

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-12-1-32-40

УДК 517.956.6

**ПОСТАНОВКА И ИЗУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
ТИПА ВИДА $\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0$ В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

М. Мамажонов, Х. Б. Мамадалиева

Кокандский государственный педагогический институт им. Муқимий, 113000, Узбекистан, г. Коканд, ул. Амира Темура, 37

E-mail: bek84-08@mail.ru

В настоящей работе ставятся две краевые задачи, и исследуется одна из этих задач для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида $\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0$ в пятиугольной области. Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи.

Ключевые слова: дифференциальные и интегральные уравнения, краевые задачи, параболо-гиперболический тип

© Мамажонов М., Мамадалиева Х. Б., 2016

MSC 35M13

**STATEMENT AND STUDY OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR
THIRD ORDER EQUATION OF PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE TYPE
 $\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0$ IN A PENTAGONAL AREA**

M. Mamazhonov, Kh. B. Mamadalieva

Kokand State Pedagogical Institute. Muqimiy, 113000, Uzbekistan, Kokand, st. Amir Temur, 37

E-mail: bek84-08@mail.ru

In this paper we put two boundary value problems, and examines one of these problems for the equation of the third order parabolic-hyperbolic type $\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0$ in a pentagonal area. We prove the unique solvability of the problem

Key words: differential and integral equations, boundary problems, parabolic-hyperbolic type

© Mamazhonov M., Mamadalieva Kh. B., 2016

Введение

При решении краевых задач математической физики применяются методы дифференциальных и интегральных уравнений. Настоящая статья является примером применения этих методов к решению одной краевой задачи для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области.

Постановка задачи

Рассмотрим область D на плоскости xOy , где $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup AB \cup AE_2 \cup AE_1 \cup AA_0 \cup \{(0, 0)\}$, а D_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $B_0(1, 1)$, $A_0(0, 1)$, D_2 – треугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $E_1(0, -1)$, D_3 – треугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $E_1(0, -1)$, $E_2(-1, 0)$, D_4 – треугольник с вершинами в точках $A(0, 0)$, $A_0(0, 1)$, $E_2(-1, 0)$, AB – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, AE_2 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0, 0)$ и $E_2(-1, 0)$, AE_1 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0, 0)$ и $E_1(0, -1)$, AA_0 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0, 0)$ и $A_0(0, 1)$.

Рассмотрим в области D уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu) = 0, \quad (1)$$

где

$$Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x, y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x, y) \in D_i, \quad i = 2, 3, 4. \end{cases}$$

Введем следующее обозначение: $u(x, y) = u_i(x, y)$, $(x, y) \in D_i (i = 1, 2, 3, 4)$.

Рассмотрим следующую задачу для уравнения (1):

Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$, которая

- 1) непрерывна в замкнутой области \bar{D} ;
- 2) удовлетворяет уравнению (1) в области D при $x \neq 0$ и $y \neq 0$;
- 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u_1(1, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (2)$$

$$u_2|_{BE_1} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$u_4|_{A_0C_3} = \psi_2(x), \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{BE_1} = \psi_4(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_4}{\partial n} \Big|_{A_0E_2} = \psi_6(x), \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (6)$$

- 4) удовлетворяет следующим непрерывным условиям склеивания:

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7)$$

$$u_{1y}(x, -0) = u_{2y}(x, +0) = v_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (8)$$

$$u_3(x, 0) = u_4(x, 0) = \tau_2(x), \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (9)$$

$$u_{3y}(x, 0) = u_{4y}(x, 0) = v_2(x), \quad -1 \leq x \leq 0 \quad (10)$$

$$u_1(0, y) = u_4(0, y) = \tau_4(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (11)$$

$$u_{1x}(0, y) = u_{4x}(0, y) = v_4(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (12)$$

$$u_{1xx}(0, y) = u_{4xx}(0, y) = \mu_4(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (13)$$

