

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-12-1-41-47

УДК 517.953

## **О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА**

**А. В. Юлдашева**

Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, 100174, Узбекистан,  
г. Ташкент, ул. ВУЗ городок

E-mail: yuasv86@mail.ru

В статье рассматривается краевая задача для уравнения четного порядка. Доказывается однозначная разрешимость при дополнительных условиях и условиях на область.

*Ключевые слова: уравнения в частных производных высокого порядка, краевая задача, метод разделения переменных, цепные дроби*

© Юлдашева А. В., 2016

MSC 35C05

## **ON SOLVABILITY OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE EVEN-ORDER EQUATION**

**A. V. Yuldasheva**

National University of Uzbekistan by Mirzo Ulugbeka, 100174, Uzbekistan, Tashkent  
c., VUZ gorodok st.

E-mail: yuasv86@mail.ru

In this paper boundary-value problem for one even-order equation is studied. The unique solvability of the problem is restored by additional conditions and conditions to domain.

*Key words: partial differential equations of higher order, boundary-value problem, method of separation of variables, simple continued fractions*

© Yuldasheva A. V., 2016

## Постановка задачи

Для уравнения

$$Lu = f(x, t), \quad (1)$$

где

$$Lu \equiv \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}}, \quad k, p \in N \quad (2)$$

в области  $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < a, 0 < t < T\}$  исследуется следующая краевая задача.

**Задача.** Найти в области  $\Omega$  решение  $u(x, t)$  уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}(0, t) = \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}(a, t) = 0, 0 \leq t \leq T, m = \overline{0, k-1} \quad (3)$$

и

$$\frac{\partial^{2m} u}{\partial t^{2m}}(x, 0) = \frac{\partial^{2m} u}{\partial t^{2m}}(x, T) = 0, 0 \leq x \leq a, m = \overline{0, p-1}. \quad (4)$$

Заметим, что корректность задачи зависит от значений  $k, p$ . Так, если  $(k - p)$  четное, то вообще говоря, задача некорректна. Устойчивость такой задачи исследована в работе [1]. Если  $k = p = 1$ , то задача (1), (3), (4) будет задачей Дирихле для уравнения колебания струны, разрешимость которой исследована в [3]. Случай, когда  $k \in N, p = 1$  рассмотрен в [2, 7], а случай  $k = p$  исследован в [4, 5].

## Случай нечетности $(k - p)$

**Лемма 1.** Пусть  $u(x, t)$  – регулярное решение задачи (1), (3), (4) и  $(k - p)$  нечетное, тогда справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^{k,p}(\Omega)} \leq C \|Lu\|_{L_2(\Omega)}, \quad (5)$$

где  $C > 0$  – постоянное число, зависящее от размеров области  $\Omega$  и  $k, p$ , но не зависящее от функции  $u(x, t)$ .

**Доказательство.** Умножим обе части уравнения (2) на  $(-1)^k u$  и проинтегрируем по области  $\Omega$

$$\int_0^T \int_0^a \left[ \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k+i} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^{2k-1-i} u}{\partial x^{2k-1-i}} \cdot \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \right) + \left( \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right)^2 - \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{k+i} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^{2p-1-i} u}{\partial t^{2p-1-i}} \cdot \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right) - (-1)^{k+p} \left( \frac{\partial^p u}{\partial t^p} \right)^2 \right] dx dt = \iint_{\Omega} (-1)^k u Lu dx dt.$$

Применяя неравенство  $2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$  ( $\varepsilon = const > 0$ ) к правой части последнего равенства, а также учитывая условия (3) и (4), имеем

$$\int_0^a \int_0^T \left( \left( \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right)^2 + \left( \frac{\partial^p u}{\partial t^p} \right)^2 \right) dx dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^a \int_0^T u^2(x, t) dx dt + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^a \int_0^T (Lu)^2 dx dt,$$

получим

$$\left\| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^p u}{\partial t^p} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|Lu\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (6)$$

По определению норма  $\left\| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right\|_{L_2(\Omega)}^2$ ,  $m = 1, \dots, k-1$  равна

$$\left\| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_0^T \int_0^a \frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^{m+1}} \cdot \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}} dx dt.$$

