



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Паровик, Модель нестационарной диффузии-адвекции радона системе грунт-атмосфера, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(1), 39–45

DOI: <http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2010-1-1-39-45>

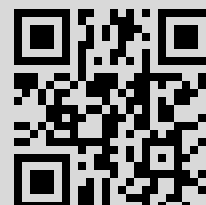
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 77.82.199.43

20 июля 2016 г., 04:15:17



УДК 517.958

МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ – АДВЕКЦИИ РАДОНА В СИСТЕМЕ ГРУНТ – АТМОСФЕРА*

Р.И. Паровик^{1, 2}

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

² Филиал Дальневосточного государственного технического университета (ДВПИ имени В.В. Куйбышева), 683031, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Тушканова, 11/1

E-mail: romano84@mail.ru

Рассмотрена одномерная математическая модель нестационарной диффузии – адвекции радона в системе грунт – атмосфера. Получено аналитическое решение такой модели, согласно которому были построены кривые распределения концентрации радона в грунте и атмосфере.

Ключевые слова: радон, диффузия, адвекция, модель, грунт, атмосфера

© Паровик Р.И., 2010

MSC 65N80

MODEL FOR UNSTEADY OF DIFFUSION –ADVECTION OF RADON IN SOIL – ATMOSPHERE

R.I. Parovik^{1, 2}

¹ Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

² Branch of Far-Eastern National Technical University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatskiy, Tushkanova st., 11/1, Russia

E-mail: romano84@mail.ru

*Работа выполнена при поддержке гранта АВЦП «РНПВШ» № 2.1.1/544.

We consider a mathematical model for unsteady transport of radon from the constant coefficients in the soil – atmosphere. An explicit analytical solution for this model and built at different times of his profiles.

Key words: radon, model, diffusion, advection, soil, atmosphere

© Parovik R.I., 2010

Введение

Изучение процессов переноса радона в системе грунт – атмосфера представляет определенный научный интерес. Это вызвано тем, что радон является индикатором напряженно-деформированного состояния геосреды и оказывает воздействие на некоторые геофизические поля [1]. Например, радон участвует в формировании электрического поля приземного слоя атмосферы и является одним из предвестников землетрясений, что в некотором смысле определяет актуальность исследования радона в различных системах и средах [1]–[3].

Исследование распространения радона в различных средах осуществляется с помощью математических моделей, которые учитывают различные механизмы переноса, в основном адвекцию и диффузию. Однако теоретические оценки этих параметров, которые были получены с помощью классических моделей, не позволяют объяснить аномально высокие значения объемной активности радона вблизи поверхности земли [4]. Следовательно, возникает необходимость в разработке математической модели, в которой присутствовали бы механизмы, ускоряющие диффузию и адвекцию. Например, это может быть модель аномальной диффузии и адвекции радона во фрактальной пористой среде [5] или модель обычной диффузии и адвекции, учитывающая акустические возмущения в грунте.

Однако на первом этапе моделирования сначала необходимо получить некоторое представление о переносе радона в системе грунт – атмосфера во времени и пространстве. Для этой цели необходимо разработать модель нестационарного переноса радона в системе грунт – атмосфера и получить ее аналитическое решение.

Постановка задачи

Согласно теории эманационного метода в радиометрической разведке перенос радона из пористого однородного грунта к земной поверхности осуществляется с помощью механизмов диффузии и конвекции [4].