$$u_2(0, y) = u_3(0, y) = \tau_3(y), \quad -1 \leq y \leq 0, \quad (14)$$

$$u_{2x}(0, y) = u_{3x}(0, y) = v_3(y), \quad -1 \leq y \leq 0, \quad (15)$$

$$u_{2xx}(0, y) = u_{3xx}(0, y) = \mu_3(y), \quad -1 \leq y \leq 0. \quad (16)$$

Здесь n – внутренняя нормаль к прямым BE_1 или E_1E_2 , $\varphi_1, \psi_1, \psi_2, \psi_4, \psi_6$ – заданные достаточно гладкие функции, а τ_j, v_j ($j = 1, 2, 3, 4$), μ_1, μ_2 – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению, причем выполняются следующие условия согласования: $\psi'_4(0) = -\psi'_5(0)$, $\tau_1(1) = \psi_1(1) = \varphi(0)$, $\tau'_1(1) = \varphi'(0) - \sqrt{2}\psi_4(1)$, $\tau''_1(1) = \varphi''(0) - \sqrt{2}\psi'_4(1)$.

Задача 2. Эта задача отличается от **Задачи 1** тем, что вместо условия (4) берется условие:

$$u_3|_{E_2C_2} = \psi_3(x), \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}.$$

Остальные условия остаются без изменений.

В этой работе рассмотрим только **Задачу 1**. Для решения поставленной уравнение (1) запишем в виде:

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1(y), \quad (x, y) \in D_1, \quad (17)$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_i(y), \quad (x, y) \in D_i \quad (i = 2, 3, 4), \quad (18)$$

где введено обозначение: $u(x, y) = u_i(x, y)$, $(x, y) \in D_i$ ($i = \overline{1, 4}$), а $\omega_i(y)$ ($i = \overline{1, 4}$) – неизвестные пока непрерывные функции.

Области D_i ($i = 2, 3, 4$) запишем в следующем виде: $D_i = D_{i1} \cup D_{i2} \cup AC_{i-1}$, где D_{21} – треугольник с вершинами в точках $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, D_{22} – треугольник с вершинами в точках $A(0; 0)$, $E_1(0; -1)$, $C_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, D_{31} – треугольник с вершинами в точках $A(0; 0)$, $E_1(0; -1)$, $C_2(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, D_{32} – треугольник с вершинами в точках $A(0; 0)$, $E_2(-1; 0)$, $C_2(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, D_{41} – треугольник с вершинами в точках $A(0; 0)$, $A_0(0; 1)$, $C_3(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, D_{42} – треугольник с вершинами в точках $A(0; 0)$, $E_2(-1; 0)$, $C_3(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, AC_1 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0; 0)$,

$C_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, AC_2 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0; 0)$, $C_2(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, AC_3 – открытый отрезок с вершинами в точках $A(0; 0)$, $C_3(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, то есть $AC_1 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < \frac{1}{2}, y = -x\}$, $D_{21} = \{(x, y) \in R^2 : -\frac{1}{2} < y < 0, -y < x < y + 1\}$, $D_{22} = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < \frac{1}{2}, x - 1 < y < -x\}$, $AC_2 = \{(x, y) \in R^2 : -\frac{1}{2} < x < 0, y = x\}$, $D_{31} = \{(x, y) \in R^2 : -\frac{1}{2} < x < 0, -x - 1 < y < x\}$, $D_{32} = \{(x, y) \in R^2 : -\frac{1}{2} < y < 0, -y - 1 < x < y\}$, $AC_3 = \{(x, y) \in R^2 : -\frac{1}{2} < x < 0, y = -x\}$, $D_{41} = \{(x, y) \in R^2 : -\frac{1}{2} < x < 0, -x < y < x + 1\}$, $D_{42} = \{(x, y) \in R^2 : 0 < y < \frac{1}{2}, y - 1 < x < -y\}$.

Тогда уравнение (18) ($i = 2, 3, 4$) примет следующий вид:

$$u_{ikxx} - u_{iky} = \omega_{ik}(y), \quad (x, y) \in D_{ik} \quad (i = 2, 3, 4; k = 1, 2), \quad (19)$$

где введены обозначения $u_i(x, y) = u_{ik}(x, y)$, $\omega_i(y) = \omega_{ik}(y)$, $(x, y) \in D_{ik}$ ($i = 2, 3, 4; k = 1, 2$).

