

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-21-1-78-92

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
УДК 51-7:519.63:519.614

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЯМЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВТОРОГО И ПЕРВОГО РОДОВ**

**И. К. Каримов<sup>1</sup>, И. К. Хужаев<sup>2</sup>, Ж. И. Хужаев<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Камчатский государственный технический университет, 683003 Россия,  
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Ключевская, 35

<sup>2</sup> Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий  
при Ташкентском университете информационных технологий имени Мухаммада  
Ал-Хорезми, 100084 Узбекистан, г. Ташкент, пр. Амира Темура, 108

E-mail: karimov\_ik@kamchatgtu.ru, i\_k\_hujayev@mail.ru, jamolhoja@mail.ru

В статье описан алгоритм решения одномерного неоднородного параболического уравнения при граничных условиях второго рода в начале и первого рода в конце отрезка. Введением сетки по координате, функций, участвующих в начальном и граничных условиях, составлено матричное уравнение относительно сеточных функций. Успехом работы является формирование фундаментальной и диагональной матриц, с помощью которых из матричного уравнения осуществляется переход к отдельным обыкновенным уравнениям относительно сеточных функций. Представлены формулы прямого и обратного перехода от искомой и вновь образованной функций. Полученные обыкновенные дифференциальные уравнения допускают точного и приближенного метода решения. Результаты полезны при решении одно- и многомерных уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов при смешанных граничных условиях второго и первого родов.

*Ключевые слова: уравнения в частных производных, метод прямых, краевые условия, аппроксимация, алгоритм, вычислительный эксперимент.*

© Каримов И. К., Хужаев И. К., Хужаев Ж. И., 2018

## Введение

Широким применением методов математического моделирования при изучении различных форм движения обусловлены формирования различных способов решения дифференциальных уравнений в частных производных [1]-[4]. Усложнения математических моделей за счет новых линейных и нелинейных факторов и обращение к многомерным задачам привели к тому, что ресурсы ПЭВМ стали недостаточными для решения практических задач. Начали разрабатывать различные экономичные методы с привлечением расщепления, методов параллельных и распределенных вычислений и других «щадящих» ресурсов ПЭВМ «ухищрения».

В рамках работы обращаемся к методу прямых, который входит в числа дифференциально-разностных методов решения уравнений математической физики [5], [6]. Метод позволяет использовать положений матричного исчисления, метода прогонки и аналитического решения обыкновенных дифференциальных уравнений по отдельно взятым независимым переменным. Сущность использования положений матричного исчисления заключается в приведении взаимосвязанных систем уравнений к автономным уравнениям относительно сеточных функций. Основной задачей его является составление вспомогательных матриц, способствующих к переходу к автономным уравнениям. Такие матрицы ранее составлены для граничных условий первого и третьего родов. Ниже они построены для смешанных граничных условий второго и первого родов в начале и конце расчетного отрезка соответственно и использованы при решении неоднородного параболического уравнения.

## Постановка задачи

В терминах теории теплопередачи в конце  $x = 0$  задана интенсивность потока тепла, приведенная к коэффициенту теплоотдачи:

$$-\frac{\partial T(0,t)}{\partial t} = q_0(t). \quad (1)$$

На втором конце отрезка задан закон изменения температуры:

$$T(l,t) = \mu_i(t). \quad (2)$$

Объектом исследования при такой постановке задачи могут быть однородный стержень длиной  $l$  со внутренними и внешними источниками тепла или масса одинаковой толщины по  $x$  и достаточно большими размерами по двум остальным координатам. Процесс описывается неоднородным уравнением параболического типа

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x,t). \quad (3)$$

Здесь  $f(x,t)$  – мощность внутренних и внешних источников тепла в сечении, приведенная по коэффициенту теплопроводности материала. Переменная  $t$  представляет произведение реального времени на коэффициент теплопроводности и имеет размерность  $m^2$ .

Начальное распределение температуры по массе задано:

$$T(x,0) = T_0(x). \quad (4)$$

Требуется построить алгоритм решения данной задачи с применением положений дифференциально-разностного метода.

## Составление матричного уравнения

Вводится равномерная сетка по координате  $x$ :

$$\omega_x = \left( x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N+1, h = \frac{l}{N+1} \right).$$

Вводятся сеточные функции искомой  $u_i(t)$ , правой части  $f_i(t)$  уравнения и граничных функций  $q_0(t)$  и  $\mu_l(t)$  для фиксированного значения  $t$ . Наша задача, в такой постановке, состоит из составления отдельных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных сеточных функций  $u_0(t), u_1(t), \dots, u_N(t)$ .

Во внутренних узлах сетки расчетной области уравнение (3) аппроксимируется в виде

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + f_i. \quad (5)$$

Реализация условия (1) произведена согласно [5]:

$$\frac{du_0}{dt} = -\frac{2}{h^2}u_0 + \frac{2}{h^2}u_1 + f_0 + \frac{2}{h}u_0. \quad (6)$$

При  $i = N$  реализуется граничное условие (2) задачи как

$$u_{N+1}(t) = \mu_l(t).$$

Дифференциально-разностные уравнения (5) и (6) с учетом последнего условия составят матричное уравнение вида [5], [6]:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{h^2}AU + F, \quad (7)$$

где  $U = [u_0, u_1, \dots, u_N]^*$ ,  $F = \left[ f_0 + \frac{2}{h}q_0, f_1, \dots, f_{N-1}, f_N + \frac{1}{h^2}\mu_l \right]^*$ ,

$$A = \|a_{p,q}\|_{N+1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{N+1}. \quad (8)$$

Как видно, индексы искомых величин и элементов матрицы меняются от 0 до  $N$ . Звездочкой обозначена операция транспонирования матриц.

