

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-22-2-8-19

МАТЕМАТИКА

УДК 517.938

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ЭРЕДИТАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ *

Р. И. Паровик^{1,2}

¹ Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032
Россия, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

² Институт космофизических исследований и распространения радиоволн
ДВО РАН, 684034 Россия, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

E-mail: romanparovik@gmail.com, parovik@ikir.ru

В учебном курсе теории дифференциальных уравнений, существует раздел по исследованию устойчивости систем дифференциальных уравнений. Если система дифференциальных уравнений состоит из дифференциальных уравнений целочисленного порядка, то обычно для исследования устойчивости их точек покоя используется теория устойчивости Ляпунова. Однако в случае, когда система дифференциальных уравнений состоит из дифференциальных уравнений нецелочисленного порядка, тогда необходимо использовать другие методы исследования устойчивости таких систем. Поэтому эта статья посвящена методу исследования точек покоя систем дифференциальных уравнений дробного порядка. В работе мы будем исследовать устойчивость точек покоя эредитарных динамических систем на примере некоторых фрактальных осцилляторов. Причем будем рассматривать эредитарные динамические системы двух типов: соизмеримые и несоизмеримые, для которых справедливы соответствующие теоремы устойчивости точек покоя. Далее рассмотрены примеры применения этих теорем устойчивости для фрактального линейного осциллятора, фрактального осциллятора Дуффинга. Результаты исследования устойчивости точек покоя эредитарных динамических систем были подтверждены с помощью построения фазовых траекторий для рассматриваемых фрактальных осцилляторов. Эта статья может быть полезна при изучении достаточно нового раздела в теории дифференциальных уравнений – дробного исчисления.

Ключевые слова: устойчивость, точки покоя, фрактальные осцилляторы, оператор Герасимова-Капуто, фазовые траектории, предельные циклы, устойчивый фокус.

© Паровик Р. И., 2018

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ № МК-1152.2018.1 и по теме НИР КамГУ имени Витуса Беринга «Применение дробного исчисления в теории колебательных процессов» №АААА-А17-117031050058-9.

Введение

Исследование динамических систем, которые обладают фрактальными свойствами или степенной памятью имеют важное теоретическое и практическое значение. Наличие памяти в динамической системе указывает на зависимость ее текущего состояния от конечного числа предыдущих ее состояний. Это приводит к нелокальным свойствам динамических систем, например, в механике при описании вязко-упругих сред известен эффект последействия [1,2], в материаловедении — усталость материалов, которая характеризуется постепенным накопления дефектов под действием напряжений, что приводит к разрушению материала [3], в экономике — эффекты динамической памяти в экономической теории [4] и даже в медицине [5].

Нелокальными (фрактальными) свойствами могут обладать также колебательные системы — фрактальные осцилляторы [6]. Эти осцилляторы могут обладать новыми колебательными режимами и содержат ранее известные, которые характерны для классических осцилляторов, что является очень важным при изучении колебательных процессов в различных прикладных задачах [7].

Одним из важных направлений исследований фрактальных осцилляторов в рамках качественного анализа является изучение устойчивости их точек покоя [8-10], что дает информацию о колебательных режимах, рассматриваемой эрдитарной динамической системы [11-13]. Поэтому настоящая работа посвящена исследованию устойчивости точек покоя эрдитарных колебательных систем на примере фрактальных осцилляторов.

Постановка задачи и методы исследования

Задача. Необходимо исследовать на устойчивость точки покоя эрдитарной динамической системы, которую можно записать в виде следующей задачи Коши:

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\eta) + \lambda(x(t), t) \partial_{0t}^{\gamma} x(\eta) = f(x(t), t), x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0, \quad (1)$$

с производными дробных порядков Герасимова-Капуто [1], [3]:

$$\partial_{0t}^{\beta} x(\eta) = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t-\eta)^{\beta-1}}, \partial_{0t}^{\gamma} x(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\eta)^{\gamma}}, 1 < \beta < 2, 0 < \gamma < 1,$$

где $x(t) \in C^2[0, T]$ — функция смещения, нелинейная функция $\lambda(x(t), t)$ — нелинейное трение в колебательной системе, $f(x(t), t)$ — нелинейная функция, которое содержит внешнее воздействия на колебательную систему и ее возвращающую силу, $\dot{x}(t) = dx/dt, \ddot{x}(t) = d^2x(t)/dt^2$ — производные первого и второго порядков, T — время моделирование, x_0 и y_0 — заданные константы, определяющие начальные условия задачи Коши (1).

Замечание 1. Вопросы обоснования существования и единственности решения задачи Коши (1) были рассмотрены в работе [14] с учетом того, что функции $\lambda(x(t), t)$ и $f(x(t), t)$ обладают нужными свойствами гладкости.

Определение 1. Динамическую систему, характеризующую класс осцилляторов со степенной памятью, который представляет задачу Коши (1) будем называть классом эрдитарных (фрактальных) осцилляторов.