Сначала **Задачу 1** будем исследовать в области D_2 . Запишем решение уравнения (19) ($i = 2; k = 1$), удовлетворяющее условиям (7), (8):

$$u_{21}(x, y) = \frac{\tau_1(x+y) + \tau_1(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} v_1(t) dt - \int_0^y (y-\eta) \omega_{21}(\eta) d\eta. \quad (20)$$

Условие (5) можно записать в следующем виде:

$$\left(\frac{\partial u_{21}}{\partial x} - \frac{\partial u_{21}}{\partial y} \right) \Big|_{y=x-1} = -\sqrt{2}\psi_4(x). \quad (21)$$

Дифференцируя уравнение (20) по x и y , и подставляя их в (21), после некоторых преобразований находим

$$\omega_{21}(y) = -\sqrt{2}\psi_4'(y+1), \quad -\frac{1}{2} \leq y \leq 0. \quad (22)$$

Теперь подставляя (20) в (3) и дифференцируя полученное соотношение и затем в полученном соотношении заменяя $2x - 1$ на x , приходим к уравнению

$$v_1(x) = -\tau_1'(x) + \alpha_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (23)$$

где $\alpha_1(x)$ – известная функция.

Далее, переходя в уравнении (17) к пределу при $y \rightarrow 0$, получим:

$$\tau_1''(x) - v_1(x) = \omega_1(0), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $\omega_1(0)$ неизвестное пока постоянное число. Подставляя (23) в последнее равенство, получим уравнение

$$\tau_1''(x) + \tau_1'(x) = \alpha_1(x) + \omega_1(0), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Интегрируя это уравнение от 1 до x , имеем

$$\tau_1'(x) + \tau_1(x) = \int_1^x \alpha_1(t) dt + \omega_1(0)(x-1) + b, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где b неизвестное пока постоянное число. Решая это уравнение при условиях

$$\tau_1(1) = \psi_1(1) = \varphi(0), \tau_1'(1) = \varphi'(0) - \sqrt{2}\psi_4(1), \tau_1''(1) = \varphi''(0) - \sqrt{2}\psi_4'(1),$$

получим:

$$\begin{aligned} \tau_1(x) = \int_1^x (1 - \exp(t-x)) \alpha_1(t) dt + \omega_1(0)(x-2 + \exp(1-x)) + \\ + b(1 - \exp(1-x)) + c \exp(1-x) \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} c = \varphi(0), b = \varphi'(0) + \varphi(0) - \sqrt{2}\psi_4(1), \\ \omega_1(0) = \varphi_1''(0) - \sqrt{2}\psi_4'(1) + \varphi'(0) - \sqrt{2}\psi_4(1) - \psi_1'(1). \end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли функцию $\tau_1(x)$, а следовательно и функции $v_1(x)$, $u_{21}(x, y)$.

Теперь переходим в область D_{22} . Запишем решение уравнения (19) ($i=2; k=2$), удовлетворяющее условиям (14), (15):

$$u_{22}(x, y) = \frac{\tau_3(y+x) + \tau_3(y-x)}{2} + \frac{1}{2} \int_{y-x}^{y+x} v_3(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x d\eta \int_{y-x+\eta}^{y+x-\eta} \omega_{22}(\xi) d\xi. \quad (25)$$

Дифференцируя (25) по x и y и подставляя их в (21), после некоторых преобразований находим:

$$\omega_{22}(y) = -\sqrt{2}\psi_4'(y+1), \quad -1 \leq y \leq -\frac{1}{2} \quad (26)$$

Теперь будем пользоваться из условия $\left(\frac{\partial u_{22}}{\partial x} + \frac{\partial u_{22}}{\partial y}\right)\Big|_{y=-x} = \left(\frac{\partial u_{21}}{\partial x} + \frac{\partial u_{21}}{\partial y}\right)\Big|_{y=-x}$.

$$\tau_3'(0) + v_3(0) + \int_0^x \omega_{22}(-\eta) d\eta = \tau_1'(0) + v_1(0) - \int_0^{-x} \omega_{21}(\eta) d\eta.$$

Дифференцируя это равенство и в полученном равенстве заменяя $-x$ на y и учитывая (22), получим $\omega_{22}(y) = -\sqrt{2}\psi_4'(y+1)$, $-\frac{1}{2} \leq y \leq 0$. Из этого равенства и (26) видно, что

$$\omega_{22}(y) = -\sqrt{2}\psi_4'(y+1), \quad -1 \leq y \leq 0.$$

Далее, подставляя (25) в (3) и дифференцируя полученное равенство, имеем

$$\tau_3'(y) + v_3(y) = \delta_1(y), \quad -1 \leq y \leq 0, \quad (27)$$

где $\delta_1(y)$ – известная функция.