## Формирование фундаментальной и диагональной матриц

Необходимо в (7) произвести видоизменения, которые позволили бы выделить отдельные уравнения относительно  $u_i(t)$ . Матрицу  $A$  представим в виде произведения [5]:

$$A = V\Lambda V^{-1},$$

где  $V$  и  $\Lambda$  – некоторые неизвестные матрицы.

Умножим это равенство на  $V^{-1}$  слева и получим

$$V^{-1}A = \Lambda V^{-1}. \tag{9}$$

Если матрица  $\Lambda$  диагональная, то по положениям линейной алгебры [7]-[9], ее элементы главной диагонали будут собственными значениями  $\lambda_s$  матрицы  $A$ , а матрица  $V^{-1} = \|v_{s,p}^-\|$  состоит из компонент  $v_{s,p}^-$  собственных векторов матрицы  $A$ . Отсюда следует, что нам необходимо найти собственные числа  $\lambda_s$  матрицы  $A$  и составить с их помощью диагональную матрицу  $\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N \}$ .

Раскрытие равенства (9) относительно собственного числа  $\lambda_s$  по элементам приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} (-2 - \lambda_s)v_{s,0}^- &= 0, \\ 2v_{s,0}^- + (-2 - \lambda_s)v_{s,1}^- + v_{s,2}^- &= 0, \\ v_{s,k-1}^- + (-2 - \lambda_s)v_{s,k}^- + v_{s,k+1}^- &= 0, \text{ если } k = 2, 3, \dots, N-1 \\ v_{s,N-1}^- + (-2 - \lambda_s)v_{s,N}^- &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Система (10) имеет  $N+2$  неизвестных:  $\lambda_s, v_{s,0}^-, \dots, v_{s,N}^-$  т.е. она незамкнута. Для того, чтобы она имела нетривиальное решение, ее определитель должен иметь нулевое значение. Этим условием

$$\tilde{D}_{N+1} = 0,$$

и замыкается система (10).

При введении обозначения  $-2 - \lambda_s = 2 \cos \theta_s$ , применимость которого доказана в [6], определитель  $\tilde{D}_{N+1}$  приобретает вид

$$\tilde{D}_{N+1} = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta_s & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 \cos \theta_s & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \theta_s & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos \theta_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \cos \theta_s \end{vmatrix}_{N+1}. \tag{11}$$

Вычислим значение данного определителя, разложив по первому столбцу, что приводит к уравнению

$$\cos \theta_s D_N - D_{N-1} = 0,$$

где

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 \cos \theta_s & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \theta_s & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \theta_s & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \cos \theta_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \cos \theta_s \end{vmatrix}_n.$$

и согласно [5],[6]  $D_n = \frac{\sin(n+1)\theta_s}{\sin \theta_s}$ .

Простые преобразования приводят уравнение к виду  $\sin(N+1)\theta_s = 0$ . Первые положительные корни уравнения при  $s = 0, 1, \dots, N$  определим в виде  $\theta_s = \frac{2s+1}{2(N+1)}\pi$ . В связи с этим формула для собственных чисел матрицы имеет вид

$$\lambda_s = -2 \left( 1 + \cos \frac{2s+1}{2(N+1)}\pi \right). \quad (12)$$

Значения  $v_{s,p}^-$  можно определить из системы (10) с точностью до постоянного множителя  $c_s$ , т.к. уравнения однородны относительно  $v_{s,p}^-$ :

$$v_{s,p}^- = c_s A_{s,p},$$

где  $A_{s,p}$  – алгебраическое дополнение 1-й строки  $p$ -го столбца определителя  $\tilde{D}_{N+1}$ , подсчитанное для  $\theta_s$ . А значение  $c_s$  можно найти из условия нормировки собственного вектора.

Данное суждение обоснуется теоремами высшей алгебры [7]-[9], что при разложении определителя по строке результат равняется нулю, если алгебраические дополнения принадлежат другой строке, и результат равняется значению определителя, если алгебраические дополнения берутся для данной строки:

$$a_{k,1}A_{s,1} + \dots + a_{k,N+1}A_{s,N+1} = \begin{cases} \tilde{D}_{N+1}, & \text{при } s = k, \\ 0, & \text{при } s \neq k. \end{cases}$$

Так как  $\tilde{D}_{N+1} = 0$ , то система уравнений (10) удовлетворяется данными значениями элементов собственных векторов.

Вычислим и упростим значения алгебраических дополнений без знаменателя для  $s, p = 0, 1, \dots, N$ :

$$A'_{s,p} = (-1)^{s+p} \begin{cases} 1, & \text{при } p = 0, \\ 2 \cos \theta_s, & \text{при } p > 0. \end{cases}$$

Из условия нормированности составляющих собственного вектора  $c_s^2 \sum_{p=0}^N (A'_{s,p})^2 = 1$  находим

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{2N+1}}.$$

С учетом этого для  $s = 0, 1, \dots, N$  имеем

$$v_{s,p}^- = \frac{(-1)^{s+p}}{\sqrt{2N+1}} \begin{cases} 1, & \text{при } p = 0, \\ 2 \cos p\theta_s, & \text{при } 0 < p \leq N. \end{cases}$$

Верность полученных результатов доказали подстановкой полученных элементов собственного вектора и чисел в уравнения системы (10).

Значения элементов матрицы  $V$ , обратной к матрице  $V^{-1}$ , находили, используя метод Гаусса с выбором главного элемента по [9]. Результаты обращения матрицы проверялись вычислениями  $V^{-1}V$  и  $VLV^{-1}$ , которые должны давать матрицы  $E$  и  $A$  соответственно.

