

DOI: 10.18454/2079-6641-2017-20-4-76-82

ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ПОЛЯ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

УДК 517.958:537.84

**ИНВЕРСИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ СО
СТОХАСТИЧЕСКИМИ $\alpha\Omega$ -ГЕНЕРАТОРАМИ**

Г.М. Водинчар^{1, 2}, А.Н. Годомская¹, О.В. Шереметьева^{1, 2}

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

² Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский край, ул. Пограничная, 4

E-mail: gvodinchar@ikir.ru, anna_antonenko@mail.ru, olga.v.sheremetyeva@gmail.com

В работе исследуется вопрос о возможности возникновения инверсий в рамках мало-модовой модели $\alpha\Omega$ -динамо с флуктуирующими интенсивностями α - и Ω -генераторов. Определены режимы генерации магнитного поля и построен фазовый портрет в плоскости параметров Re_m , R_α .

Ключевые слова: крупномасштабная модель динамо, $\alpha\Omega$ -динамо, магнитное поле, инверсии.

© Водинчар Г.М., Годомская А.Н., Шереметьева О.В., 2017

GEOPHYSICAL FIELDS AND THEIR INTERACTION

MSC 65N80

**REVERSAL OF MAGNETIC FIELD IN THE DYNAMIC SYSTEM
WITH STOCHASTIC $\alpha\Omega$ -GENERATORS**

G.M. Vodinchar^{1, 2}, A.N. Godomskaya¹, O.V. Sheremetyeva^{1, 2}

¹ Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

² Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: gvodinchar@ikir.ru, anna_antonenko@mail.ru, olga.v.sheremetyeva@gmail.com

In the paper investigates the question of the possibility of a reversal in the framework of low-mode model, $\alpha\Omega$ -dynamo with fluctuating intensities of α - and Ω -generators. The regimes of generating a magnetic field are determined and the phase portrait is constructed in the parameter plane Re_m , R_α .

Key words: $\alpha\Omega$ -dynamo, magnetic field, reversal, large-scale dynamo.

© Vodinchar G.M., Godomskaya A.N., Sheremetyeva O.V., 2017

Введение

Свойством динамо систем является наличие инверсии без существенной перестройки движения проводящей среды. В реальных системах такие инверсии носят как регулярный характер, так и хаотический [2]. При сильном дифференциальном вращении генерацию магнитного поля описывают с помощью $\alpha\Omega$ -динамо [1]. В данной работе инверсии магнитного поля моделируются в простой динамической модели $\alpha\Omega$ -динамо с флуктуирующими интенсивностями α - и Ω -генераторов. Источниками этих флуктуаций является результат синхронизации высших отброшенных мод поля скорости и магнитного поля [4].

Основной целью работы в рамках принятой модели $\alpha\Omega$ -динамо является получение решений системы магнитогидродинамического типа в сферическом слое с флуктуирующими интенсивностями α - и Ω -генераторов, при которых возникают различные режимы генерации магнитного поля в случае относительного постоянства поля скорости.

Постановка задачи

В модели $\alpha\Omega$ -динамо предполагаем аксиальную симметричность поля скорости \mathbf{v} и магнитного поля \mathbf{B} в сферической оболочке вязкой несжимаемой жидкости, вращающейся вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью Ω . Считаем, что поле скорости вязкой жидкости \mathbf{v} нулевое на внутренней $r = r_1$ и внешней $r = r_2$ сферических границах оболочки (граничные условия прилипания), магнитная проницаемость внутреннего и внешнего ядра одинаковы, среда вне ядра ($r > r_2$) не проводящая (принимаются вакуумные граничные условия на внешней границе и условия ограниченности в центре Земли). Полагаем, что среднее течение $\bar{\mathbf{v}}$ носит характер дифференциального вращения, которому соответствуют моды $\mathbf{v}_{k,1,0}^T$ из линейной оболочки $\{\mathbf{v}_{k_1,1,0}^T, \mathbf{v}_{k_2,2,0}^P, \mathbf{v}_{k_3,3,0}^T, \mathbf{v}_{k_4,4,0}^P, \dots\}$ инвариантной относительно кориолисова сноса. Любая такая мода порождает остальные по цепочке [5]. Аппроксимируем скорость следующей комбинацией:

$$\mathbf{v} = u(t)\mathbf{v}_0 = u(t)(\alpha_1\mathbf{v}_{0,1,0}^T + \alpha_2\mathbf{v}_{0,2,0}^P + \alpha_3\mathbf{v}_{0,3,0}^T + \alpha_{11}\mathbf{v}_{1,1,0}^T + \alpha_{13}\mathbf{v}_{1,3,0}^T), \quad (1)$$

где \mathbf{v}_0 – мода Пуанкаре, $|\mathbf{v}_0| = 1$, $u(t)$ – амплитуда скорости, компоненты поля скорости считаются независимыми от времени. Магнитное поле представляется минимальным количеством низших собственных мод $\mathbf{B}_{0,1,0}^P, \mathbf{B}_{0,2,0}^T, \mathbf{B}_{0,3,0}^P$, достаточных для получения осциллирующего динамо [3]

$$\mathbf{B} = B_2^T(t)\mathbf{B}_{0,2,0}^T(\mathbf{r}) + B_1^P(t)\mathbf{B}_{0,1,0}^P(\mathbf{r}) + B_3^P(t)\mathbf{B}_{0,3,0}^P(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где компоненты магнитного поля считаются независимыми от времени и составляющая $\mathbf{B}_{0,1,0}^P(\mathbf{r})$ является дипольной, $B_i^j(t)$ – амплитуды компонент магнитного поля.

Физические параметры жидкости считаем неизменными, турбулентность в ядре изотропной и используем скалярную параметризацию α -эффекта в виде функции $\alpha(r, \theta) = \alpha(r)\cos\theta$, где $\max|\alpha(r, \theta)| = 1$. Мы использовали два варианта вида радиальной части α -эффекта $\alpha(r)$: $\alpha(r) = \text{const}$, $\alpha(r) = -\sin(\pi(r - r_1))$.

Подставим разложения (1) и (2) в магнитогидродинамическую систему с введённым механизмом алгебраического подавления α -эффекта и осцилляции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + Re_m(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} &= P_m\Delta\mathbf{v} - \nabla P - E^{-1}P_m(\mathbf{e}_z \times \mathbf{v}) + (1 + \zeta(t))\mathbf{f}_{out} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= Re_m[\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] + \Delta\mathbf{B} + R_\alpha \frac{1+\xi(t)}{1+|\mathbf{B}|} [\nabla \times (\alpha(r, \theta)\mathbf{B})], \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}_1) = \mathbf{v}(\mathbf{r}_2) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ – стохастические процессы с нулевым средним. Эти процессы моделируют спонтанно возникающее и исчезающее когерентное влияние отброшенных высших мод поля скорости и магнитного поля. Структура процессов определялась также, как в работе [3], а именно, на оси времени задаётся случайная последовательность точек $0 < \tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < \dots < \tau_k < \theta_k < \dots$. Считаем, что k -ая по счету когерентная структура образуется в момент τ_k и разрушается в момент θ_k . Тогда $T_k^{est} = \tau_k - \theta_{k-1}$ – время ожидания формирования очередной структуры, а $T_k = \theta_k - \tau_k$ – время ее существования. В течение времени ожидания T_k^{est} процессы $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ – нулевые, а в течение времени существования $\zeta(t) = \zeta_k$ и $\xi(t) = \xi_k$, где ζ_k и ξ_k – независимые случайные величины с нулевым средним, равномерно распределённые на отрезках $[-0.01; 0.01]$ и $[-0.1; 0.1]$, соответственно. При моделировании использовался показательный закон распределения для времен ожидания T_k^{est} и существования T_k , причем сами эти величины были независимыми. Средние значения $\langle T_k^{est} \rangle = 5$ и $\langle T_k \rangle = 30$, т. е. характерное время существования когерентных структур значительно меньше времени их ожидания.

