



Общероссийский математический портал

Р. И. Паровик, П. П. Фирстов, Е. О. Макаров, Математическое моделирование фрактальной размерности геосреды, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 2(3), 42–49

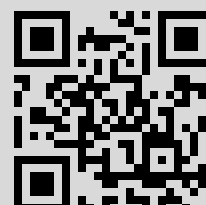
DOI: <http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2011-3-2-42-49>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 77.82.206.18

19 июля 2016 г., 16:48:16



УДК 517.955

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ГЕОСРЕДЫ

Паровик Р.И.^{1,2}, Фирстов П.П.³, Макаров Е.О.³

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

² Филиал Дальневосточного Федерального государственного университета, 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1

³ Камчатский филиал Геофизической службы РАН, 683006, г. Петропавловск-Камчатский, бул. Пийпа, 9

E-mail: romano84@mail.ru

Предложен алгоритм оценки фрактальной размерности с помощью временных рядов радоновых полей. Установлены некоторые закономерности фрактальной размерности с сейсмической активностью Южной Камчатки.

Ключевые слова: фрактальная размерность, временной ряд, дробная производная

© Паровик Р.И., Фирстов П.П., Макаров Е.О., 2011

MSC 00A71

MATHEMATICAL MODELING OF FRACTAL DIMENSION GEOMEDIUM

Parovik R.I.^{1,2}, Firstov P.P.³, Makarov E.O.³

¹ Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

² Branch of the Far Eastern Federal State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Tushkanova st., 11 / 1, Russia

³ Kamchatka Branch of Geophysical Service RAS, 683006, Petropavlovsk-Kamchatsky, Piip Boulevard 9

E-mail: romano84@mail.ru

We propose an algorithm for estimating the fractal dimension of time series of radon fields. Some regularities of the fractal dimension with the seismic activity in South Kamchatka.

Key words: fractal dimension, time series, the fractional derivative

© Parovik R.I., Firstov P.P., Makarov E.O., 2011

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время происходит интенсивное развитие дробного анализа и его приложений в различных областях знаний. С помощью дробного интегро-дифференцирования или дробного анализа можно строить адекватные математические модели природных, социальных и других явлений и процессов. Это возможно потому, что уравнения, описывающие эти явления, содержат новые параметры, которые учитывают свойства нелокальности по времени и координате.

В интерпретации экспериментальных данных эти параметры позволяют решениям соответствующих нелокальных уравнений наиболее точно их аппроксимировать и давать информацию о свойствах объекта изучения.

Необходимо отметить, что при решении дифференциального уравнения дробного порядка мы, с одной стороны решаем бесчисленное множество дифференциальных уравнений, а с другой получаем множество соответствующих им решений или различные функциональные пространства. Такое многообразие позволяет строить адекватные математические модели. На основе этой фундаментальной особенности дробного анализа и построена настоящая работа, в которой дробный анализ использован для целей исследования временных рядов экспериментальных данных мониторинга подпочвенного радона (^{222}Rn) с целью выделения и формализации предвестниковых аномалий сильных землетрясений района Южной Камчатки.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение миграции Rn в рыхлых отложениях, которые обладают фрактальными свойствами, может быть записано в терминах дробной производной Герасимова-Капуто порядка α в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^\alpha A(\xi, \tau)}{\partial \tau^\alpha} = \bar{D} \frac{\partial^2 A(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \bar{\lambda} A(\xi, \tau) + \bar{\lambda} A_\infty, \quad (1)$$

где $A = A(\xi, \tau)$ – объемная активность Rn, которая нам известна из экспериментальных данных; $0 < \alpha < 1$ – дробный параметр, связанный с фрактальной размерностью геосреды; $\tau = t/t_0$, $\xi = x/l_0$ – безразмерные время и пространственная координата, t_0 – среднее время «жизни» атома Rn; l_0 – диффузионная длина; $A(\xi, 0)$ – начальное распределение Rn; A_∞ – равновесное значение объемной активности радона (ОА Rn); D – коэффициент диффузии Rn в геосреде, λ – постоянная распада Rn; $\bar{D} = Dt_0/l_0^2$ – безразмерный коэффициент диффузии; $\bar{\lambda} = \lambda t_0$ – безразмерная постоянная распада.