## Переход к автономным уравнениям относительно сеточных функций

Умножим обе части уравнения (7) на  $V^{-1}$  слева. С учетом коммутативности операций дифференцирования и умножения матриц, получим

$$\frac{d(V^{-1}U)}{dt} = \frac{1}{h^2}V^{-1}AU + V^{-1}F.$$

Поскольку  $A = V\Lambda V^{-1}$ , то

$$V^{-1}AU = V^{-1}(V\Lambda V^{-1})U = (V^{-1}V)\Lambda(V^{-1}U) = \Lambda(V^{-1}U) = \Lambda\bar{U},$$

где

$$\bar{U} = V^{-1}U = \left[ \sum_{p=0}^N v_{0,p}^- u_p, \sum_{p=0}^N v_{1,p}^- u_p, \dots, \sum_{p=0}^N v_{N,p}^- u_p \right]^* = [\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N]^*. \quad (13)$$

Тогда уравнение приобретает вид

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{1}{h^2}\Lambda\bar{U} + \bar{F}, \quad (14)$$

$$\bar{F} = V^{-1}F = \left[ \sum_{p=0}^N v_{0,p}^- F_p, \sum_{p=0}^N v_{1,p}^- F_p, \dots, \sum_{p=0}^N v_{N,p}^- F_p \right]^* = [\bar{f}_0, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_N]^*,$$

а  $F_p$  – это  $p$ -ый элемент вектор-столбца  $F$ .

Поскольку матрица  $\Lambda$  диагональная, то (14) распадается на отдельные обыкновенные дифференциальные уравнения относительно  $\bar{u}_i$ :

$$\frac{d\bar{u}_i}{dt} = \frac{\lambda_i}{h^2}\bar{u}_i + \bar{f}_i. \quad (15)$$

Необходимые начальные условия  $\bar{u}_i^0$  при  $i = 0, \dots, N$  вычисляются как:

$$\bar{u}_i^0 = \sum_{p=0}^N v_{i,p}^- u_p^0,$$

где значения  $u_p^0 = T_0(ph)$  берутся согласно начальному условию (4).

Обратный переход от  $\bar{u}_i^n$  к  $u_i^n$  осуществляется по формуле  $u_i^n = \sum_{p=0}^N v_{i,p}^- \bar{u}_p^n$ , поскольку  $U = V\bar{U}$ .

## Решение автономных уравнений

Преимущество дифференциально-разностного метода заключается в том, что образованные отдельные дифференциальные уравнения (15) можно решить аналитическим путем. В частности, если функция  $f(x,t)$  в правой части уравнения имеет не зависящее от времени значение, для решения уравнения (15) можно использовать следующий способ.

Введением замены  $w_i = \bar{u}_i + \frac{h^2}{\lambda_i}\bar{f}_i$  уравнению (15) придается вид

$$\frac{dw_i}{w_i} = \frac{\lambda_i}{h^2} dt,$$

интегрирование которого от  $t_{n-1}$  до  $t_n$  дает:

$$\ln \frac{w_i^n}{w_i^{n+1}} = \frac{\lambda_i}{h^2} \tau_n,$$

где  $\tau_n = t_n - t_{n-1}$  – постоянное или переменное значение  $n$ -го шага «времени»  $t$ , значение которого выбирается согласно интервалу изменения значений функций  $\bar{f}_i^{n+1}$ ,  $\mu_l(t)$  и  $q_0(t)$ , а также их производных.

От логарифмов в решении переходим к зависимости  $w_i^n = w_i^{n-1} \exp \left\{ \frac{\lambda_i}{h^2} \tau_n \right\}$ , подстановка в которую выражения для  $w_i$  дает возможность записать рекуррентную зависимость

$$\bar{u}_i^n = -\frac{h^2}{\lambda_i} \bar{f}_i^n + \left( \bar{u}_i^{n-1} + \frac{h^2}{\lambda_i} \bar{f}_i^n \right) \exp \left\{ \frac{\lambda_i}{h^2} \tau_n \right\},$$

Если правая часть уравнения  $f(x, t)$  зависит от времени, то уравнение (15) можно представить в виде:

$$d \left( \bar{u}_i \exp \left\{ -\frac{\lambda_i}{h^2} t \right\} \right) = \bar{f}_i \exp \left\{ -\frac{\lambda_i}{h^2} t \right\} dt,$$

интегрирование которого от  $t_{n-1}$  до  $t_n$  дает рекуррентную зависимость для искомой функции:

$$\bar{u}_i^n = \bar{u}_i^{n-1} \exp \left\{ \frac{\lambda_i}{h^2} \tau_n \right\} + \exp \left\{ \frac{\lambda_i}{h^2} t_n \right\} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \bar{f}_i(t) \exp \left\{ -\frac{\lambda_i}{h^2} t \right\} dt.$$

## Программное обеспечение задачи

По представленному материалу составлена программа для изучения динамики термического состояния однородного стержня при реализации граничных условий второго рода при  $x = 0$  и первого рода при  $x = l$ .

Программа состоит из частей описания скалярных, векторных и матричных величин, ввода исходных данных, формирования и проверки матриц  $V$ ,  $\Lambda$ ,  $V^{-1}$ , формирования начального условия для  $\bar{u}_i^0$ , вычислений в цикле по времени и условной печати.

В цикле по  $n$  формировали граничные условия и свободные члены для  $u_i^{n-1}$  и  $\bar{u}_i^{n-1}$ , а также вычисляли значения  $u_0^n$  и  $\bar{u}_0^n$ . В части условной печати программы через заданные шаги по времени осуществляли переход к  $u_i^n$  и сохраняли значения времени и  $u_i^n$  для дальнейшей визуализации и анализа результатов.