Замечание 2. Модельное уравнение (1) удобно переписать в виде следующей динамической системы:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1} x_1(\tau) = x_2(t), \alpha_1 = \gamma, \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} x_2(t) = f(x_1(t), t) - \lambda(x_1(t), t)x_2(t), \alpha_2 = \beta - \gamma, \end{cases} \quad (2)$$

а начальные условия переписутся в виде:

$$x_1(0) = x_0, x_2(0) = y_0, \quad (3)$$

Замечание 3. Заметим, что в динамической системе (2) дробные порядки α_1 и α_2 обладают свойствами: $0 < \alpha_1 < 1$, а $0 < \alpha_2 < 2$, причем, если $\{\beta\} \leq \{\gamma\}$, то $0 < \alpha_2 \leq 1$, а при $\{\beta\} > \{\gamma\}$, то $1 < \alpha_2 < 2$, где $\{\}$ – дробная часть числа. Эти свойства необходимо учитывать при построении конечно-разностных схем для нахождения численного решения задачи Коши (2), (3).

Напомним, что объектом исследования в теории устойчивости динамических систем являются точки их равновесия или покоя.

Определение 2. Точки равновесия $E^*(x_1^*, x_2^*)$ динамической системы (2) являются решениями системы алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} x_2^*(t) = 0, \\ f(x_1^*(t), t) - \lambda(x_1^*(t), t)x_2^*(t) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

В работе [6] были введены понятия соизмеримой и несоизмеримой систем.

Определение 3. Динамическая система (2) называется соизмеримой, если $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ и несоизмеримой, если $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Для соизмеримой динамической системы справедлива следующая теорема [6].

Теорема 1. Точки равновесия $E^*(x_1^*, x_2^*)$ соизмеримой динамической системы (2) называются асимптотически устойчивыми, если все собственные значения ξ_i матрицы Якоби:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f(x_1^*, t)}{\partial x_1^*} - \frac{\partial \lambda(x_1^*, t)}{\partial x_1^*} x_2^* & -\lambda(x_1^*, t) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

удовлетворяют следующим условиям:

$$|\arg(\xi_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где n – порядок характеристического уравнения (5).

Аналогично, для несоизмеримой динамической системы (2) справедлива следующая теорема [6].

Теорема 2. Точки равновесия $E^*(x_1^*, x_2^*)$ несоизмеримой динамической системы (2) называются асимптотически устойчивыми, где $\alpha_i = \mu_i/m$, m – некоторое целое число, если вычисленные согласно им все собственные значения ξ_i удовлетворяют характеристическому уравнению:

$$\det(\text{diag}([\xi_i^{m\alpha_1}, \xi_i^{m\alpha_2}]) - J) = 0, \quad (7)$$

и следующим условиям:

$$|\arg(\xi_i)| > \frac{\varphi\pi}{2}, i = 1, \dots, n, \varphi = 1/m, \quad (8)$$

где n – порядок характеристического уравнения (7)

Доказательство. Доказательства Теоремы 1 и Теоремы 2 можно найти в работе [9]. \square

Результаты исследования

Рассмотрим применение Теоремы 1 и Теоремы 2 для исследования точек покоя конкретных типов фрактальных осцилляторов и построим для них соответствующие фазовые траектории.

Замечание 4. Отметим, что для построения фазовых траекторий в рассматриваемых примерах мы будем численно решать задачу Коши (1) с помощью явной нелокальной конечно-разностной схемы, свойства которой были рассмотрены в работе [15].

В работе [8] с помощью Теоремы 1 и Теоремы 2 были исследованы точки покоя для фрактального осциллятора Ван дер Поля. Рассмотрим примеры других фрактальных осцилляторов.

Пример 1. (Фрактальный линейный осциллятор). Рассмотрим случай, когда в системе (2) $f(x_1, t) = -\omega^\beta x_1(t) + \delta \cos(\mu t)$ и $\lambda_1(x_1, t) = \lambda$, что соответствует простейшему линейному фрактальному осциллятору, рассмотренному в работе [16]:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1} x_1(\tau) = x_2(t), \alpha_1 = \gamma, \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} x_2(t) = -\omega^\beta x_1(t) + \delta \cos(\mu t) - \lambda x_2(t), \alpha_2 = \beta - \gamma, \\ x_1(0) = x_0, x_2(0) = y_0, \end{cases} \quad (9)$$

Фрактальный осциллятор (9) является обобщением гармонического осциллятора с трением и внешним гармоническим воздействием. Точки покоя системы (9) можно легко определить из решения следующей алгебраической системы:

$$\begin{cases} x_2^*(t) = 0, \\ -\omega^\beta x_1^*(t) + \delta \cos(\mu t) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

причем якобиан системы (9) имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^\beta & -\lambda \end{bmatrix}, \quad (11)$$

Замечание 5. Заметим, что якобиан (11) не зависит от точек покоя $E^*(x_1^*, x_2^*)$, которые могут быть получены из решения системы (10). Поэтому классификация точек покоя для исходной системы (9) будет определяться собственными значениями — корнями характеристического уравнения.