Применяя к правой части последнего равенства неравенство

$$|ab| \leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2),$$

находим

$$\left\| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial^{m+1} u}{\partial x^{m+1}} \right\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (7)$$

Суммируя неравенства (7) по  $m$  от 1 до  $k-1$ , получим

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (8)$$

Применяя (7) к неравенству (8) находим

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^{k-1} u}{\partial x^{k-1}} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|Lu\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (9)$$

Теперь суммируя (7) по  $m$  от 2 до  $k-2$ , согласно (9) имеем

$$\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^{k-2} u}{\partial x^{k-2}} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|Lu\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (10)$$

Продолжая аналогично, мы получим оценки для всех  $\left\| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right\|_{L_2(\Omega)}^2$ ,  $m = 1, \dots, k-1$ , складывая которые с (6), (9), (6), получим

$$\sum_{i=1}^k \left\| \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{\varepsilon k}{4} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{k}{4\varepsilon} \|Lu\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (11)$$

Поступая аналогично, только заменив  $x$  на  $t$ , а  $k$  на  $p$ , находим

$$\sum_{i=1}^p \left\| \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{\varepsilon p}{4} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{p}{4\varepsilon} \|Lu\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (12)$$

Оценим  $\|u\|_{L_2(\Omega)}^2$

$$u^2(x, t) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial \xi} (u^2(\xi, t)) d\xi \leq 2 \int_0^a |u| |u_x| dx,$$

$$\int_0^T u^2(x,t) dt \leq 2 \int_0^T \int_0^a |u| |u_x| dx dt \leq 2 \|u\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|u_x\|_{L_2(\Omega)}.$$

Интегрируя последнее неравенство по  $x$  от 0 до  $a$  и деля на  $\|u\|_{L_2(\Omega)}$ , получаем

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 4a^2 \|u_x\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Откуда согласно (9) находим

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 4a^2 \left( \frac{\varepsilon}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|Lu\|_{L_2(\Omega)}^2 \right).$$

Складывая последнее неравенство с (11) и (12), и выбирая

$$\varepsilon = \frac{2}{k+p+8a^2},$$

получим

$$\sum_{i=0}^k \left\| \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^p \left\| \frac{\partial^i u}{\partial t^i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C^2 \|Lu\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (13)$$

где  $C^2 = \frac{(k+p+8a^2)^2}{8}$ . Извлекая корень из (13), получаем

$$\|u\|_{W_2^{k,p}(\Omega)} \leq C \|Lu\|_{L_2(\Omega)}.$$

□

Следствие. Из леммы 1 следует единственность и непрерывная зависимость регулярного решения задачи от правой части  $f(x,t)$  при нечетных значениях  $(k-p)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $(k-p)$  нечетное и функция  $f(x,t) \in C_{x,t}^{k+1,p+1}(\Omega)$  удовлетворяет следующим краевым условиям

$$\frac{\partial^{2m} f(0,t)}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial^{2m} f(a,t)}{\partial x^{2m}} = 0, \forall t \in [0; T],$$

$$m = 0, 1, \dots, \frac{k}{2}, \text{ если } k \text{ четное и } m = 0, 1, \dots, \frac{k-1}{2}, \text{ если } k \text{ нечетное}$$

$$\frac{\partial^{2m} f(x,0)}{\partial t^{2m}} = \frac{\partial^{2m} f(x,T)}{\partial t^{2m}} = 0, \forall x \in [0; a],$$

$m = 0, 1, \dots, \frac{p}{2}$ , если  $p$  четное и  $m = 0, 1, \dots, \frac{p-1}{2}$ , если  $p$  нечетное. Тогда решение задачи (1), (3), (4) существует.