Нахождение значений параметра $\alpha(\tau)$ и его вариаций во времени из уравнения (1), которое при $\alpha = \text{const}$ является уравнением субдиффузии [1]-[2], по известным экспериментальным значениям ОА Rn $A(\xi, \tau)$, является целью данной работы.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ

Уравнение (1) можно упростить, если аппроксимировать диффузионный член следующим соотношением:

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 A(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} d\xi \approx A(\tau) \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнение (1) приходим к уравнению

$$\partial_{0\tau}^{\alpha(\tau)} A(\eta) = (\bar{D} - \bar{\lambda})A(\tau) + \bar{\lambda}A_{\infty} \quad (3)$$

Известно, что среднее время “жизни” атома Rn $t_0 = 1/\lambda$, поэтому уравнение (3) упрощается и его можно записать так:

$$\partial_{0\tau}^{\alpha(\tau)} A(\eta) = A_{\infty} \quad (4)$$

Начальное условие для (2) запишется так:

$$A(0) = A_0 \quad (5)$$

Необходимо отметить, что упрощение уравнения (3) позволяет получить простое решение, которое в первом приближении можно рассматривать как математическую модель переноса радона во фрактальной среде.

Считая в (4), что параметр $\alpha(\tau)$ изменяется от 0 до 1 дискретно, т.е. $\alpha(\tau) = \alpha_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, где n – количество экспериментальных данных. Мы получим k уравнений вида:

$$\partial_{0\tau}^{\alpha_k} A(\eta) = A_{\infty} \quad (6)$$

Решение уравнения (6) согласно условию (5) можно получить интегральным преобразованием Лапласа

$$A(\tau) = A_0 + \frac{A_{\infty} \tau^{\alpha_k + 1}}{\Gamma(\alpha_k + 1)} \quad (7)$$

Левая часть уравнения (7) известна, т.е. $A(\tau) = A_k$. Известны значения $A_{\infty} = A_{\infty k}$, которые мы вычислим с помощью методики работы [3] по формуле:

$$A_{\infty k} = \frac{A_1(\tau)}{1 - T}$$

$A_1(\tau)$ – значения объемной активности радона на глубине z_1 ; $A_2(\tau)$ – значения объемная активность радона на глубине z_2 , причем $z_2 = k \cdot z_1$, k – коэффициент пропорциональности; T – численно находится из уравнения $XT^k - T + (1 - X) = 0$, $X = A_1(\tau)/A_2(\tau)$.

Поэтому уравнение (7) мы можем записать в виде:

$$R_k(\tau) = \frac{\tau^{\alpha_k + 1}}{\Gamma(\alpha_k + 1)}, \quad R_k(\tau) = \frac{A_k - A_0}{A_{\infty k}} \quad (8)$$

Следующий этап – оценка значений α_k по известным данным согласно выражению (8). Оценить значения α_k можно с помощью метода наименьших квадратов или с помощью численных методов.

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Было проведено сопоставление расчетных значений α_k , полученных по предложенной методике (8) и ОА Rn, зарегистрированной на станциях сети Петропавловск-Камчатского полигона, с сейсмичностью Южной Камчатки. С целью лучшей визуализации обоих параметров рассматривалась относительная ОА Rn, которая бралась

как отношение текущих значений N к максимальному значению N_0 на рассматриваемом участке. Рассматривалось проявление сильных землетрясений Южной Камчатки с $M > 5,5$ в период с 2005-2010 гг. в динамике обоих параметров.

На рис.2 приведены кривые относительной ОА R_p и расчетные значения показателя α_k для землетрясения 4 августа 2004 г. с $M=5,6$, произошедшее на расстоянии 116 км.