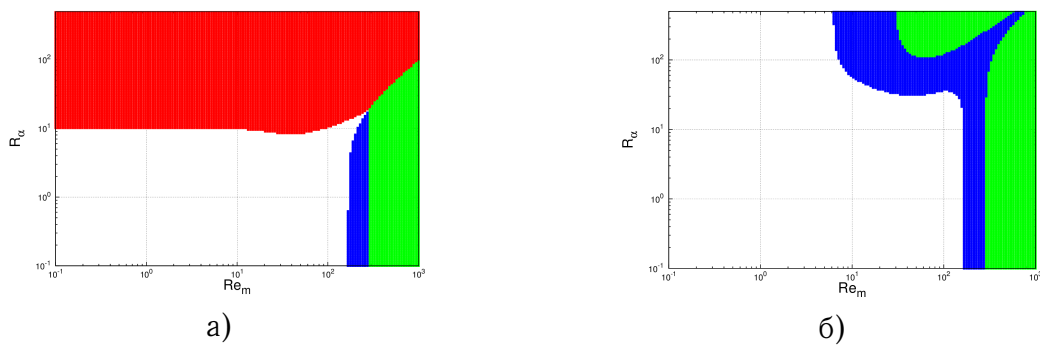


Рис. 1. Характер генерации магнитного поля в зависимости от параметров R_α (турбулентный генератор) и Re_m (крупномасштабный генератор). α -эффект задается функциями а) $\alpha(r) = const$, б) $\alpha(r) = -\sin(\pi(r - r_1))$. Белая область – магнитное поле затухает без осцилляций, зелёная – генерация поля с нарастающими осцилляциями, синяя – с затухающими осцилляциями, красная – генерация поля без осцилляций.

Применим к системе (3) метод Галёркина и получим систему следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -P_m u(t) \sum_k \alpha_k^2 \lambda_k + (1 + \zeta(t)) f_{out} + \sum_{i,j,k} \alpha_i L_{ijk} B_j B_k, \\ \frac{\partial B_i}{\partial t} &= Re_m u(t) \sum_k \alpha_j W_{ijk} B_k - \mu_i B_i + R_\alpha \frac{1+\xi(t)}{1+\sum_k B_k} \sum_k W_{ik}^\alpha B_k, \end{aligned} \quad (4)$$

где Re — число Рейнольдса, Re_m — магнитное число Рейнольдса, R_α — амплитуда α -эффекта, f_{out} — внешняя сила, μ_i — коэффициент вязкой диссипации, λ_i — собственные значения моды Пуанкаре. Коэффициенты $L_{ijk}, W_{ijk}, W_{ij}^\alpha$ — это объёмные интегралы от рассматриваемых полей.

На рис. 1 изображены области осциллирующего и неосциллирующего динамо для используемых в работе видов задания α -эффекта при рассмотрении модели (4) в линейном приближении без использования подавления α -эффекта и осцилляций и без включения случайных процессов $\zeta(t)$ и $\xi(t)$.

Далее проведём численное исследование режимов динамо в окрестности точки бифуркации (Re_m, R_α) , выбираемой в зависимости от используемого вида задания α -эффекта. В данном случае при фиксированном значении α -эффекта на границе двух областей возможен переход из режима затухающих осцилляций к генерации поля с незатухающими осцилляциями и обратно за счёт воздействия крупномасштабного генератора, которое в данной модели обеспечивается числом Рейнольдса, являющегося аналогом среднеквадратического значения скорости. В случаях включения меньшего количества мод в разложение магнитного поля инверсии либо отсутствуют, либо магнитное поле быстро затухает.