Рассмотрим простейший случай соизмеримой системы (9), когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, что соответствует классическому гармоническому осциллятору с трением и внешним периодическим воздействием. Тогда характеристическое уравнение (5) примет вид:

$$\xi^2 + \lambda \xi + \omega^2 = 0, \quad (12)$$

откуда $\xi_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4\omega^2}}{2}$. Здесь могут быть три случая: 1) $\lambda \geq 2\omega$; 2) $\lambda < 2\omega$, 3) $\lambda = 0$. Как известно, из теории устойчивости систем дифференциальных уравнений из решения характеристического уравнения (12) в первом случае, мы получаем устойчивый узел, так как корни действительные и отрицательные, во втором случае мы получаем устойчивый фокус, так как корни являются комплексно-сопряженными с отрицательной действительной частью, а третий случай дает чисто мнимые корни, которым соответствует особая точка системы центр. Покажем этот факт с помощью Теоремы 1. Для первого случая возьмем: $\lambda = 1.5$, $\omega = 0.5$, тогда решение уравнения (2) имеет следующие корни: $\xi_1 = -0.1909830056$ и $\xi_2 = -1.309016994$, для которых выполняется условие (6). Для второго случая возьмем: $\lambda = 0.15$, $\omega = 0.5$, тогда корни, полученные корни $\xi_{1,2} = -0.0750 \pm 0.4943429983I$, также будут удовлетворять условию (6). В третьем случае, корни имеют вид $\xi_{1,2} = \pm 0.50I$, то мы получаем равенство $|\arg(\xi_{1,2})| = \pi/2$, что соответствует точке покоя центр. На рис. 1 приведены фазовые траектории для этих трех случаев.

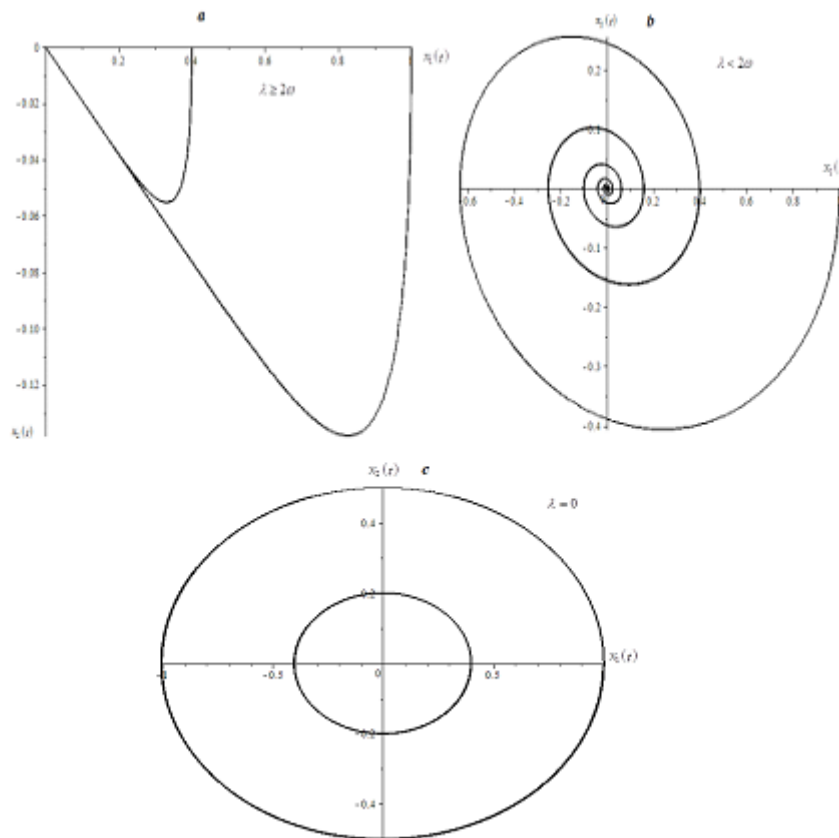


Рис. 1. Фазовые траектории для соизмеримой системы (9) при значении параметров $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\delta = 0$, $\omega = 0.5$, $\beta = 2$, построенные согласно двум начальным условиям: $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$; $x_1(0) = 0.4, x_2(0) = 0$ для следующих трех случаев: а) $\lambda \geq 2\omega, t \in [0, 200]$; б) $\lambda < 2\omega, t \in [0, 200]$; в) $\lambda = 0, t \in [0, 20]$

Рассмотрим случай несоизмеримой системы (9) для этого выберем значения параметров: $\alpha_1 = 0.8 = 8/10$, $\alpha_2 = 0.6 = 6/10$ ($\beta = 1.4, \gamma = 0.8$) и $\varphi = 1/10$. С учетом якобиана (11), мы составим характеристическое уравнение по формуле (7): $\xi^{14} +$