Теперь используем условие $u_{22}(x, -x) = u_{21}(x, -x)$, где $u_{21}(x, -x)$ – известная функция.

Подставляя (25) в это условие и дифференцируя полученное равенство, затем в продифференцированном равенстве заменяя $-2x$ на y , получим следующее соотношение:

$$\tau_3'(y) - v_3(y) = \delta_2(y), \quad -1 \leq y \leq 0, \quad (28)$$

здесь $\delta_2(y)$ – известная функция.

Из (27) и (28) находим:

$$v_3(y) = \frac{1}{2} [\delta_1(y) - \delta_2(y)], \quad -1 \leq y \leq 0. \quad (29)$$

Интегрируя

$$\tau'_3(y) = \frac{1}{2} [\delta_1(y) + \delta_2(y)], \quad -1 \leq y \leq 0.$$

последнее равенство от -1 до y , получим:

$$\tau_3(y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^y [\delta_1(\eta) + \delta_2(\eta)] d\eta + \tau_1(0), \quad -1 \leq y \leq 0 \quad (30)$$

где положено $\tau_3(0) = \tau_1(0)$.

Таким образом, мы нашли функцию $u_{22}(x, y)$, а следовательно – и функцию $u_2(x, y)$ полностью.

Теперь переходим в область D_3 . Если в уравнениях (19) ($i = 2; k = 2$) и (19) ($i = 3; k = 1$) перейти к пределу при $x \rightarrow 0$, то мы получим уравнения $\mu_3(y) - \tau''_3(y) = \omega_{22}(y)$, $\mu_3(y) - \tau''_3(y) = \omega_{31}(y)$. Из этих соотношений видно, что

$$\omega_{31}(y) = \omega_{22}(y) = -\sqrt{2}\psi'_4(y+1), \quad -1 \leq y \leq 0.$$

Следовательно, функция $u_{31}(x, y)$ уже станет известной. Она определяется по формуле:

$$u_{31}(x, y) = \frac{\tau_3(y+x) + \tau_3(y-x)}{2} + \frac{1}{2} \int_{y-x}^{y+x} v_3(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x d\eta \int_{y-x+\eta}^{y+x-\eta} \omega_{31}(\xi) d\xi. \quad (31)$$

Далее, будем пользоваться условиями: $\left(\frac{\partial u_{32}}{\partial x} - \frac{\partial u_{32}}{\partial y}\right)\Big|_{y=x} = \left(\frac{\partial u_{31}}{\partial x} - \frac{\partial u_{31}}{\partial y}\right)\Big|_{y=x}$.

Запишем решение уравнения (19) ($i = 3; k = 2$), удовлетворяющее условиям (9), (10):

$$u_{32}(x, y) = \frac{\tau_2(x+y) + \tau_2(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} v_2(t) dt - \int_0^y (y-\eta) \omega_{32}(\eta) d\eta. \quad (32)$$

Дифференцируя (31) и (32) по x и y и подставляя их в условие $\left(\frac{\partial u_{32}}{\partial x} - \frac{\partial u_{32}}{\partial y}\right)\Big|_{y=x} = \left(\frac{\partial u_{31}}{\partial x} - \frac{\partial u_{31}}{\partial y}\right)\Big|_{y=x}$, получим:

$$\tau'_2(0) - v_2(0) + \int_0^x \omega_{32}(\eta) d\eta = -\tau'_3(0) + v_3(0) + \int_0^x \omega_{31}(\eta) d\eta.$$