В данной работе мы будем рассматривать адвекцию как перенос, который может включать в себя либо конвекцию, либо фильтрацию. Будем считать характеристики переноса постоянными заданными величинами. Тогда задача нестационарного переноса радона в системе грунт – атмосфера ($z, t > 0$) может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = D_g \frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial z^2} + v_g \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} - \lambda (A(z,t) - A_\infty), z > 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial z^2} + v_a \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} - \lambda A(z,t), z < 0, \quad (1)$$

$$D_g \left. \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} \right|_{z=0+0} + v_g A(z,t)|_{z=0+0} = D_a \left. \frac{\partial A(z,t)}{\partial z} \right|_{z=0-0} + v_a A(z,t)|_{z=0-0},$$

$$A(z,t)|_{z=0+0} = A(z,t)|_{z=0-0}, \lim_{z \rightarrow \infty} A(z,t) = A_\infty, \lim_{z \rightarrow -\infty} A(z,t) = 0,$$

где D_g, D_a – коэффициенты диффузии радона в грунте и в приземной атмосфере, м²/с; v_g, v_a – скорость адвекции радона соответственно в грунте и в приземной атмосфере, м/с; λ – постоянная распада радона, 1/с; A_∞ – объемная активность радона, который находится в радиоактивном равновесии с радием (²²⁶Ra) на заданной глубине в грунте ($A_\infty = K_{em} A_{Ra} \rho_s (1 - \eta)$), где K_{em} – коэффициент эманирования радона, отн. ед.; A_{Ra} – удельная активность ²²⁶Ra, Бк/кг; ρ_s – плотность твердых частиц грунта, кг/м³; η – пористость грунта, отн. ед; $A(z,t)$ – объемная активность радона в грунте, Бк/м³.

Методика решения

Упростим задачу (1), сделав следующее преобразование – замену вида:

$$A(z,t) = e^{-\lambda t} u(x_g,t), \quad x_g = z + v_g t, \quad A(z,t) = e^{-\lambda t} u(x_a,t), \quad x_a = z + v_a t. \quad (2)$$

Подставляя выражения (2) в модельное уравнение и граничные условия (1), получим следующую задачу:

$$\frac{\partial u(x_g,t)}{\partial t} = D_g \frac{\partial^2 u(x_g,t)}{\partial x_g^2} + \lambda A_\infty e^{\lambda t}, \quad x_g > v_g t,$$

$$\frac{\partial u(x_a,t)}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 u(x_a,t)}{\partial x_a^2}, \quad x_a < v_a t, \quad (3)$$

$$D_g \left. \frac{\partial u(x_g,t)}{\partial x_g} \right|_{x_g=v_g t+0} + v_g u(x_g,t)|_{x_g=v_g t+0} = D_a \left. \frac{\partial u(x_a,t)}{\partial x_a} \right|_{x_a=v_a t-0} + v_a u(x_a,t)|_{x_a=v_a t-0},$$

$$u(x_g,t)|_{x_g=v_g t+0} = u(x_a,t)|_{x_a=v_a t-0}, \lim_{x_g \rightarrow \infty} u(x_g,t) = A_\infty e^{\lambda t}, \lim_{x_a \rightarrow -\infty} u(x_a,t) = 0.$$

Сделаем преобразование Лапласа по переменной времени t для задачи (3). Приходим к следующей задаче для изображения:

$$D_g \frac{d^2 F(x_g,p)}{dx_g^2} - pF(x_g,p) + \frac{\lambda A_\infty}{p - \lambda} = 0, \quad D_a \frac{d^2 F(x_a,p)}{dx_a^2} - pF(x_a,p) = 0,$$

$$D_g \left. \frac{dF(x_g,t)}{dx_g} \right|_{x_g=v_g t+0} + v_g F(x_g,p)|_{x_g=v_g t+0} =$$

$$= D_a \left. \frac{dF(x_a,p)}{dx_a} \right|_{x_a=v_a t-0} + v_a F(x_a,p)|_{x_a=v_a t-0}, \quad (4)$$

$$F(x_g,p)|_{x_g=v_g t+0} = F(x_a,p)|_{x_a=v_a t-0}, \lim_{x_g \rightarrow \infty} F(x_g,p) = \frac{A_\infty}{p - \lambda}, \lim_{x_a \rightarrow -\infty} F(x_a,p) = 0.$$