**Доказательство.** Функцию, удовлетворяющую условиям (3), (4) можно представить в виде

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u_{nm}}{\sqrt{aT}} \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \sin \frac{\pi m}{T} t. \quad (14)$$

Подставляя в (1), имеем

$$\left[ (-1)^k \left( \frac{\pi n}{a} \right)^{2k} - (-1)^p \left( \frac{\pi m}{T} \right)^{2p} \right] u_{nm} = f_{nm}, \quad (15)$$

где  $f_{nm} = \iint_{\Omega} \frac{2}{\sqrt{aT}} \sin\left(\frac{x\pi n}{a}\right) \sin\left(\frac{t\pi m}{T}\right) f(x,t) dxdt$ . Из (14) при четном  $k$  и нечетном  $p$  находим

$$u_{nm} = \frac{f_{nm}}{\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} + \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]},$$

а при нечетном  $k$  и четном  $p$

$$u_{nm} = -\frac{f_{nm}}{\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} + \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]}.$$

Итак, формальное решение задачи (1), (3), (4) имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{aT}} \cdot \frac{(-1)^k f_{nm}}{\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} + \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]} \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \sin \frac{\pi m}{T} t. \quad (16)$$

Осталось доказать равномерную сходимость ряда (16), а также рядов

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{aT}} \cdot \frac{f_{nm}}{\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} + \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]} \left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \sin \frac{\pi m}{T} t, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2p}}(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{aT}} \cdot \frac{-f_{nm}}{\left[\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} + \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p}\right]} \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p} \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \sin \frac{\pi m}{T} t \quad (18)$$

В силу оценки

$$\left(\frac{\pi n}{a}\right)^{2k} + \left(\frac{\pi m}{T}\right)^{2p} \geq 2 \frac{\pi^{k+p} n^k m^p}{a^k T^p},$$

находим

$$|u_{nm}| \leq \frac{a^k T^p}{2\pi^{k+p} n^k m^p} |f_{nm}|.$$

Тогда ряд мажорантный ряду (16) имеет вид

$$\frac{a^k T^p}{\pi^{k+p} \sqrt{aT}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_{nm}| n^k}{m^p},$$

откуда в силу условий наложенных на функцию  $f(x,t)$  следует равномерная сходимость ряда (16), а также рядов (17) и (18). Теорема доказана.  $\square$

### Случай четности $(k - p)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $(k - p)$  четное и функция  $f(x,t) \in C_{x,t}^{2k+5,2p+3}(\Omega)$  удовлетворяет следующим краевым условиям

$$\frac{\partial^{2m} f(0,t)}{\partial x^{2m}} = \frac{\partial^{2m} f(a,t)}{\partial x^{2m}} = 0, \forall t \in [0; T],$$

$m = 0, 1, \dots, k+1$ , если  $k$  четное и  $m = 0, 1, \dots, k+2$ , если  $k$  нечетное,

$$\frac{\partial^{2m} f(x, 0)}{\partial t^{2m}} = \frac{\partial^{2m} f(x, T)}{\partial t^{2m}} = 0, \forall x \in [0; a],$$

$m = 0, 1, \dots, p$  если  $p$  четное и  $m = 0, 1, \dots, p+1$ , если  $p$  нечетное. Если числа  $a$  и  $T$  таковы, что число  $\frac{a^k}{T^p \pi^{k-p}}$  является алгебраическим числом степени  $n \geq 2$ , то решение задачи (1), (3), (4) существует и единственно.

**Доказательство.** Аналогично, как и в теореме 1 решение ищем в виде (14), подставляя которое в (1), получим (15).

Из (15) при четных  $k$  и  $p$  находим

$$u_{nm} = \frac{f_{nm}}{\left[ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^{2k} - \left( \frac{\pi m}{T} \right)^{2p} \right]},$$

а при нечетных  $k$  и  $p$

$$u_{nm} = - \frac{f_{nm}}{\left[ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^{2k} - \left( \frac{\pi m}{T} \right)^{2p} \right]}.$$

Итак, формальное решение задачи (1), (3), (4) при четных значениях  $(k-p)$  имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{aT}} \cdot \frac{(-1)^k f_{nm}}{\left[ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^{2k} - \left( \frac{\pi m}{T} \right)^{2p} \right]} \sin \frac{\pi n}{a} x \cdot \sin \frac{\pi m}{T} t \quad (19)$$

Осталось доказать равномерную сходимость ряда (19), а также рядов полученных из (19) дифференцированием  $2k$  раз по  $x$  и  $2p$  раз по  $t$ .