Достоверность определенных значений элементов диагональной и фундаментальной матриц проверяли для случая  $N = 9$  ( $h = 0.1$  м). При этом элементы диагональной матрицы, соответствующие собственным значениям трехдиагональной матрицы  $A$ , составили последовательность  $-3.9754$ ,  $-3.782$ ,  $-3.4142$ ,  $-2.9080$ ,  $-1.6871$ ,  $-1.092$ ,  $-0.5858$ ,  $-0.2180$  и  $-0.0246$ . Соответствующие этим собственным значениям элементы  $V^{-1}$  – собственных векторов матрицы представлены построчно в следующей табл. 1. Составленная по методу Гаусса фундаментальная матрица  $V$  приведена на следующей табл. 2.

Таблица 1

**Значение элементов  $v_{s,p}^-$  собственных векторов матрицы  $A$  при  $N = 9$**

s \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.2294	-0.4532	0.4364	-0.4088	0.3712	-0.3244	0.2697	-0.2083	0.1418	-0.0718
1	-0.2294	0.4088	-0.2697	0.0718	0.1418	-0.3244	0.4364	-0.4532	0.3712	-0.2083
2	0.2294	-0.3244	0	0.3244	-0.4588	0.3244	0	-0.3244	0.4588	-0.3244
3	-0.2294	0.2083	0.2697	-0.4532	0.1418	0.3244	-0.4364	0.0718	0.3712	-0.4088
4	0.2294	-0.0718	-0.4364	0.2083	0.3712	-0.3244	-0.2697	0.4088	0.1418	-0.4532
5	-0.2294	-0.0718	0.4364	0.2083	-0.3712	-0.3244	0.2697	0.4088	-0.1418	-0.4532
6	0.2294	0.2083	-0.2697	-0.4532	-0.1418	0.3244	0.4364	0.0718	-0.3712	-0.4088
7	-0.2294	-0.3244	0	0.3244	0.4588	0.3244	0	-0.3244	-0.4588	-0.3244
8	0.2294	0.4088	0.2697	0.0718	-0.1418	-0.3244	-0.4364	-0.4532	-0.3712	-0.2083
9	-0.2294	-0.4532	-0.4364	-0.4088	-0.3712	-0.3244	-0.2697	-0.2083	-0.1418	-0.0718

Произведения матриц  $VV^{-1}$  и  $V^{-1}V$ , при отбрасывании нулей в первых восьми разрядах после десятичной запятой, составили единичную матрицу. Проверка выполнения равенства  $A = V\Lambda V^{-1}$  привела к результату из  $-2, 0, 1$  и  $2$  с нулями в первых восьми разрядах. Пробные расчеты проводились при  $f(x,t) = 0$  для граничных условий  $q_l(t) = Q_0 = \text{const}$ ,  $\mu_l(t) = U_0 = \text{const}$  и начального условия  $T(x,0) = \varphi(x)$ .

Таблица 2

**Элементы  $v_{s,p}$  фундаментальной матрицы  $V$  при  $N = 9$ .**

s \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.4359	-0.4359	0.4359	-0.4359	0.4359	-0.4359	0.4359	-0.4359	0.4359	-0.4359
1	-0.4305	0.3884	-0.3082	0.1979	-0.0682	-0.0682	0.1979	-0.3082	0.3884	-0.4305
2	0.4146	-0.2562	0	0.2562	-0.4146	0.4146	-0.2562	0	0.2562	-0.4146
3	-0.3884	0.0682	0.3082	-0.4305	0.1979	0.1979	-0.4305	0.3082	0.0682	-0.3884
4	0.3526	0.1347	-0.4359	0.1347	0.3526	-0.3526	-0.1347	0.4359	-0.1347	-0.3526
5	-0.3082	-0.3082	0.3082	0.3082	-0.3082	-0.3082	0.3082	0.3082	-0.3082	-0.3082
6	0.2562	0.4146	0	-0.4146	-0.2562	0.2562	0.4146	0	-0.4146	-0.2562
7	-0.1979	-0.4305	-0.3082	0.0682	0.3884	0.3884	0.0682	-0.3082	-0.4305	-0.1979
8	0.1347	0.3526	0.4359	0.3526	0.1347	-0.1347	-0.3526	-0.4359	-0.3526	-0.1347
9	-0.0682	-0.1979	-0.3082	-0.3884	-0.4305	-0.4305	-0.3884	-0.3082	-0.1979	-0.0682

При такой постановке решение уравнения (3), полученное методом разделения переменных [10], составило

$$T(x,t) = (l-x)Q_0 + U_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{l} b_m - \frac{8l}{\pi^2(2l-1)^2} Q_0 + \frac{4(-1)^m}{\pi(2m-1)} U_0 \right] \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{(2m-1)^2 \pi^2}{4l^2} t \right\} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{2l}.$$



Проверка показывает, что при  $t = 0$  в решении остается только  $\varphi(x)$ , а при  $x = l$  только  $U_0$ . Этим доказывается верность полученного аналитического решения. Расчеты проводились для 51 расчетного равноотстоящего узла по длине  $l$ . Шаг по «времени» при численном решении составлял  $10^{-3}$  м<sup>2</sup>, а при реализации аналитического решения – 0.02 м<sup>2</sup>. При численном решении через каждые 20 шагов по времени осуществляли переход к исходной функции и данные записывали в новом файле.

Сравнения результатов показали, что при малых «временах» результаты аналитического и численного решений совпадают в рамках точности графического представления.

## Результаты вычислительного эксперимента

На рис. 1 в расчетной плоскости  $(t, x)$  представлены изменения температурного поля однородного стержня при начальной температуре 10°С. С момента  $t = 0$  на границе  $x = l$  сохраняли одинаковую температуру 20°С.