Дифференцируя это уравнение и в полученном равенстве заменяя x на y , находим:

$$\omega_{32}(y) = \omega_{31}(y) = -\sqrt{2}\psi'_4(y+1), \quad -\frac{1}{2} \leq y \leq 0.$$

Теперь учитывая условие $u_{32}(x, x) = u_{31}(x, x)$, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_2(2x) + \tau_2(0)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{2x} v_2(t) dt - \int_0^x (x - \eta) \omega_{32}(\eta) d\eta = \frac{\tau_3(2x) + \tau_3(0)}{2} + \\ + \frac{1}{2} \int_0^{2x} v_3(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x d\eta \int_{\eta}^{2x-\eta} \omega_{31}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Дифференцируя это равенство и в полученном уравнении заменяя $2x$ на x , получим:

$$v_2(x) = -\tau_2'(x) + \alpha_2(x), \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (33)$$

где $\alpha_2(x)$ – известная функция.

Теперь переходим в область D_{42} . Запишем решение уравнения (19) ($i = 4; k = 2$), удовлетворяющее условиям (9), (10):

$$u_{42}(x, y) = \frac{\tau_2(x+y) + \tau_2(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} v_2(t) dt - \int_0^y (y - \eta) \omega_{42}(\eta) d\eta. \quad (34)$$

Дифференцируя (34) по x и y и подставляя их в (6), получим

$$\tau_2'(-1) - v_2(-1) + \int_0^{x+1} \omega_{42}(\eta) d\eta = \sqrt{2}\psi_6(x), \quad -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}.$$

Дифференцируя это равенство и в полученном уравнении заменяя $x+1$ на y , находим:

$$\omega_{42}(y) = \sqrt{2}\psi_6'(y-1), \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}. \quad (35)$$

Подставляя (33) в (34), после некоторых упрощений получим

$$u_{42}(x, y) = \tau_2(x-y) + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \alpha_2(t) dt - \int_0^y (y - \eta) \omega_{42}(\eta) d\eta \quad (36)$$

Теперь переходим в область D_{41} . Запишем решение уравнения (19) ($i = 4; k = 1$), удовлетворяющее условиям (11), (12):

$$u_{41}(x, y) = \frac{\tau_4(y+x) + \tau_4(y-x)}{2} + \frac{1}{2} \int_{y-x}^{y+x} v_4(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x d\eta \int_{y-x+\eta}^{y+x-\eta} \omega_{41}(\xi) d\xi \quad (37)$$

Дифференцируя (36) и (37) по x и y и подставляя их в условие $\left(\frac{\partial u_{41}}{\partial x} + \frac{\partial u_{41}}{\partial y}\right)\Big|_{y=-x} = \left(\frac{\partial u_{42}}{\partial x} + \frac{\partial u_{42}}{\partial y}\right)\Big|_{y=-x}$, получим:

$$\tau_4'(0) + v_4(0) + \int_0^x \omega_{41}(-\eta) d\eta = \tau_2'(0) + v_2(0) - \int_0^{-x} \omega_{42}(\eta) d\eta, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0.$$

Дифференцируя это равенство и в полученном уравнении заменяя $-x$ на y и учитывая (35), находим

$$\omega_{41}(y) = \omega_{42}(y) = \sqrt{2}\psi'_6(y-1), \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}. \quad (38)$$

Подставляя (37) в (6), имеем

$$-\tau'_4(1) + v_4(1) + \int_0^x \omega_{41}(1+\eta) d\eta = \sqrt{2}\psi_6(x), \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0.$$

Дифференцируя это равенство и в полученном уравнении заменяя $1+x$ на y , находим:

$$\omega_{41}(y) = \sqrt{2}\psi'_6(y-1), \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1.$$

Из последнего равенства и (38) видно, что

$$\omega_{41}(y) = \sqrt{2}\psi'_6(y-1), \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (39)$$

Теперь подставляя (37) в (4) и дифференцируя полученное равенство, затем в полученном уравнении заменяя $2x+1$ на y , получим:

$$\tau'_4(y) + v_4(y) = \alpha_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (40)$$

где $\alpha_3(y)$ – известная функция.