$0.15\xi^8 + 0.3789291416 = 0$, корни которого имеют следующий вид:

$$\xi_i = \left[\begin{array}{l} 2.901454238, 0.2401384155, 2.481336561, 0.6602560929, 2.012781014, 1.128811639, \\ 1.570796327, 1.570796327, 2.012781014, 1.128811639, 2.481336561, 0.6602560929, \\ 2.901454238, 0.2401384155 \end{array} \right]$$

Заметим, что все эти корни удовлетворяют условию (8) Теоремы 2, т.е. $|\arg(\xi_i)| > \pi/20$. Поэтому мы приходим к выводу, что все точки покоя системы (9) для этого случая устойчивы и соответствуют устойчивому предельному циклу (рис. 2).

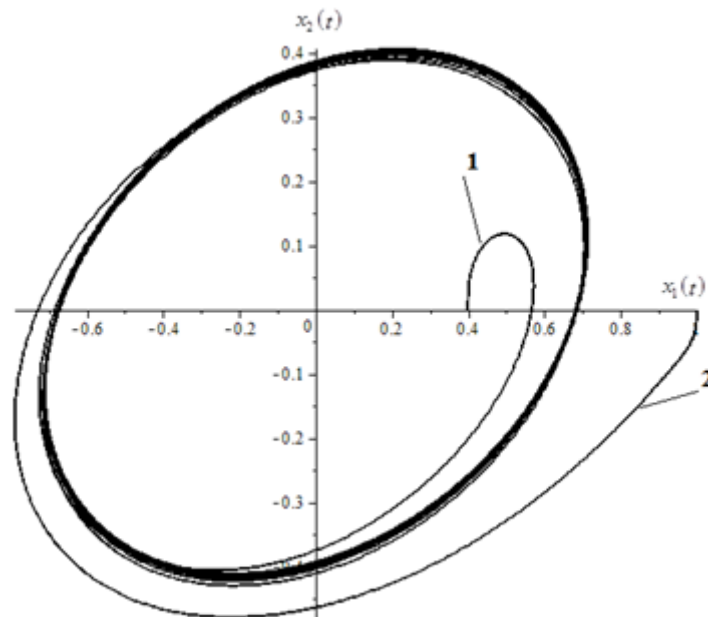


Рис. 2. Устойчивый предельный цикл для осциллятора Дуффинга с памятью с параметрами $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.6 (\beta = 1.4, \gamma = 0.8), \lambda = 0.15, \delta = 0.3, \omega = 0.5, \mu = 1, t \in [0, 100]$ с начальными условиями: кривая 1- $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$; кривая 2- $x_1(0) = 0.4, x_2(0) = 0$

Пример 2. (Фрактальный осциллятор Дуффинга). Пусть в системе (2) выполнены равенства: $f(x_1, t) = x_1(t) - x_1^3(t) + \delta \cos(\mu t)$ и $\lambda_1(x_1, t) = \lambda$, что соответствует фрактальному осциллятору Дуффинга [17]:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha_1} x_1(\tau) = x_2(t), \alpha_1 = \gamma, \\ \partial_{0t}^{\alpha_2} x_2(t) = x_1(t) - x_1^3(t) + \delta \cos(\mu t) - \lambda x_2(t), \alpha_2 = \beta - \gamma, \\ x_1(0) = x_0, x_2(0) = y_0, \end{cases} \quad (13)$$

Точки равновесия системы (9) определяются из системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_2^*(t) = 0, \\ x_1^*(t) - x_1^{*3}(t) + \delta \cos(\mu t) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

а якобиан для системы (6) имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x_1^{*2} & -\lambda \end{bmatrix}, \quad (15)$$

Положим следующие значения параметров: $\lambda = 0.15, \delta = 0.3, \mu = 1, t = 1$. Тогда система (9) имеет три точки покоя:

$$E_1(1.07288371, 0), E_2 = (-0.90615851, 0), E_3 = (-0.16672520, 0).$$

Рассмотрим случай соизмеримой системы, например, когда в (9) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. В этом случае система (9) переходит в классический осциллятор Дуффинга.

Тогда для первой точки покоя E_1 мы будем иметь следующие собственные значения $\xi_{1,2} = -0.750 \pm 1.564485021I$, для второй точки E_2 собственные значения: $\xi_{1,2} = 0.750 \pm 1.207371004I$, а для третьей точки E_3 собственные значения имеют вид:

$$\xi_1 = 1.035329694, \xi_2 = -0.8853296945.$$

Заметим, что условию (6) Теоремы 1 удовлетворяет лишь собственное значения ξ_2 для точки E_3 , которая является седлом. Отсюда следует, что система (9) неустойчива. Фазовая траектория для этого примера приведена на рис. 3.