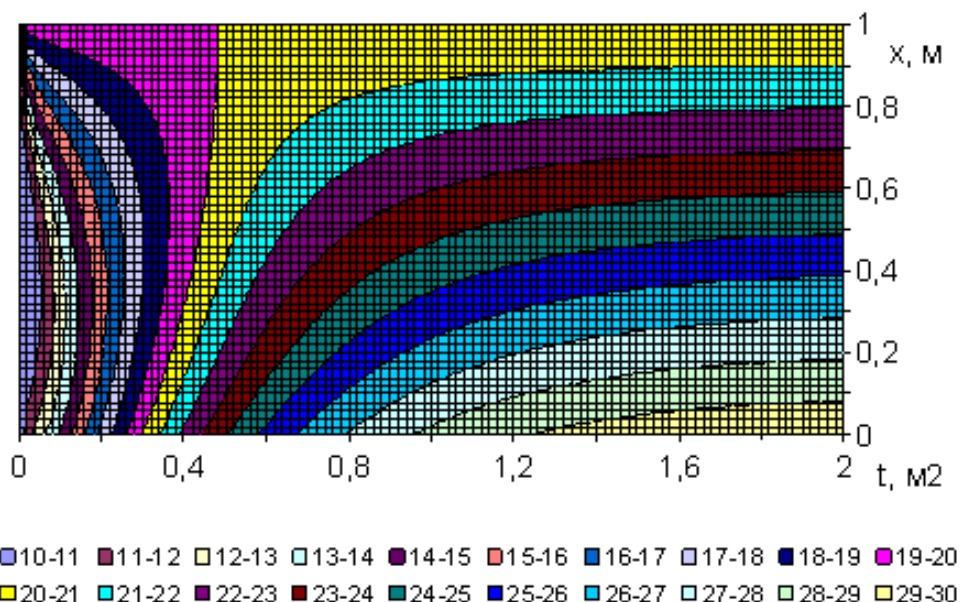


Рис. 1. Изменение температурного поля однородного стержня по  $t$ :  $l = 1$  м,  $N = 50$ ,  $\tau = 0.001$  м<sup>2</sup>,  $T_0(x) = 10^\circ$  С,  $q_0(t) = 10^\circ$  С/м,  $T(l, t) = 20^\circ$  С,  $f(x, t) = 0^\circ$  С/м<sup>2</sup>

Скачкообразное изменение температуры на границе  $x = l$  в рамках 10°С сохранялось до «времени» 0.4 м<sup>2</sup>. Пучок кривых изотерм, образованный в точке  $(0, l)$ , демонстрирует скачкообразное изменение температуры от 10°С до 20°С в этой точке. До  $t = 0.4$  м<sup>2</sup> кривые температуры имеют локальные минимумы, поэтому изотермы имеют выпуклую справа форму. После  $t = 0.4$  м<sup>2</sup> устанавливается монотонно убывающая по координате температура.

На границе  $x = 0$  наблюдается монотонное возрастание температуры – сначала интенсивно, потом все меньше и меньше – за счет постоянного подвода тепла. При  $t = 0.4$  м<sup>2</sup> на этой границе достигается 20°С. В связи с этим снизу вверх проникают полосы высокой температуры.

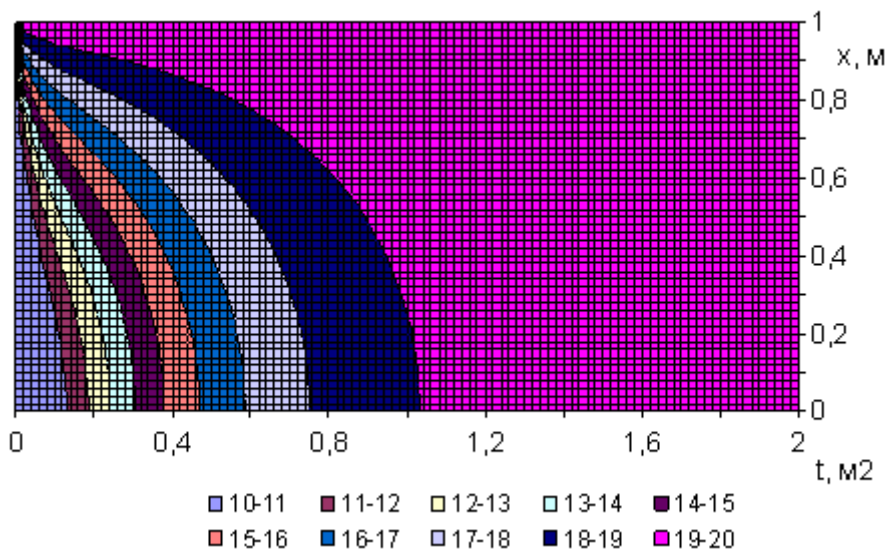


Рис. 2. Изменение температурного поля однородного стержня по  $t$ :  $q_0(t) = 0^\circ \text{C/м}$ .  
Остальные данные см. рис. 1

На рис. 2 представлены результаты варианта скачкообразного изменения температуры от  $10^\circ\text{C}$  до  $20^\circ\text{C}$  при  $t = 0$  на границе  $x = 0$ , а другой конец стержня теплоизолирован:  $q_0(t) = 0^\circ \text{C/м}$ . Изотермы получились  $s$ -образными. Притом, в конце кривых со стороны  $x = 0$  кривые перпендикулярны координатной прямой  $x = 0$ , что соответствует природе теплоизоляции.

По координатной прямой  $x = 0$  температура растет постепенно, но медленно чем на рис. 1. При  $t = 2.0 \text{ м}^2$  по длине стержня устанавливается практически линейное распределение температуры.