Решение дифференциальных уравнений в уравнении (4) известны, а с учетом краевых условий на внешних границах их можно записать следующим образом:

$$F(x_g, p) = C_1 e^{-x_g \sqrt{\frac{p}{D_g}}} + \frac{A_\infty}{p - \lambda}, F(x_a, p) = C_2 e^{x_a \sqrt{\frac{p}{D_a}}}. \quad (5)$$

Найдем константы интегрирования C_1 и C_2 . Используем для этой цели краевые условия на внутренней границе раздела сред грунт – атмосфера задачи (4). Получим следующую алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1 e^{-v_g t \sqrt{\frac{p}{D_g}}} = C_2 e^{v_a t \sqrt{\frac{p}{D_a}}} - \frac{A_\infty}{p - \lambda}, \\ C_1 e^{-v_g t \sqrt{\frac{p}{D_g}}} (v_g - \sqrt{D_g p}) = C_2 e^{v_a t \sqrt{\frac{p}{D_a}}} (v_a + \sqrt{D_a p}) - \frac{v_g A_\infty}{p - \lambda}. \end{cases} \quad (6)$$

Решение для системы (6) имеет вид:

$$C_1 = -\frac{A_\infty (a + b\sqrt{p}) e^{\frac{v_g t}{\sqrt{D_g}} \sqrt{p}}}{(p - \lambda)(a + c\sqrt{p})}, C_2 = \frac{A_\infty e^{-\frac{v_a t}{\sqrt{D_a}} \sqrt{p}}}{p - \lambda} \left(1 - \frac{a + b\sqrt{p}}{a + c\sqrt{p}}\right), \quad (7)$$

$$a = v_g - v_a, \quad b = -\sqrt{D_a}, \quad c = -\sqrt{D_a} - \sqrt{D_g}.$$

Подставляя найденные константы (7) в решения для изображения (5), получим:

$$F(x_g, p) = \frac{A_\infty}{p - \lambda} \left(1 - \frac{(a + b\sqrt{p}) e^{-\tau_g \sqrt{p}}}{(a + c\sqrt{p})}\right), F(x_a, p) = \frac{A_\infty e^{-\tau_a \sqrt{p}}}{p - \lambda} \left(1 - \frac{a + b\sqrt{p}}{a + c\sqrt{p}}\right), \quad (8)$$

$$\frac{(x_g - v_g t)}{\sqrt{D_g}} = \tau_g, \quad -\frac{(x_a - v_a t)}{\sqrt{D_a}} = \tau_a.$$

Осталось перейти к оригиналу. Для этой цели воспользуемся таблицей перехода из справочника [6] и находим:

$$\frac{A_\infty}{p - \lambda} \Rightarrow A_\infty e^{\lambda t},$$

$$\frac{A_\infty e^{-\tau_a \sqrt{p}}}{p - \lambda} \Rightarrow \frac{A_\infty e^{\lambda t}}{2} \left(e^{-\tau_a \sqrt{\lambda}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\tau_a}{2\sqrt{t}} - \sqrt{\lambda t} \right) + e^{\tau_a \sqrt{\lambda}} \operatorname{erfc} \left(\frac{\tau_a}{2\sqrt{t}} + \sqrt{\lambda t} \right) \right),$$

где $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$, $\operatorname{erf}(z) = 2\pi^{-1/2} \int_0^z e^{-x^2} dx$ – интеграл вероятностей.

