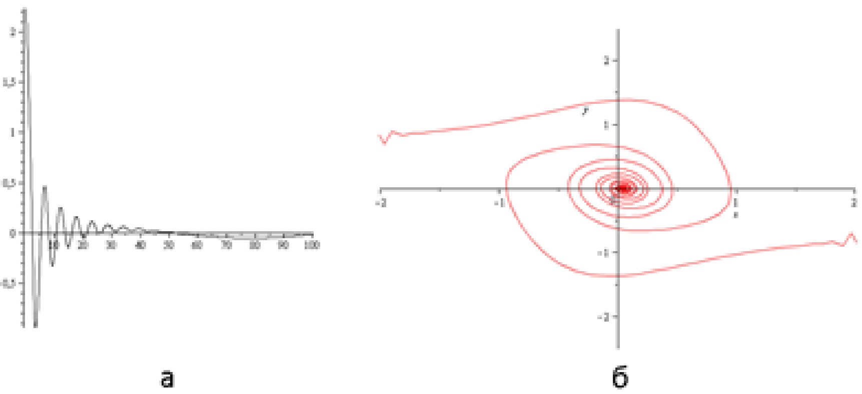

Рис. 3. а – осциллограмма; б – фазовая траектория при $\alpha_1=1$ и $\alpha_2=0.5$

Рассмотрим случай $\alpha_1=1$ и $\alpha_2=0.8$. Тогда уравнения (15) запишутся иначе:

$$\mu^{18}-\lambda\mu^8+1=0, \mu^{18}+\left(\frac{1}{\xi}-\lambda\right)\mu^8+4=0. \qquad (16)$$

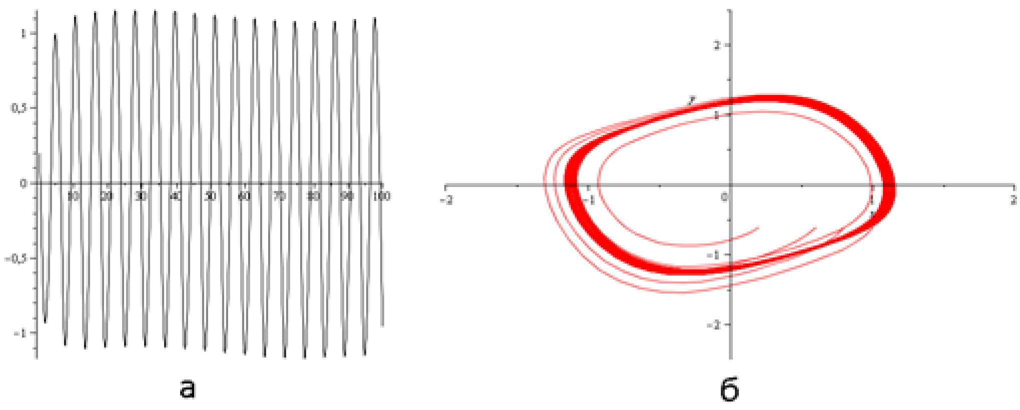

Рис. 4. а – осциллограмма; б – фазовая траектория при $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 0.8$

Для точки $E^*(0,0)$ не все решения первого уравнения (16) удовлетворяют условиям Теоремы 2. Существует корень μ_{18}, такой что $|\arg(\mu_{18})| = 0.1466660624 < \pi/20.$ Поэтому точка $E^*(0,0)$ неустойчивая и является неустойчивым фокусом (рис. 4).

Из рис. 4б видно, что фазовая траектория, раскручиваясь выходит на предельный цикл, а амплитуда осциллограммы рис. 4а со временем устанавливается. Для точек $E^*(2.236067977, 0)$ и $E^*(-2.236067977, 0)$ все решения второго уравнения (16) удовлетворяют условиям Теоремы 2, поэтому они являются асимптотически устойчивыми (устойчивыми фокусами).

Заключение

В статье с помощью методики предложенной в работе [9] были исследованы на асимптотическую устойчивость некоторые точки покоя дробного осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга. Показано, что точки покоя могут быть асимптотически устойчивые (устойчивый фокус), неустойчивые (неустойчивый фокус) при этом фазовая траектория выходит на предельный цикл. В классическом случае $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$возможны устойчивые узлы. Результаты исследований подтверждены с помощью построения соответствующих осциллограмм и фазовых траекторий.

Список литературы/References

[1] Вронский А. П., “Явление последействия в твердом теле”, *АН СССР. Прикладная математика и механика*, **5**:1 (1941), 31–56. [Vronskiy A. P., “Yavleniye posledeystviya v tverdom tele”, *AN SSSR. Prikladnaya matematika i mekhanika*, **5**:1 (1941), 31–56].

[2] Работнов Ю. Н., “Равновесие упругой среды с последействием”, *АН СССР. Прикладная математика и механика*, **12**:1 (1948), 53–62. [Rabotnov Yu. N., “Ravnovesiye uprugoy sredy s posledeystviyem”, *AN SSSR. Prikladnaya matematika i mekhanika*, **12**:1 (1948), 53–62].