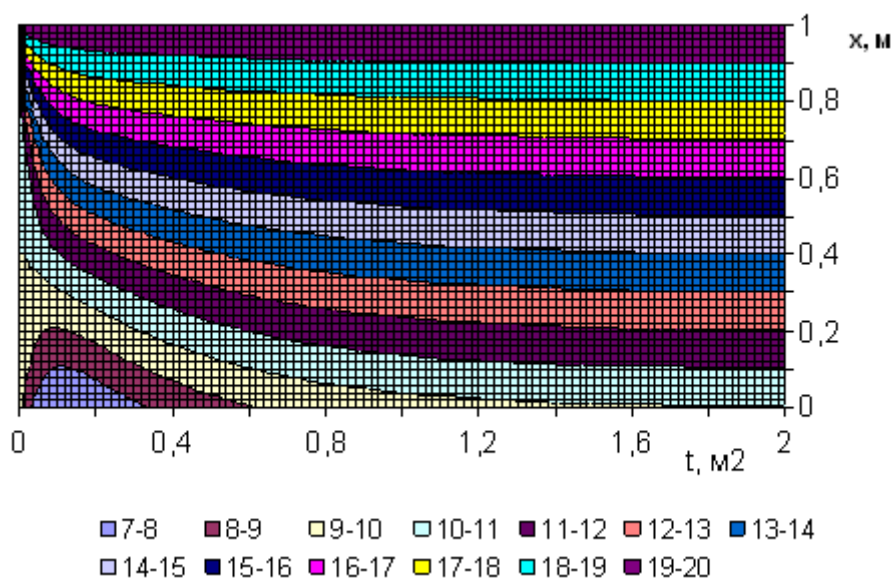


Рис. 3. Изменение температурного поля однородного стержня по  $t$ :  $q_0(t) = -10^\circ \text{C/м}$ .  
Остальные данные см. рис. 1

На рис. 3 представлены результаты варианта, когда через конец  $x = 0$  осуществляется отбор тепла с интенсивностью  $q_0(t) = -10^\circ \text{C}/\text{м}$ . В начальный момент в этом конце также образуется пучок изотерм, но с меньшей чем в начальной температуры. Поэтому температура по координатной прямой  $x = 0$  сначала убывает до  $7^\circ \text{C}$ , а дальше растет, достигая в конце расчетного времени  $10^\circ \text{C}$ . В это время достигается также равномерное возрастание температуры по длине стержня. Т.е. процесс практически устанавливается – дальнейшее изменение температурного поля будет незначительным.

Преимущество численного метода решения задач заключается в том, что не налагаются какие-нибудь ограничения к формированию правой части уравнения, граничным условиям или начальному распределению температуры. При численном решении эти данные можно задавать в табличной форме. Например, наличие точечного стока или источника тепла в области расчета, как это сделано при формировании следующей задачи, пришлось бы использовать дельта-функцию Дирака, а точное аналитическое решение задачи занимало бы огромное количество страниц, т.к. пришлось бы разлагать решения и дельта-функцию Дирака в ряд. Но при численном решении задачи это осуществляется легко и на рис. 4 представлены результаты для случая  $q_0(t) = 10^\circ \text{C}/\text{м}$  и

$$f(x,t) = \begin{cases} 10^\circ \text{C}/\text{м}^2, & \text{при } x = 0.3 \text{ м}, \\ -10^\circ \text{C}/\text{м}^2, & \text{при } x = 0.7 \text{ м}, \\ 0^\circ \text{C}/\text{м}^2, & \text{при } x \neq 0.3 \text{ м и } x \neq 0.7 \text{ м}. \end{cases}$$