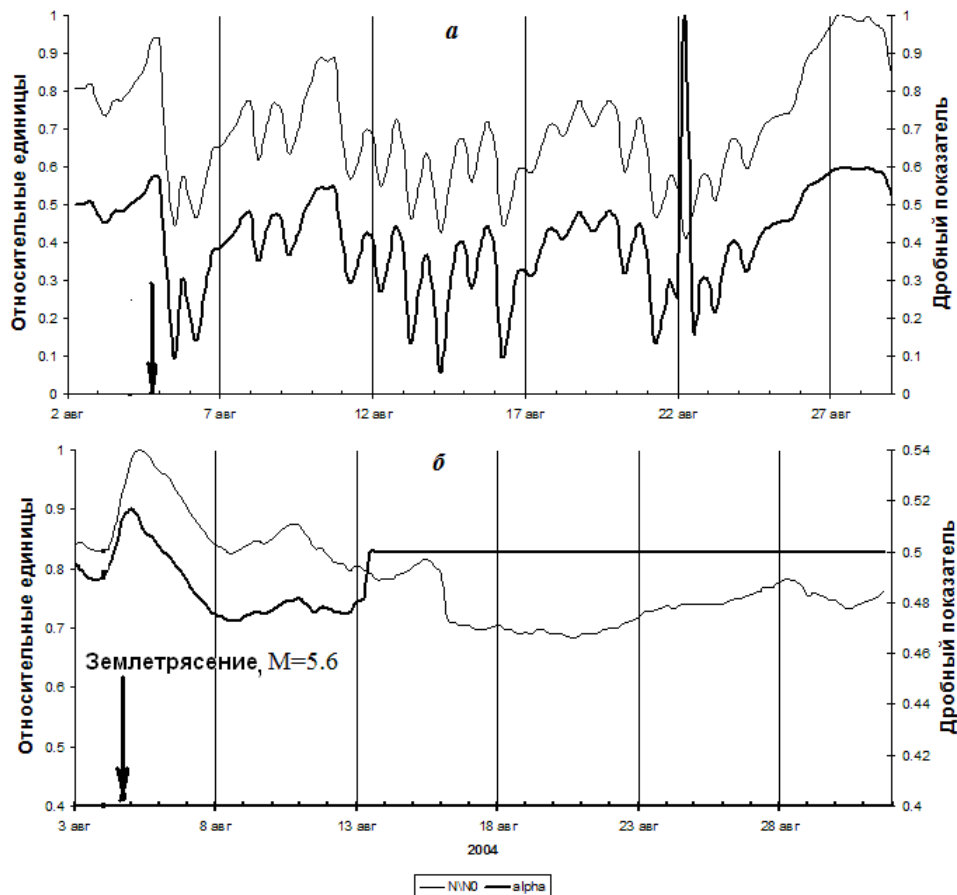


Рис. 1. Кривые относительной ОА R_p и значений дробного показателя α_k в окрестностях землетрясения 4 августа 2004 г.: а) пункт Левая Авача; б) пункт ИКИР.

В значениях ОА R_p перед событием с $M = 5,6$, произошедшим 4 августа 2004 г., в пунктах ЛВЧ и ИКР выделяются бухтообразные аномалии со временем упреждения около суток (рис.2). Эти аномалии, на основании синфазности их появления в трех пунктах – ИКИР, ЛВЧ, ПРТ, связываются с геодеформационной волной, возникшей на последней стадии подготовки землетрясения в результате квазипластического течения геоматериала. При скорости распространения геодеформационной волны 30 км/сутки возникновение волны произошло за четверо суток до события [4].

В пункте ЛВЧ наблюдается синхронное поведение кривых для обоих параметров (рис. 2), а для пункта ИНС предвестниковая аномалия в значениях показателя α_k выглядит достаточно убедительно (рис. 2), с выходом на стационарный уровень 13 августа. Это указывает на то, что пористые свойства рыхлых отложений при прохождении геодеформационной волны изменяются и дробный показатель α_k может служить еще одним параметром для выделения и формализации предвестниковых аномалий.

Рассмотрим сейсмичность Авачинского залива в июле – августе 2010 г. 30 июля 2010 г. произошло землетрясение в районе Авачинской котловины с $M > 6.3$, а спустя две недели 15 августа в районе мыса Шипунский произошел рой землетрясений с $M_{max} = 5.8$ (53,56 с.ш.; 160,12 в.д.).