Результаты численного моделирования

Первоначально вычислительные эксперименты с моделью (4) проводились в окрестности точки бифуркации (Re_m, R_α) , где $Re_m \in [10; 1000]$ и $R_\alpha \in [1; 100]$, для принятых начальных условий $u(0) = 1, B_2^T = 0, B_1^P = 0, B_3^T = 0, f_{out} = 1$, случайные величины ζ_k и ξ_k исключили из модели, т. е. приняли равными нулю.

В результате получили следующие режимы динамо: квазипериодические с перебросами и с отсутствием перебросов, затухание поля с осцилляциями и без осцилляций. Увеличение собственного значения моды Пуанкаре приводит к увеличению частоты осцилляций в магнитном поле.

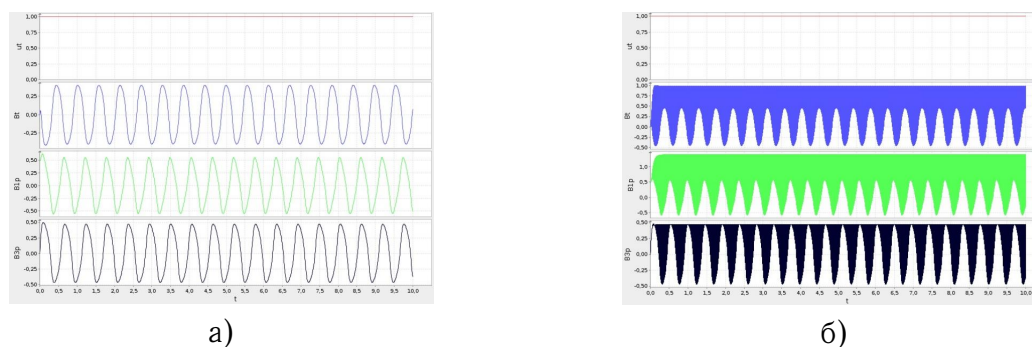


Рис. 2. Режимы изменения амплитуд моды Пуанкаре и магнитных мод при $Re_m = 100, R_\alpha = 30$ для собственных значений моды Пуанкаре: а) $\lambda = 159$ б) $\lambda = 356$, соответственно.

На рис. 2 приведены примеры двух реализаций с квазипериодическим режимом осцилляций для двух собственных значений моды Пуанкаре при $Re_m = 100, R_\alpha = 20$. По вертикальной оси отложены безразмерные амплитуды компонент.

Аналогичные режимы получены при изменении параметров в следующих границах $Re_m \in [80; 100], R_\alpha \in [20; 50]$, что не совпадает с результатами приведёнными на рис. 1 для модели (4) в линейном приближении.

На следующем этапе исследования модели (4) были включены стохастические процессы $\zeta(t)$ и $\xi(t)$, моделирующие спонтанно возникающее и исчезающее когерентное влияние отброшенных высших мод поля скорости и магнитного поля, и взято значение $f_{out} = 10$. Отметим, что увеличение значения f_{out} приводит к увеличению значений амплитуды поля скорости $u(t)$ и двух амплитуд магнитного поля $B_2^T(t), B_1^P(t)$. Включение стохастических процессов приводит к появлению слабых флуктуаций на фоне основного режима (рис. 3), которые хорошо заметны на графике амплитуды поля скорости $u(t)$ при сравнении рис. 3 и рис. 2. Здесь также получены различные режимы генерации магнитного поля, которые однако не совпали с той фазовой картиной, которая приведена на рис. 1.