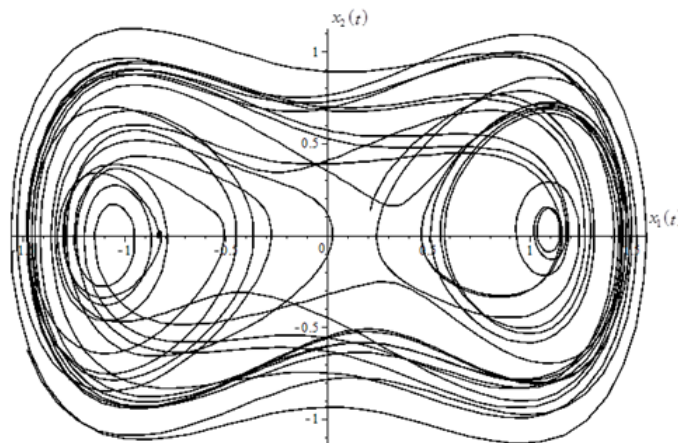


Рис. 3. Классический хаотический аттрактор Дуффинга с параметрами $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \lambda = 0.15, \delta = 0.3, \mu = 1, t \in [0, 200], x_1(0) = 0.21, x_2(0) = 0.13$

На рис. 3. отчетливо видно, что классический осциллятор обладает хаотическим режимом. Интересно отметить, что если выбрать другие параметры, например, как в работе [6]: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.95, \lambda = 0.5, \delta = 1.3, \mu = 1, t \in [0, 200], x_1(0) = 0.21, x_2(0) = 0.13$, то все собственные значения ξ_i удовлетворяют условию (6) и мы получаем устойчивый предельный цикл (рис. 4).

Из рис. 4. видно, что фазовые траектории выходят на один и тот же предельный цикл при разных начальных условиях - точках внутри и вне его.

Рассмотрим случай несоизмеримой системы (9). Пусть параметры α_1 и α_2 имеют значения: $\alpha_1 = 0.8 = 8/10, \alpha_2 = 0.6 = 6/10$. Тогда $\varphi = 1/10$, а остальные параметры из предыдущего случая. Система (9), как мы установили, имеет три точки покоя: $E_1(1.07288371, 0), E_2 = (-0.90615851, 0), E_3 = (-0.16672520, 0)$. Найдем собственные значения ξ_i согласно характеристическому уравнению (7) из условия Теоремы 2.

Для первой точки покоя E_1 характеристическое уравнение имеет вид:

$$\xi^{14} + 0.15\xi^8 + 2.45323837966222 = 0,$$

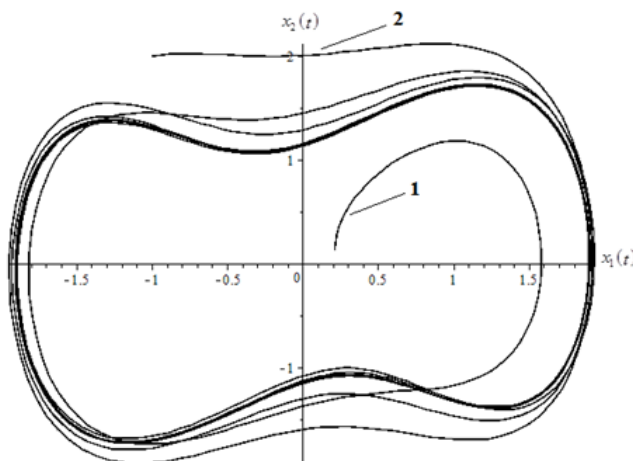


Рис. 4. Устойчивый предельный цикл для осциллятора Дуффинга с памятью с параметрами $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.95$ ($\beta = 1.9, \gamma = 0.95$), $\lambda = 0.5, \delta = 1.3, \mu = 1, t \in [0, 200]$ с начальными условиями: кривая 1- $x_1(0) = 0.21, x_2(0) = 0.13$; кривая 2- $x_1(0) = -1, x_2(0) = 2$

для E_2 характеристическое уравнение $-\xi^{14} + 0.15\xi^8 - 0.916608122093736 = 0$, для E_3 характеристическое уравнение $\xi^{14} + 0.15\xi^8 + 1.46336974243152 = 0$, из которых следуют, что все точки удовлетворяют условию (8), т.е. выполнено $|\arg(\xi_i)| > \frac{\pi}{20}, i = 1, \dots, 14$. Как и в предыдущем примере, такая ситуация соответствует устойчивому предельному циклу (рис. 5).