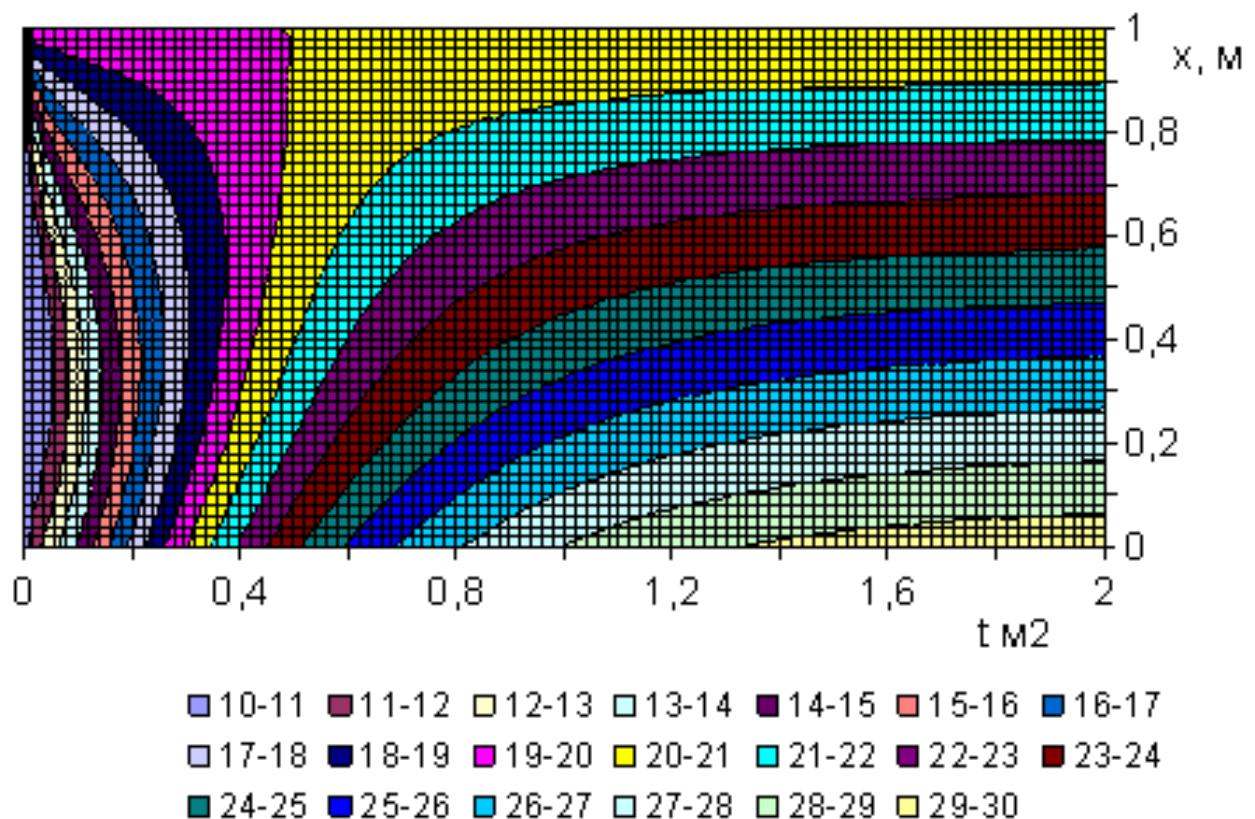


Рис. 4. Изменение температурного поля однородного стержня по  $t$ :  $q_0(t) = 10^\circ \text{C}/\text{м}$ ,  $f(0.3,t) = 10^\circ \text{C}/\text{м}^2$ ,  $f(0.7,t) = -10^\circ \text{C}/\text{м}^2$ . Остальные данные см. рис. 1

Картина получилась аналогичной, представленной на рис. 1. Причиной тому является, по-видимому, малые значения интенсивностей отбора и подвода тепла в отдельных узлах (с учетом деления исходного уравнения на коэффициент температуропроводности).

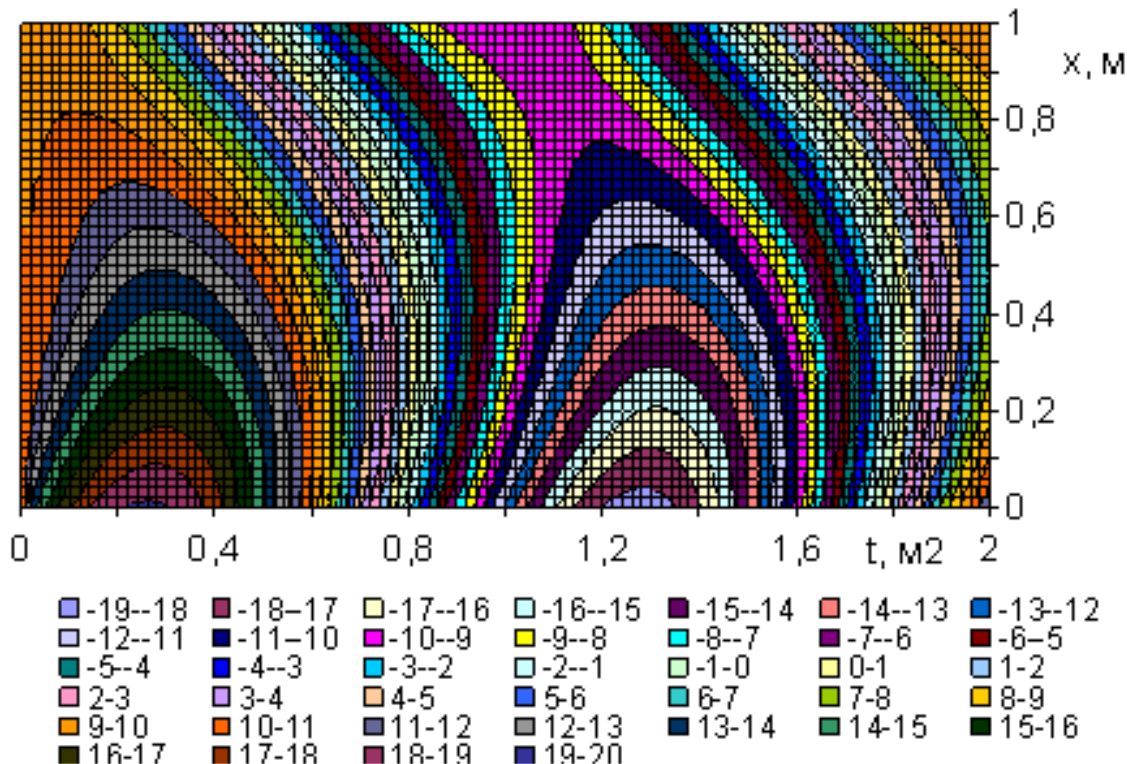


Рис. 5. Изменение температурного поля однородного стержня по  $t$ :  $q_0(t) = 40\cos\pi t$  C/м,  $\mu_l(t) = 10\cos\pi t$ . Остальные данные см. рис. 1

На рис. 5 представлены изотермы в расчетной плоскости  $(t,x)$ , полученные при  $q_0(t) = (40\cos\pi t)$  C/м и  $\mu_l(t) = 10\cos\pi t$ . Концы изотерм, принадлежащие интервалу температуры  $(-10; 10)$ , находятся на двух граничных прямых  $x = 0$  и  $x = l$ . Остальные изотермы начинаются и кончаются на координатной прямой  $x = 0$ . При  $x = 0$  и  $x = l$  температура проходит полный цикл, характерный функции косинус: убывает, возрастает и начинает убывать.

### Заключение

В рамках данной статьи продемонстрированы особенности дифференциально-разностного метода решения параболического уравнения. Основным результатом работы является то, что аналитическим путем определены собственные числа и векторы матрицы перехода  $A$  для граничных условий второго и первого родов при  $x = 0$  и  $x = l$  соответственно.

Их можно использовать при решении одно- и многомерных задач теплопередачи, фильтрации, теории упругости и др.