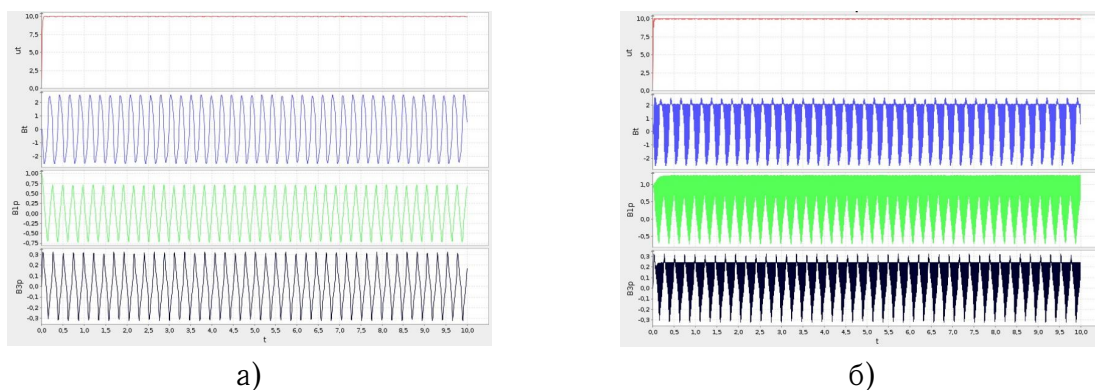


Рис. 3. Режимы изменения амплитуд моды Пуанкаре и магнитных мод при $Re_m = 100$, $R_\alpha = 30$ для собственных значений моды Пуанкаре: а) $\lambda = 159$ б) $\lambda = 356$, соответственно.

Как отмечено выше, для рассматриваемой модели получены режимы осцилляций, аналогичные тем, что указаны для линейного приближения, но параметры Re_m, R_α при этом сильно отличаются. Чтобы оценить насколько изменяется картина смены режимов генерации магнитного поля при переходе от линейного приближения модели (4) к рассматриваемому нелинейному приближению, были построены фазовые портреты в плоскости параметров Re_m, R_α по результатам численного моделирования системы для двух рассмотренных выше случаев (рис. 4).

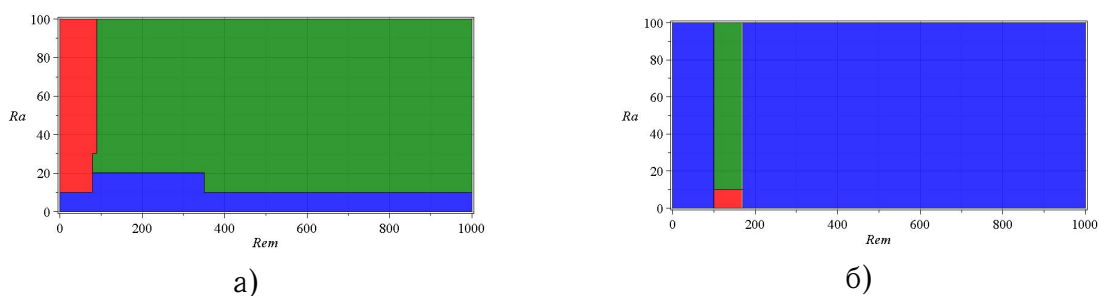


Рис. 4. Характер генерации магнитного поля в зависимости от параметров R_α (турбулентный генератор) и Re_m (крупномасштабный генератор). α -эффект задается функциями а) $\alpha(r) = const$, б) $\alpha(r) = -\sin(\pi(r - r_1))$. Зелёная область – генерация поля с незатухающими осцилляциями, синяя – с затухающими осцилляциями, красная – генерация поля без осцилляций. Вычисления проводились для собственного значения $\lambda = 159$ моды Пуанкаре.

Сравнительный анализ показывает, что параметры, при которых происходит генерация незатухающего магнитного поля с осцилляциями, претерпевает значительные изменения на фазовой плоскости и, как следствие, точка бифуркации смещается в другую область плоскости. Также для рассматриваемой модели характерно появление инверсий магнитного поля на фоне неизменной или слабо меняющейся амплитуды поля скорости, что позволяет считать изменение поля скорости равным нулю в первом уравнении системы (4). Тогда амплитуда $u(t)$ может быть выражена из первого уравнения системы (4) через амплитуды магнитных мод B_i^j и четырёхмодовая модель преобразуется к трёхмодовой, порождающей инверсии в магнитном поле.