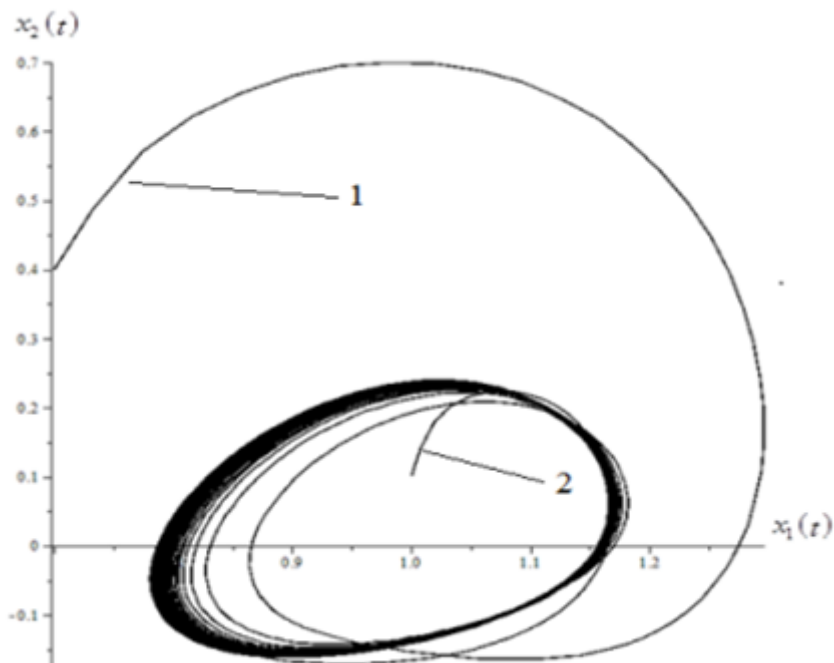


Рис. 5. Устойчивый предельный цикл для осциллятора Дуффинга с памятью с параметрами $\alpha_1 = 0.8, \alpha_2 = 0.6$ ($\beta = 1.4, \gamma = 0.8$), $\lambda = 0.15, \delta = 0.3, \mu = 1, t \in [0, 200]$ с начальными условиями: кривая 1- $x_1(0) = 0.7, x_2(0) = 0.4$; кривая 2- $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0.1$

Заключение

В статье была описана методика исследования устойчивости точек покоя эрдитарных динамических систем на примере фрактальных осцилляторов. Результаты исследований сопоставлялись с фазовыми траекториями фрактальных осцилляторов и дали хорошее согласие. Эта работа может быть использована как методическая при подготовке учебных курсов по теории дифференциальных уравнений или качественному анализу дифференциальных уравнений с производными дробных порядков.

Список литературы

- [1] Boltzmann L., “Zur theorie der elastischen nachwirkung”, *Annalen der Physik*, **241**:11 (1878), 430–432.
- [2] Вронский А. П., “Явление последействия в твердом теле”, *АН СССР. Прикладная математика и механика*, **5**:1 (1941), 31–56. [Vronskij A. P., “Javlenie posledejstvija v tverdom tele”, *AN SSSR. Prikladnaja matematika i mehanika*, **5**:1 (1941), 31–56].
- [3] Герасимов А. Н., “Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения”, *АН СССР. Прикладная математика и механика*, **12** (1948), 529–539. [Gerasimov A. N., “Obobshhenie linejnyh zakonov deformacii i ih prilozhenie k zadacham vnutrennego trenija”, *AN SSSR. Prikladnaja matematika i mehanika*, **12** (1948), 529–539].
- [4] Слонимский Г. Л., “О законе деформации высокоэластичных полимерных тел”, *ДАН СССР*, **140** (1961), 343–346. [Slonimskij G. L., “O zakone deformacii vysokojelastichnyh polimernyh tel”, *DAN SSSR*, **140** (1961), 343–346].
- [5] Uchaikin V. V., *Fractional derivatives for physicists and engineers. V. I: Background and theory*, Springer, Berlin, 2013, 373 pp.
- [6] Magin R. L., “Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues”, *Computers & Mathematics with Applications*, **59**:5 (2010), 1586–1593.
- [7] Carvalho A. R. M., Pinto C. M. A., “Non-integer order analysis of the impact of diabetes and resistant strains in a model for TB infection”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **61** (2018), 104–126.
- [8] Tarasova V. V., Tarasov V. E., “Economic Interpretation of Fractional Derivatives”, *Progr. Fract. Differ. Appl.*, **3**:1 (2017), 1–6.
- [9] Petras I., *Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation*, Springer, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011, 218 pp.
- [10] Паровик Р. И., “Дробное исчисление в теории колебательных систем”, *Современные наукоёмкие технологии*, 2017, № 1, 61–68. [Parovik R. I., “Drobnое ischislenie v teorii kolebatel’nyh sistem”, *Sovremennye naukoemkie tehnologii*, 2017, № 1, 61–68].
- [11] Паровик Р. И., *Математическое моделирование нелинейных эрдитарных осцилляторов*, КамГУ им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 2017, 134 с. [Parovik R. I., *Matematicheskoe modelirovanie nelinejnyh jereditarnyh oscilljatorov*, KamGU im. Vitusa Beringa, Petropavlovsk-Kamchatskij, 2017, 134 pp.]
- [12] Volterra V., “Sur les equations integro-differentielles et leurs applications”, *Acta Mathematica*, **35**:1 (1912), 295–356.
- [13] Oldham K. B., Spanier J., *The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, Academic Press, London, 1974, 240 pp.
- [14] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nahushev A. M., *Drobnое ischislenie i ego primenenie*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp.]
- [15] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo. J. J., *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006, 523 с.
- [16] Meilanov R. P., Yanpolov M. S., “Features of the Phase Trajectory of a Fractal Oscillator”, *Technical Physics Letters*, **28(1)** (2002), 30–32.
- [17] Паровик Р. И., “Математическое моделирование фрактального осциллятора Ван дер Поля”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:2 (2015), 57–62. [Parovik R. I., “Matematicheskoe modelirovanie fraktal’nogo oscilljatora Van der Polja”, *Doklady Aduygskoj (Cherkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, **17**:2 (2015), 57–62].