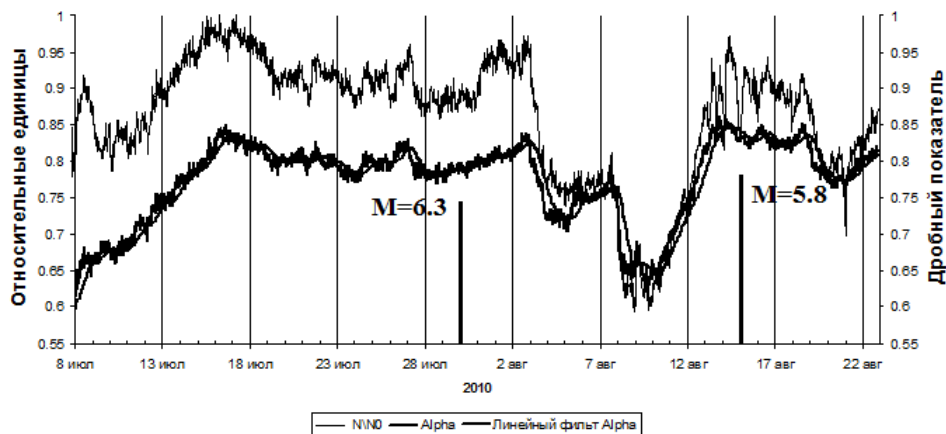


Рис. 2. Кривые относительной OA Rn и значений дробного показателя α_k в окрестностях землетрясения 30 июля 2010 г. в пункте КРМ.

На рис.3 представлены кривые экспериментальных данных в пункте КРМ: относительной OA Rn и рассчитанных по формуле (8) значений α_k , а вертикальными линиями отмечены моменты землетрясений. На обеих кривых можно выделить следующие этапы:

1 - начиная с 8 июля, наблюдается рост значений α от 0,6 до 0,85 вплоть до 17 июля;

2 - с 18 июля по 3 августа происходит незначительные изменения параметра α около 0,8;

3 - с 4 августа до 10 августа резкое снижение α от 0,825 до 0,63.

4 - с 11 августа до 13 августа резкий рост значений α от 0,63 до 0,85.

5 - с 14 по 20 августа незначительные отклонения значений α от 0,8.

Анализируя выделенные этапы поведения дробного показателя α и, сопоставляя даты наступления землетрясений можно сделать следующий вывод. Изменение параметра α , по-видимому, обусловлено деформационными процессами за счет дилатансии геоматериала, которая возникает на последней стадии подготовки землетрясений. В пользу этого также говорит, что время упреждения для землетрясения 30 июля с $M = 6,3$ составляет около 20 суток, а для землетрясения 15 августа с $M = 5,8$ всего 9 суток.

На рис. 4 представлены: расчетная кривая значений дробного параметра α , ее отфильтрованная кривая, относительная OA Rn за июль 2008 г. по данным станции ИНС. Стрелкой отмечено землетрясение с $M=6.2$, которое произошло 24 июля 2008 г. в районе Южной Камчатки (50.97 с.ш., 157.58 в.д.)

На рис.4 видно, что со 2 июля по 8 июля наблюдается рост значений α от 0,7 до 0,9. С 9 июля по 15 происходит незначительное колебание α около значения 0,9. Далее с 16 июля до 20 июля наблюдается снижение α от 0,9 до 0,8 затем незначительный рост до 0,85 вплоть до 31 июля.

В этом случае, также как и перед землетрясением 30 июля 2010 г., происходит увеличение значений дробного показателя α почти на 30% за 25 суток до события.

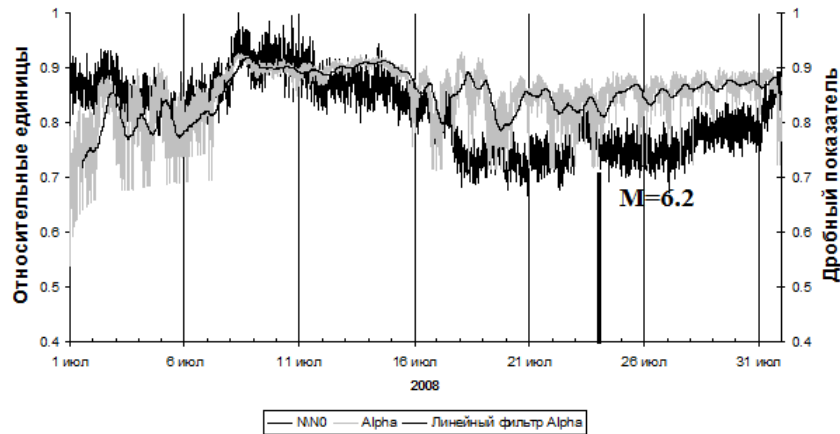


Рис. 3. Кривые относительной ОА R_p и значений дробного показателя α_k в окрестностях землетрясения 24 июля 2010 г. по данным пункта ИНС.