Введем следующие обозначения:

$$E_+ = \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{D_g t}} + \sqrt{\lambda t} \right), \quad E_- = \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{D_g t}} + \sqrt{\lambda t} \right), \quad E_0 = \operatorname{erfc} \left(\frac{z}{2\sqrt{D_g t}} + \gamma\sqrt{t} \right).$$

Найдем оригинал для выражения

$$\frac{(a + b\sqrt{p}) e^{-\tau a \sqrt{p}}}{(p - \lambda)(a + c\sqrt{p})} = \frac{\gamma e^{-\tau a \sqrt{p}}}{(p - \lambda)(\gamma + \sqrt{p})} + \frac{\xi \sqrt{p} e^{-\tau a \sqrt{p}}}{(p - \lambda)(\gamma + \sqrt{p})}, \quad \gamma = a/c; \xi = b/c.$$

Для первого слагаемого оригинал примет следующий вид:

$$\frac{\gamma e^{-\tau a \sqrt{p}}}{(p - \lambda)(\gamma + \sqrt{p})} \Rightarrow \frac{\gamma e^{\lambda t}}{2} \left(\frac{e^{-\tau a \sqrt{\lambda} E_-}}{\gamma + \sqrt{\lambda}} + \frac{e^{\tau a \sqrt{\lambda} E_+}}{\gamma - \sqrt{\lambda}} \right) - \frac{\gamma^2 e^{\gamma \tau a} + \gamma^2 t E_0}{\gamma^2 - \lambda},$$

для второго слагаемого – соответствующий вид:

$$\frac{\xi \sqrt{p} e^{-\tau a \sqrt{p}}}{(p - \lambda)(\gamma + \sqrt{p})} \Rightarrow \frac{\xi \sqrt{\lambda} e^{\lambda t}}{2} \left(\frac{e^{-\tau a \sqrt{\lambda} E_-}}{\gamma + \sqrt{\lambda}} - \frac{e^{\tau a \sqrt{\lambda} E_+}}{\gamma - \sqrt{\lambda}} \right) + \frac{\xi \gamma^2 e^{\gamma \tau a} + \gamma^2 t E_0}{\gamma^2 - \lambda}.$$

В результате получим:

$$\frac{(\gamma + \xi \sqrt{p}) e^{-\tau a \sqrt{p}}}{(p - \lambda)(\gamma + \sqrt{p})} \Rightarrow \frac{e^{\lambda t}}{2} \left(\frac{(\gamma + \xi \sqrt{\lambda}) e^{-\tau a \sqrt{\lambda} E_-}}{\gamma + \sqrt{\lambda}} + \frac{(\gamma - \xi \sqrt{\lambda}) e^{\tau a \sqrt{\lambda} E_+}}{\gamma - \sqrt{\lambda}} \right) + \frac{(\xi - 1) \gamma^2 e^{\gamma \tau a} + \gamma^2 t E_0}{\gamma^2 - \lambda}.$$

Найдем оригинал для первого изображения из уравнения (8):

$$\frac{A_\infty}{p - \lambda} \left(1 - \frac{(\gamma + \xi \sqrt{p}) e^{-\tau_g \sqrt{p}}}{\gamma + \sqrt{p}} \right) \Rightarrow A_\infty e^{\lambda t} - \frac{A_\infty e^{\lambda t} (\gamma + \xi \sqrt{\lambda}) e^{-\tau_g \sqrt{\lambda} + \lambda t} E_-}{2(\gamma + \sqrt{\lambda})} +$$

$$+ \frac{A_\infty e^{\lambda t} (\gamma - \xi \sqrt{\lambda}) e^{\tau_g \sqrt{\lambda} + \lambda t} E_+}{2(\gamma - \sqrt{\lambda})} + \frac{A_\infty e^{\lambda t} (\xi - 1) \gamma^2 e^{\gamma \tau_g} + \gamma^2 t E_0}{\gamma^2 - \lambda}.$$

Для второго изображения из уравнения (8) получим:

$$\frac{A_\infty e^{-\tau a \sqrt{p}}}{p - \lambda} \left(1 - \frac{\gamma + \xi \sqrt{p}}{\gamma + \sqrt{p}} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{A_\infty e^{\lambda t} (1 - \xi) \sqrt{\lambda} e^{-\tau a \sqrt{\lambda} E_-}}{2(\gamma + \sqrt{\lambda})} - \frac{A_\infty e^{\lambda t} (1 - \xi) \sqrt{\lambda} e^{\tau_g \sqrt{\lambda} E_+}}{2(\gamma - \sqrt{\lambda})} + \frac{A_\infty (1 - \xi) \gamma^2 e^{\gamma \tau a} + \gamma^2 t E_0}{\gamma^2 - \lambda}.$$