- [18] Lee J. G., Kim S. W., Bae Y. Ch., “Analysis of Nonlinear Behavior in Fractional Van der Pol Equation with Periodic External Force and Fractional Differential Equation”, *Journal of the KIECS*, **11:2** (2016), 191–196.
- [19] Паровик Р. И., “Об исследовании устойчивости эрeditaryного осциллятора Ван дер Поля”, *Фундаментальные исследования*, 2016, № 3-2, 283–287. [Parovik R. I., “Ob issledovanii ustojchivosti jereditarnogo oscilljatora Van der Polja”, *Fundamental’nye issledovaniya*, 2016, № 3-2, 283–287].
- [20] Бутенков С. А., “Математические модели процессов на фрактальных структурах с заданными свойствами на основе методов грануляции”, *Известия Южного федерального университета. Технические науки*, **121:8** (2011), 199–209. [Butenkov S. A., “Matematicheskie modeli processov na fraktal’nyh strukturah s zadannymi svojstvami na osnove metodov granuljacji”, *Izvestija Juzhnogo federal’nogo universiteta. Tehnicheskie nauki*, **121:8** (2011), 199–209].
- [21] Caputo M., *Elasticita e dissipazione*, Zanichelli, Bologna, 1969, 150 pp.
- [22] Паровик Р. И., “Существование и единственность задачи Коши для широкого класса эрeditaryных осцилляторов”, *Международный научно-исследовательский журнал*, **3:10(64)** (2017), 112–115. [Parovik R. I., “Sushhestvovanie i edinstvennost’ zadachi Koshi dlja shirokogo klassa jereditarnyj oscilljatorov”, *Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel’skij zhurnal*, **3:10(64)** (2017), 112–115].
- [23] Lorenzo C. F., Hartley T. T., *Initialization, Conceptualization, and Application in the Generalized Fractional Calculus*, Lewis Research Center, NASA, Cleveland, Ohio, USA, 1998, 16 pp.
- [24] Ramirez L. E. S., Coimbra C. F. M., “On the selection and meaning of variable order operators for dynamic modeling”, *International Journal of Differential Equations*, **2010** (2010), 846107.
- [25] Зайцев В. В., Карлов А. В., Нураев Д. Б., “Численный анализ автоколебаний активного фрактального осциллятора”, *Физика волновых процессов и радиотехнические системы*, **16:2** (2013), 45–48. [Zajcev V. V., Karlov A. V., Nuraev D. B., “Chislennyj analiz avtokolebanij aktivnogo fraktal’nogo oscilljatora”, *Fizika volnovykh processov i radiotekhnicheskie sistemy*, **16:2** (2013), 45–48].
- [26] Карлов А. В., *Регулярные и хаотические колебания в дробных и дискретных осцилляторах*, Дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.04. 03: Кандидатская диссертация, Самара, 2016, 176 с. [Karlov A. V., *Reguljarnye i haoticheskie kolebanija v drobnyh i diskretnyh oscilljatorah*, Dis.... kand. fiz.-mat. nauk: 01.04. 03: Kandidatskaja dissertacija, Samara, 2016, 176 pp.]
- [27] Parovik R. I., “About one dynamic system, characterizing free oscillations taking into account the variable heredity”, International conference on mathematical modelling in applied sciences, 2017, 297–298.
- [28] Волков Е. А., *Численные методы*, Наука, М., 1987, 248 с. [Volkov E. A., *Chislennye metody*, Nauka, M., 1987, 248 pp.]
- [29] Xu Y., Erturk V. S., “A finite difference technique for solving variable-order fractional integro-differential equations”, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **40:3** (2014), 699–712.

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Вронский А. П. Явление последействия в твердом теле // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1941. Т. 5. № 1. С. 31-56.
- [2] Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформации и их приложение к задачам внутреннего трения // АН СССР. Прикладная математика и механика. 1948. Т. 12. С. 529-539.
- [3] Caputo M., Carcione J.M. Hysteresis cycles and fatigue criteria using anelastic models based on fractional derivatives // *Rheol Acta*. 2011. no 50. pp. 107–115.
- [4] Тарасова В. В., Тарасов В. Е. Понятие динамической памяти в экономической теории // *Экономика и предпринимательство*. 2017. №6(83). С. 868 - 880.