На рис.5 представлены экспериментальные данные по данным пункта ИНС за май-июнь 2007 г. Стрелкой отмечено землетрясение с $M=6.4$ (52.14 с.ш, 157.29 в.д.), которое произошло в южной части Камчатского полуострова.

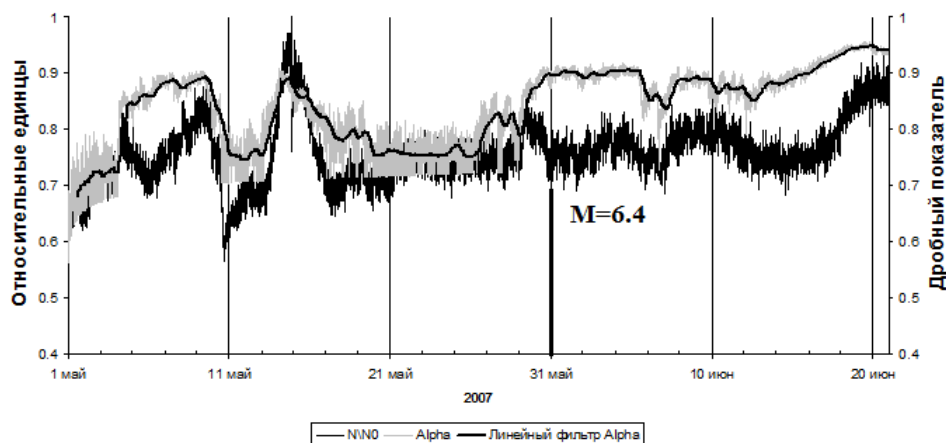


Рис. 4. Кривые относительной ОА R_p и значений дробного показателя α_k в окрестностях землетрясения 31 мая 2007 г. по данным пункта ИНС.

На рис.5 видно, что перед землетрясением за 30 суток наблюдается резкий рост α от 0,7 до 0,9, со значительными по амплитуде вариациями в дальнейшем. Так же можно заметить, так называемое, плато длительностью 5 суток, когда значения α меняются незначительно около значения 0,75. После плато значение α возрастает до 0,9 и происходит землетрясение. В этом случае кривая значений α напоминает логистическую кривую [5], которая присуща социальным, историческим и экономическим процессам.

На рис. 6. показаны кривые относительной ОА R_p и значений дробного показателя α_k за период 2005-2010 г. по данным пункта ПРТ. Жирными линиями отмечены землетрясения Южной Камчатки с $M>5.5$. В 2005 году 7 июля в Авачинском заливе (52.87 с.ш., 160.10 в.д.) произошло землетрясение с $M=5.8$. В 2006 году в основном сейсмическая активность проявлялась в июле-августе. Сильное землетрясение в этот период произошло 24 августа с $M=6.5$ у Южного побережья Камчатки (51.15

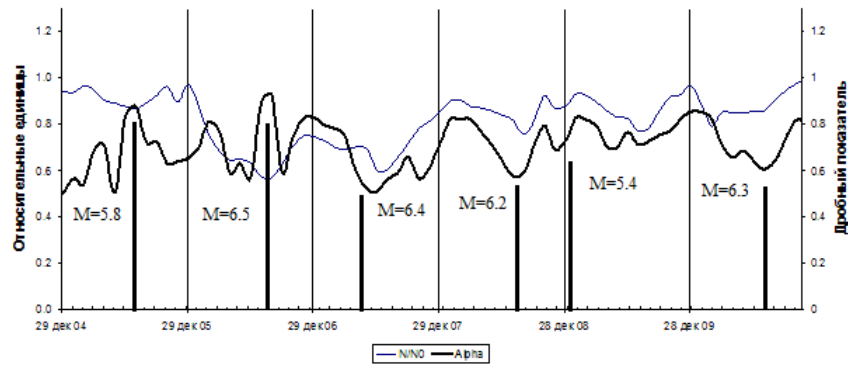


Рис. 5. Кривые относительной OA R_n и значений дробного показателя α_k за период 2005-2010 г. по данным пункта ПРТ.