## References

- [1] Самарский А. А., *Теория разностных схем*, Наука, М., 1977, 656 с. [SamarSKIY A. A., *Teoriya raznostnykh skhem*, Nauka, Moscow, 1977, 656 pp.]
- [2] Самарский А. А., Вабищевич П. Н., *Вычислительная теплопередача*, Едиториал УРСС, М., 2003, 784 с. [SamarSKIY A. A., Vabishchevich P. N., *Vychislitel'naya teploperedacha*, Editorial URSS, Moscow, 2003, 784 pp.]
- [3] Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А., *Численное моделирование процессов тепло- и массообмена*, Наука, М., 1984, 288 с. [Paskonov V. M., Polezhaev V. I., Chudov L. A., *Chislennoe modelirovanie protsessov teplo- i massoobmena*, Nauka, Moscow, 1984, 288 s. pp.]
- [4] Марчук Г. И., *Методы вычислительной математики*, Наука, М., 1977, 456 с. [Marchuk G. I., *Metody vychislitel'noy matematiki*, Moscow, Nauka, 1977, 456 pp.]
- [5] Каримбердиева С., *Численные методы решения дифференциально-разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре*, Фан, Ташкент, 1983, 112 с. [Karimberdieva S., *Chislennyye metody resheniya differentsial'no-raznostnykh uravneniy v parallelepипеде, share i tsilindre*, Fan, Tashkent, 1983, 112 pp.]
- [6] Фаддеева В. Н., “Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам”, *Труды МИ АН СССР*, **28** (1949), 73–103. [Faddeeva V. N., “Metod pryamykh v primenenii k nekotorym kraevym zadacham”, *Trudy MI AN SSSR*, **28** (1949), 73–103].
- [7] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н., *Вычислительные методы линейной алгебры*, Физматгиз, М., 1963, 472 с. [Faddeev D. K., Faddeeva V. N., *Vychislitel'nyye metody lineynoy algebrы*, Fizmatgiz, Moscow, 1963, 472 pp.]
- [8] Гельфанд И. М., *Лекции по линейной алгебре*, Наука, М., 1971, 272 с. [Gel'fand I. M., *Lektsii po lineynoy algebre*, Nauka, Moscow, 1971, 272 pp.]
- [9] Копчёнова Н. В., Марон И. А., *Вычислительная математика в примерах и задачах*, Наука, М., 1972, 368 с. [Kopchenova N. V., Maron I. A., *Vychislitel'naya matematika v primerakh i zadachakh*, Nauka, Moscow, 1972, 368 pp.]
- [10] БудаК Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н., *Сборник задач по математической физике*, Наука, М., 1972, 688 с. [Budak B. M., SamarSKIY A. A., Tikhonov A. N., *Sbornik zadach po matematicheskoy fizike*, Nauka, Moscow, 1972, 688 pp.]

## References (GOST)

- [1] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
- [2] Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
- [3] Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
- [4] Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 456 с.
- [5] Каримбердиева С. Численные методы решения дифференциально-разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре. Ташкент: Фан, 1983. 112 с.
- [6] Фаддеева В. Н. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Тр. МИ АН СССР, 1949. Т. 28. С. 73-103.
- [7] Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963.
- [8] Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре (изд. 4-е дополн.). М.: Наука, 1971. 272 с.
- [9] Копчёнова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука, 1972. 368 с.
- [10] БудаК Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972. 688 с.

**Для цитирования:** Каримов И. К., Хужаев И. К., Хужаев Ж. И. Применение метода прямых при решении одномерного уравнения параболического типа при граничных условиях первого и второго родов // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2018. № 1(21). С. 78-92. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-21-1-78-92

**For citation:** Karimov I. K., Khujaev I. Q., Khujaev J. I. Application of the method of lines for solving one-dimensional equation of parabolic type under the boudary conditions of the second and firs genera, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **21**: 1, 78-92. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-21-1-78-92

Поступила в редакцию / Original article submitted: 30.11.2017

В окончательном варианте / Revision submitted: 30.01.2018

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-21-1-78-92

INFORMATION AND COMPUTER TECHNOLOGIES

MSC 35K10

## **APPLICATION OF THE METHOD OF LINES FOR SOLVING ONE-DIMENSIONAL EQUATION OF PARABOLIC TYPE UNDER THE BOUBOUNDARY CONDITIONS OF THE SECOND AND FIRS GENERA**

**I. K. Karimov<sup>1</sup>, I. Q. Khujaev<sup>2</sup>, J. I. Khujaev<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> Kamchatka State Technical University, 683003 35, Klyuchevskaya Str., Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia

<sup>2</sup> Science and innovation center for information and communication technologies under Tashkent university of information technologies named after Muhammad Al-Khwarizmi, 100084 108, Amir Temur Str., Tashkent, Uzbekistan

E-mail: karimov\_ik@kamchatgtu.ru, i\_k\_hujayev@mail.ru, jamolhoja@mail.ru

In the article an algorithm for solving a one-dimensional inhomogeneous parabolic equation is described under boundary conditions of the second kind at the beginning and of the first kind at the end of the interval. By introduction of a grid with respect to the coordinate of the functions involved in the initial and boundary conditions, a matrix equation is built with respect to the grid function. The success of the work is the formation of fundamental and diagonal matrices, with the help of which a transition to individual ordinary equations with respect to the grid functions is carried out from the matrix equation. Formulas for the direct and inverse transition from the desired and newly formed functions are presented. The obtained ordinary differential equations admit an exact and approximate method of solution. The results are useful in solving one and many-dimensional equations of parabolic, elliptic and hyperbolic types under mixed boundary conditions of the second and first genera.

*Key words: partial differential equation, method of lines, boundary conditions, approximation, algorithm, computational experiment.*

© Karimov I. K., Khujaev I. Q., Khujaev J. I., 2018