- [5] Carvalho A. R. M., Pinto C. M. A. Non-integer order analysis of the impact of diabetes and resistant strains in a model for TB infection // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2018. vol. 61. pp. 104-126.
- [6] Petras I. *Fractional-Order Nonlinear Systems. Modeling, Analysis and Simulation*. Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 218 p.
- [7] Паровик Р.И. Дробное исчисление в теории колебательных систем // *Современные наукоемкие технологии*. 2017. №1. С. 61 - 68.
- [8] Паровик Р.И. Об исследовании устойчивости эредитарного осциллятора Ван-дер-Поля // *Фундаментальные исследования*. 2016. № 3-2. С. 283 - 287.
- [9] Tavazoei M. S., Haeri M. Chaotic attractors in incommensurate fractional order systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2008. vol. 237, no. 20, pp. 2628-2637.
- [10] Danca M. F., Fečkan M., Chen G. Impulsive stabilization of chaos in fractional-order systems // *Nonlinear Dynamics*. 2017. vol. 89. no. 3. pp. 889-1903.
- [11] Lenka B. K., Banerjee S. Sufficient conditions for asymptotic stability and stabilization of autonomous fractional order systems // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2018. vol. 56. no. 3. pp. 365-379.
- [12] Palanivel J. et al. Effect of fractional-order, time-delay and noisy parameter on slow-passage phenomenon in a nonlinear oscillator // *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018, vol. 106, pp. 35-43.
- [13] Deshpande A. S., Daftardar-Gejji V. On disappearance of chaos in fractional systems // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2017. vol. 102. pp. 119-126.
- [14] Parovik R.I. Existence and uniqueness of the Cauchy problem for the fractal nonlinear equation of the oscillator // *Uzbek Mathematical Journal*. 2017. no. 4. pp. 110-118
- [15] Паровик Р.И. Математическое моделирование нелинейных эредитарных осцилляторов. Петропавловск-Камчатский: КамГУ имени Витуса Беринга, 2017. 134 с.
- [16] Meilanov R.P., Yanpolov M.S. Features of the Phase Trajectory of a Fractal Oscillator // *Technical Physics Letters*. 2002. vol. 28(1). pp. 30-32.
- [17] Parovik R.I. Mathematical modeling of nonlocal oscillatory Duffing system with fractal friction // *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*. 2015, vol. 10, no 1, pp. 16-21.

Для цитирования: Паровик Р. И. Исследование устойчивости некоторых эредитарных динамических систем // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2018. № 2(22). С. 8-19. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-22-2-8-19

For citation: Parovik R.I. Stability of some dynamic systems heredity, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2018, **22**: 2, 8-19. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-22-2-8-19

Поступила в редакцию / Original article submitted: 20.02.2018

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-22-2-8-19

MATHEMATICS

MSC 34A08, 34K28, 37N30

STABILITY OF SOME DYNAMIC SYSTEMS HEREDITARITY ¹

R. I. Parovik^{1,2}

¹ Vitus Bering Kamchatka State University, 683032, Kamchatskiy kray, 4, Pogranichnaya Str., Russia

Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia

² Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Kamchatskiy kray, 7, Mirnaya Str., Paratunka, Russia

E-mail: romanparovik@gmail.com, parovik@ikir.ru

In the training course of the theory of differential equations, there exists a section on the investigation of the stability of systems of differential equations. If the system of differential equations consists of differential equations of integer order, then the stability theory of Lyapunov is usually used to study the stability of their rest points. However, in the case when the system of differential equations consists of differential equations of non-integer order, then it is necessary to use other methods of investigating the stability of such systems. Therefore, this article is devoted to the method of investigating the rest points of systems of differential equations of fractional order. In this paper we will investigate the stability of the rest points of the hereditary dynamical systems by the example of some fractal oscillators. Moreover, we will consider two types of hereditary dynamical systems: commensurable and incommensurate, for which the corresponding stability theorems for rest points are valid. Next, examples of applying these stability theorems to a fractal linear oscillator, the Duffing fractal oscillator, are considered. The results of the study of the stability of the rest points of the hereditary dynamical systems were confirmed by constructing phase trajectories for the fractal oscillators under consideration. This article can be useful in the study of a fairly new section in the theory of differential equations-fractional calculus.

Key words: stability, rest points, fractal oscillators, Gerasimov-Caputo operator, phase trajectories, limit cycles, stable focus.

© Parovik R. I., 2018

¹This work was supported by the grant of the President of the Russian Federation No. MK-1152.2018.1 and on the topic of the research of Vitus Bering Kamchatka State University "Application of fractional calculus in the theory of oscillatory processes" No.AAAA-A17-117031050058-9.