с.ш., 157.52). В 2007 году сильное землетрясение произошло 30 мая на территории Камчатского полуострова (52.14 с.ш., 157.29 в.д.) с $M=6.4$. В 2008 году сейсмическая активность увеличилась: произошли три события с $M \geq 5.5$. 6 марта (51.52 с.ш., 156.55 в.д.) $M=5.5$, 24 июля (50.97 с.ш., 157.58 в.д.) $M=6.2$, 18 сентября (51.94 с.ш., 158.36 в.д.) $M=5.9$. В 2009 году землетрясений с $M > 5.5$ не было, но 14 января произошло землетрясение с $M=5.4$ (52.27 с.ш., 159.29 в.д.). В 2010 году усиление сейсмической активности пришлось на июль месяц, 30 июля в районе Авачинского залива (52.50 с.ш., 159.84 в.д.) произошло землетрясение с $M=6.3$.

На рис.6 видно, что времена указанных выше землетрясения совпадают либо с увеличением значений дробного показателя α либо с его уменьшением. С учетом того, что этот показатель связан с фрактальной размерностью среды, то он отражает структурное изменение геосреды под действием деформаций. Разнополярность аномалий указывает на то, что структура деформирования среды является мозаичной и фрактальной.

Как показано в работе [6], резкие изменения, в том числе кратковременные, напряженно - деформированного состояния контакта между блоками горной породы приводят к возникновению межблоковых перемещений. Которые, в свою очередь, проявляются в виде «квазивязкого» течения материала земной коры. По-видимому, процесс ползучести за счет квазивязкого течения горных масс порождает «геодеформационные волны», обусловленные взаимодействием отдельных блоков геологической среды. Геодеформационные волны изменяют структуру рыхлых отложений, что отражается в изменении показателя α и OA R_n . В зависимости от расположения пунктов регистрации относительно границ отдельных блоков, аномалии имеют различную форму (бухтообразные, ступенчатые) и различную полярность в зависимости от геолого-тектонических условий того или иного пункта регистрации относительно очага землетрясения.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Выявленная чувствительность параметра α к изменениям напряженно-деформированного состояния указывает на то, что этот параметр может служить для выделения и формализации предвестниковых аномалий сильных землетрясений в поле подпочвенного R_n . С помощью этого параметра можно осуществлять мониторинг деформационных процессов в геосреде. Предложенная методика совместно с другими известными ме-

тодами анализа временных рядов увеличивает эффективность краткосрочного прогноза землетрясений района Южной Камчатки с $K > 5,5$.

В развитии модели (1) необходимо учитывать параметр $\tilde{D} = \bar{D} - \bar{\lambda}$, который отвечает диффузионный механизм. Такое уточнение приведет к значительному усложнению решения уравнения (1) и к определенным трудностям в реализации алгоритма.

Библиографический список

1. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М: Физматлит, 2003. – 272 с.
2. Meilanov R.P. The Fractal Concept in the Theory of a Thermal Field of the Earth // Thermal Field of the Earth and Methods of its study / Receiver of the proceedings. М.: Publishing house RUDN, 2000, pp.63-68. (In Russian).
3. Яковлева, В.С. Процессы переноса радона в неравновесных средах: Автореф. канд. физ.– мат. наук. – Томск: ТПУ, 2002. – 23 с.
4. Firstov, P.P., Yakovleva V.S., Shirokov et. al The nexus of soil radon and hydrogen dynamics and seismicity of the northern flank of the Kuril - Kamchatka subduction zone // Annals of Geophysics. 2007.V. 50. N 4. P.
5. Нахушев А.М., Кенетова Р.О. Моделирование социально-исторических и этнических процессов. – Нальчик: Эль-Фа, 1998. – 172 с.
6. Попруженко С.В., Зубин М.И. Тектоника и некоторые особенности сейсмичности шельфовой зоны Авачинского залива и прилегающих районов // Вулканология и сейсмология. 1997. №2. С. 74-86.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 5.12.2011