Решения с учетом преобразования (2) окончательно запишутся таким образом:

$$A(z, t) = A_\infty (1 - R_1), z > 0, A(z, t) = A_\infty R_2, z < 0, \tag{9}$$

$$R_1 = \frac{(\gamma + \xi \sqrt{\lambda}) e^{-z \sqrt{\frac{\lambda}{D_g}} E_-}}{2(\gamma + \sqrt{\lambda})} + \frac{(\gamma - \xi \sqrt{\lambda}) e^{z \sqrt{\frac{\lambda}{D_g}} E_+}}{2(\gamma - \sqrt{\lambda})} - \frac{(1 - \xi) \gamma^2 e^{\frac{\gamma z}{\sqrt{D_g}} + \gamma^2 t - \lambda t} E_0}{\gamma^2 - \lambda},$$

$$R_2 = \frac{(1-\xi)\sqrt{\lambda}e^{z\sqrt{\frac{\lambda}{D_a}}E_-}{2(\gamma+\sqrt{\lambda})} - \frac{(1-\xi)\sqrt{\lambda}e^{-z\sqrt{\frac{\lambda}{D_a}}E_+}{2(\gamma-\sqrt{\lambda})} + \frac{(1-\xi)\gamma^2e^{-\frac{\gamma z}{\sqrt{D_a}}+\gamma^2t-\lambda t}E_0}{\gamma^2-\lambda}.$$

Решение (9) имеет экспоненциальный характер, т. е. концентрация радона в грунте и в атмосфере падает по экспоненциальному закону. Оно несколько похоже на решение для стационарной атмосферы, ранее полученное автором в работе [7]. Проведем численное исследование решения (9).

Численное моделирование

В численном моделировании, для того чтобы на границе раздела сред грунт – атмосфера не получилось больших градиентов, параметры задачи брались соизмеримыми: $D_a = 5 \cdot 10^{-3}$ м²/с, $D_g = 5 \cdot 10^{-4}$ м²/с, $v_a = 10^{-3}$ м/с, $v_g = 10^{-4}$ м/с.

Расчетные кривые распределения концентрации радона, построенные для грунта и атмосферы, приведены на рисунке. Согласно графику, приведенному на рисунке (а), концентрация радона падает со временем к земной поверхности. Значения относительной объемной активности на границе раздела сред колеблются в диапазоне $0,05 \div 0,15$, что составляет около 0,1 от фонового значения объемной активности радона в грунте. В атмосфере за счет диффузии и конвекции концентрация радона стремится к нулю. Расчетные кривые распределения концентрации радона в системе грунт – атмосфера (б) построены согласно предположения о том, что конвекция радона в атмосфере отсутствует, т. е. $v_a = 0$ м/с, а скорость адвекции радона для грунта принимает значение $v_g = 5 \cdot 10^{-2}$ м/с.