Заключение

В предложенной простой модели динамо со стохастическими $\alpha\Omega$ -генераторами удаётся воспроизвести различные режимы динамо, которые наблюдаются в реальных динамо-системах. При значениях параметров $Re_m \in [0; 1000]$, $R_\alpha \in [0, 100]$ четырёхмодовая модель может быть сведена к трёхмодовой модели, генерирующей инверсии в магнитном поле. Достоинством предложенной модели является то, что источником регулярных инверсий служит её внутренняя динамика, а нарушение этой цикличности, сбой в работе динамо-машины, выход на режим хаотических инверсий – обусловлены перестройкой структуры турбулентности. Переход от линейного приближения к нелинейной модели с введённым механизмом алгебраического подавления α -эффекта и осцилляции и со стохастическими $\alpha\Omega$ -генераторами приводит к значительному изменению фазового портрета на плоскости параметров Re_m , R_α и координат точки бифуркации.

Список литературы

- [1] Parker E. N., “Hydromagnetic dynamo models”, *Astrophys. J.*, 1955, № 122, 293–314.
- [2] Merrill R.T., McElhinny M.W. and McFadden P.L., *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*, Academic Press, London, 1996.
- [3] *Маломодовые модели гидромагнитного динамо*, коллективная монография, ред. Водинчар Г.М., КамГУ им. Витуса Беринга - ИКИР ДВО РАН, Петропавловск-Камчатский, 2016, 120 с. [*Malomodovye modeli gidromagnitnogo dinamo*, kolektivnaja monografija, ed. Vodinchar G.M., KamGU im. Vitusa Beringa - IKIR DVO RAN, Petropavlovsk-Kamchatskij, 2016, 120 pp.]
- [4] Колесниченко А.В., Маров М.Я., *Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред*, БИНОМ, М., 2009, 368 с. [Kolesnichenko A.V., Marov M.Ja., *Turbulentnost' i samoorganizacija. Problemy modelirovaniya kosmicheskikh i prirodnyh sred*, BINOM, M., 2009, 368 pp.]
- [5] Водинчар Г.М., Фещенко Л.К., “Инверсии в модели геодинамо, управляемой 6-ячейковой конвекцией”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2015, № 2(11), 45–54. [Vodinchar G.M., Feshchenko L.K., “Reversals in a geodynamo model driven by 6-cell convection”, *Bulletin KRASEC. Physical and mathematical sciences*, **11**:2 (2015), 41–50].

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Parker E. N. Hydromagnetic dynamo models // *Astrophys. J.* 1955. no. 122. pp. 293–314
- [2] Merrill R. T., McElhinny M. W. and McFadden P. L. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle. Academic Press. London. 1996

- [3] Маломодовые модели гидромагнитного динамо: коллективная монография под общ. ред. Водинчара Г.М. Петропавловск-Камчатский: КамГУ им. Витуса Беринга - ИКИР ДВО РАН, 2016. 120 с.
- [4] Колесниченко А. В., Маров М. Я. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ, 2009. 368 с.
- [5] Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. Инверсии в модели геодинамо, управляемой 6-ячейковой конвекцией // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. № 2(11). 45–54

Для цитирования: Водинчар Г. М., Годомская А. Н., Шереметьева О. В. Инверсии магнитного поля в модели крупномасштабного $\alpha\Omega$ -динамо // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2017. № 4(20). С. 76-82. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-20-4-76-82

For citation: Vodinchar G. M., Godomskaya A. N., Sheremetyeva O. V. Reversal of magnetic field in the dynamic system with stochastic $\alpha\Omega$ -generators, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2017, **20**: 4, 76-82. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-20-4-76-82

Поступила в редакцию / Original article submitted: 30.11.2017