[3] Герасимов А. Н., “Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения”, *АН СССР. Прикладная математика и механика*, **12**:3 (1948), 251-260. [Gerasimov A. N., “Obobshcheniye lineynykh zakonov deformatsii i ikh prilozheniye k zadacham vnutrennego treniya”, *AN SSSR. Prikladnaya matematika i mekhanika*, **12**:3 (1948), 251-260].

[4] Volterra V., “Sur les ’equations int’egro-diff’erentiellesetleurs applications”, *ActaMathematica*, **35**:1 (1912), 295-356.

[5] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 pp. [Nakhushev A. M., *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp.]

[6] Petras I., *Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation*, Springer, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, 218 pp.

[7] Паровик Р. И., *Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов*, Петропавловск-Камчатский, КамГУ им. Витуса Беринга, 2017, 135 с. [Parovik R. I., *Matematicheskoye modelirovaniye nelineynykh ereditarnykh ostsillyatorov*, Petropavlovsk-Kamchatskiy, KamGU im. Vitusa Beringa, 2017, 135 pp.]

[8] Новикова Е. Р, Паровик Р. И., "Исследование точек покоя эредитарной динамической системы Ван дер Поля-Дуффинга", *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, **26**:1 (2019), 71-77. [Novikova Ye. R, Parovik R. I., "Issledovaniye tochek pokoya ereditarnoy dinamicheskoy sistemy Van der Polya-Duffinga", *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, **26**:1 (2019), 71-77 https://doi.org/10.26117/2079-6641-2019-26-1-71-77].

[9] Липко О. Д., "Исследование устойчивости точек покоя дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо", *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, **26**:1 (2019), 63-70. [Lipko O. D., "Issledovaniye ustoychivosti tochek pokoya drobnogo ostsillyatora FittsKH'yu-Nagumo", *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, **26**:1 (2019), 63-70 https://doi.org/10.26117/2079-6641-2019-26-1-63-70].

[10] Caputo M., *Elasticit'a e dissipazione*, Bologna, Zanichelli, 1969, 150 pp.

[11] Tavazoei M. S., Haeri M., "Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **237**:20 (2008), 2628-2637.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Вронский А. П. Явление последействия в твердом теле // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1941. Т. 5. № 1. С. 31–56.

[2] Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. № 1. С. 53–62.

[3] Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. № 3. 251-260.

[4] Volterra V. Sur les 'equations int'egro-diff'erentiellesetleurs applications // ActaMathematica. 1912. Vol. 35, no. 1. P. 295-356.

[5] Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[6] Petras I. Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 218 p.

[7] Паровик Р. И., Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов. КамГУ им. Витуса Беринга: Петропавловск-Камчатский, 2017. 135 с.

[8] Новикова Е. Р, Паровик Р. И. Исследование точек покоя эредитарной динамической системы Ван дер Поля-Дуффинга // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 26. № 1. С. 71-77. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-71-77.

[9] Липко О. Д. Исследование устойчивости точек покоя дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 26. № 1. С. 63-70. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-63-70

[10] Caputo M. Elasticit'a e dissipazione. Zanichelli: Bologna, 1969. 150 p.

[11] Tavazoei M. S., Haeri M. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2008. vol. 237. no. 20. pp. 2628-2637.

Для цитирования: Новикова Е. Р. Устойчивость точек покоя дробного осциллятора Ван дер Поля-Дуффинга // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2019. Т. 27. № 2. С. 47-54. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-27-2-47-54

For citation: Novikova E. R Study of the singular points of the fractional oscillator Van der Paul-Duffing, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2019, **27**: 2, 47-54. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-27-2-47-54

Поступила в редакцию / Original article submitted: 14.06.2019

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2019. vol. 27. no.2. pp. 47–54.

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-27-2-47-54

MSC 37N10

STUDY OF THE SINGULAR POINTS OF THE FRACTIONAL OSCILLATOR VAN DER POL-DUFFING[2]

E. R. Novikova

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Republic of Kabardino-Balkariya, Nalchik Shortanova st., 89 A, Russia

E-mail: elizaveta_333@mail.ru

A study is conducted on the asymptotic stability of the rest points of the fractional oscillator Van der Pol-Duffing. The fractional van der Pol-Duffing oscillator is an oscillatory system of two differential equations with fractional order derivatives in the sense of Gerasimov-Caputo. The orders of fractional derivatives characterize the properties of the medium (memory effects) in which the oscillatory process takes place and can be the same (commensurate) or different (incommensurable). Using theorems for commensurable and incommensurable systems, the asymptotic stability of the rest points of the fractional van der Pol-Duffing oscillator is investigated with concrete examples. The results of the studies were confirmed by constructing the appropriate waveforms and phase trajectories.

Key words: Van der Pol's Duffing fractional oscillator, singular points, commensurate and incommensurate systems, asymptotic stability, oscillograms and phase trajectories

[2]This work was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-1152.2018.1.