Затем учитывая условие $u_{41}(x, -x) = u_{42}(x, -x)$, дифференцируя полученное уравнение и заменяя $-2x$ на y , получим:

$$\tau'_4(y) - v_4(y) = -2\tau'_2(-y) + \alpha_4(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (41)$$

где $\alpha_4(y)$ – известная функция.

Из (40) и (41) находим функции $\tau'_4(y)$ и $v_4(y)$:

$$\tau'_4(y) = -\tau'_2(-y) + \frac{1}{2}[\alpha_3(y) + \alpha_4(y)], \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (42)$$

$$v_4(y) = \tau'_2(-y) + \frac{1}{2}[\alpha_3(y) - \alpha_4(y)], \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (43)$$

Интегрируя (42) от 1 до y , находим $\tau_4(y)$:

$$\tau_4(y) = \tau_2(-y) + \frac{1}{2} \int_1^y [\alpha_3(t) + \alpha_4(t)] dt + \psi_2(0) - \tau_2(-1), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Теперь переходим в область D_1 . В уравнения (17) и (19) ($i=4; k=1$) переходя к пределу при $x \rightarrow 0$, получим соотношения: $\mu_4(y) - \tau'_4(y) = \omega_1(y), \mu_4(y) - \tau''_4(y) = \omega_{41}(y)$.

Исключая из этих соотношений функцию $\mu_4(y)$, получим: $\omega_1(y) = \tau''_4(y) - \tau'_4(y) + \omega_{41}(y)$.

Дифференцируя (42), имеем: $\tau''_4(y) = \tau''_2(-y) + \frac{1}{2}[\alpha'_3(y) + \alpha'_4(y)]$.

Тогда учитывая последнее равенство и (42), функцию $\omega_1(y)$ можно записать в виде:

$$\omega_1(y) = \tau_2''(-y) + \tau_2'(-y) + \gamma_1(y), \quad (44)$$

где $\gamma_1(y)$ – известная функция.

Далее, запишем решение уравнения (17), удовлетворяющее условиям (2), (7), (11):

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\int_0^y \tau_4(\eta) G_\xi(x, y; 0, \eta) d\eta - \int_0^y \varphi_1(\eta) G_\xi(x, y; 1, \eta) d\eta + \right. \\ \left. + \int_0^1 \tau_1(\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi - \int_0^y \omega_1(\eta) d\eta \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta) d\xi \right]. \quad (45)$$

Дифференцируя (45) по x и в полученном равенстве переходя к пределу при $x \rightarrow 0$, в силу (42) и (43) учитывая равенство $\tau_2'(-y) = \tau_1'(0) - \int_0^y \tau_2''(-\eta) d\eta$, получим уравнение типа Абеля относительно $\tau_2''(-y)$. Применяя в это уравнение обращение Абеля, после некоторых вычислений получим уравнение

$$\tau_2''(-y) + \int_0^y K(y, \eta) \tau_2''(-\eta) d\eta = g(y), \quad (46)$$

где $K(y, \eta)$, $g(y)$ – известные функции.

Уравнение (46) является интегральным уравнением типа Вольтерра второго рода, ядро $K(y, \eta)$ имеет слабую особенность, а правая часть $g(y)$ непрерывна в промежутке $0 < y < 1$. Решая уравнение (46) в классе непрерывных функций в промежутке $0 < y < 1$, находим функцию $\tau_2''(-y)$, а следовательно и функции $\tau_2'(-y)$, $\tau_2(-y)$, $\tau_4(y)$, $v_4(y)$, $\omega_1(y)$, $u_{41}(x, y)$, $u_{42}(x, y)$ и $u_1(x, y)$.

Таким образом, **Задача 1** решена полностью.

Заключение

В работе [1] рассмотрен ряд краевых задач для более общих уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в области с одной характеристической линией изменения типа. В работе [2] рассмотрены краевые задачи для одного класса параболо-гиперболических уравнений третьего порядка в вогнутой шестиугольной области.

Список литературы

- [1] Джураев Т. Д., Мамажонов М., “О корректной постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа”, *Дифференциальные уравнения*, **19:1** (1983), 37–50.
- [2] Мамажонов М., Шерматова Х. М., Мукадасов Х., “Постановка и метод решения некоторых краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2014, № 1(8), 7–13.