Для начала оценим разность

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^{2k} - \left( \frac{\pi m}{T} \right)^{2p} \right] &= \left[ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^k - \left( \frac{\pi m}{T} \right)^p \right] \cdot \left[ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^k + \left( \frac{\pi m}{T} \right)^p \right] = \\ &= \frac{\pi^k m^p}{a^k} \left[ \frac{n^k}{m^p} - \frac{a^k}{T^p \pi^{k-p}} \right] \cdot \left[ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^k + \left( \frac{\pi m}{T} \right)^p \right]. \end{aligned}$$

В силу того, что число  $\frac{a^k}{T^p \pi^{k-p}}$  является алгебраическим числом степени  $n \geq 2$ , то оно удовлетворяет следующей оценке

$$\left| \frac{n^k}{m^p} - \frac{a^k}{T^p \pi^{k-p}} \right| \geq \frac{C}{m^{2p}}.$$

Тогда получаем,

$$\left[ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^{2k} - \left( \frac{\pi m}{T} \right)^{2p} \right] \geq \frac{C_0 \sqrt{\left( \frac{\pi n}{a} \right)^{2k} + \left( \frac{\pi m}{T} \right)^{2p}}}{m^{\frac{p}{2}}}$$

или в силу того что число  $\frac{T^p \pi^{k-p}}{a^k}$  также является алгебраическим числом степени  $n \geq 2$ , находим

$$\left[ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^{2k} - \left( \frac{\pi m}{T} \right)^{2p} \right] \geq \frac{C_1 \sqrt{\left( \frac{\pi n}{a} \right)^{2k} + \left( \frac{\pi m}{T} \right)^{2p}}}{n^{\frac{k}{2}}}.$$

Т.е.

$$\left[ \left( \frac{\pi n}{a} \right)^{2k} - \left( \frac{\pi m}{T} \right)^{2p} \right] \geq \min \left( \frac{C_0 \sqrt{\left( \frac{\pi n}{a} \right)^{2k} + \left( \frac{\pi m}{T} \right)^{2p}}}{m^{\frac{p}{2}}}; \frac{C_1 \sqrt{\left( \frac{\pi n}{a} \right)^{2k} + \left( \frac{\pi m}{T} \right)^{2p}}}{n^{\frac{k}{2}}} \right).$$

Итак

$$|u_{nm}| \leq 2 \frac{C n^k m^p}{\left( \frac{\pi n}{a} \right)^{2k} + \left( \frac{\pi m}{T} \right)^{2p}} |f_{nm}|.$$

Откуда в силу условий наложенных на функцию  $f(x, t)$  следует равномерная сходимость ряда (19). Теорема доказана.  $\square$

## Список литературы

- [1] Юлдашева А. В., “Об устойчивости краевой задачи для уравнения четного порядка”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2015, № 1(10), 5–11; англ. пер.: “On the stability of the boundary value problem for even order equation”, *Bulletin KRASEC. Phys. & Math. Sci.*, **10**:1 (2015), 4–10.
- [2] Amanov Dj., Yuldasheva A. V., “Solvability and spectral properties of boundary value problems for equations of even order”, *International Journal of Computer Mathematics*, **38** (2009), 61–70.
- [3] Березанский Ю. М., “Разложение по собственным функциям уравнений в частных производных второго порядка”, *Тр. ММО*, **5**, ГИТТЛ, М., 1956, 203–268.
- [4] Сабитов К. Б., “Задача Дирихле для двумерных уравнений в частных производных высших порядков”, *Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики*, Материалы международного Российско-Болгарского симпозиума (Нальчик–Хабез), Изд-во НИИ ПМА КБНЦ РАН, Нальчик–Хабез, 2010, 212–214.
- [5] Сабитов К. Б., “Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков и проблема Ферма”, *Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского*, **41**, Изд-во Казанского математического общества, Казань, 2010, 98–102.
- [6] Шидловский А. Б., *Трансцендентные числа*, Наука, М., 1987, 448 с.
- [7] Юлдашева А. В., “Об одной задаче для уравнения высокого порядка”, *Доклады Академии наук Республики Узбекистан*, 2012, № 5, 11–14.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 23.11.2015