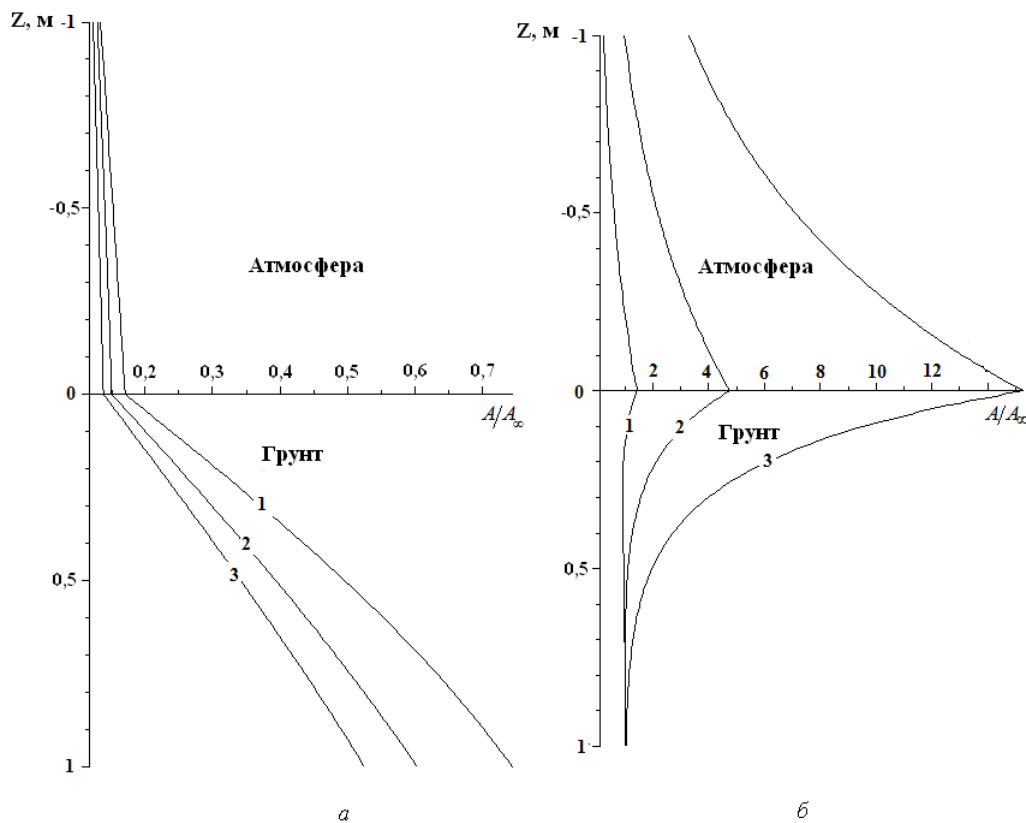
Заметим, что кривые распределения концентрации радона в грунте и атмосфере похожи по форме на кривые распределения, полученные в работе [5], в которой рассматривалась задача о массопереносе радона из фрактального пористого грунта в приземный слой атмосферы. Механизмами переноса радона являлись супердиффузия и аномальная адвекция. Форма расчетных кривых похожа на форму расчетных кривых, характеризующих аномальную адвекцию. Поэтому можно сделать вывод о том, что увеличение значений скорости адвекции радона в однородном пористом грунте может соответствовать возникновению аномальной адвекции во фрактальном пористом грунте.

Заключение

Увеличение скорости адвекции в однородном пористом грунте приводит к накоплению радона вблизи земной поверхности. Этот эффект может быть вызван разрушением пористой структуры грунта в результате деформационных возмущений.

Увеличение скорости переноса радона к земной поверхности может быть вызвано также акустическими возмущениями в грунте в результате, например, образования трещин. Известно, что акустическое и электрическое поля связаны между собой, а радон, в свою очередь, оказывает влияние на формирование электрического поля приземной атмосферы.

Поэтому учет влияния акустических сигналов на процесс переноса радона в грунте является следующим этапом в развитии математической модели (1) с последующим ее обобщением на случай фрактальной пористой среды согласно работе [5].



Кривые распределения концентрации радона в системе грунт – атмосфера в различные моменты времени t (1 – 1000 с; 2 – 2000 с; 3 – 3000 с):
 а – при $v_a = 10^{-3}$ м/с, $v_g = 10^{-4}$ м/с; б – при $v_a = 0$ м/с, $v_g = 10^{-2}$ м/с

Библиографический список

1. Рудаков В.П. Мониторинг напряженно-деформированного состояния пород сейсмоактивного региона эманационным методом // Геохимия. 1986. № 9. С. 1337–1342.
2. Фирстов П.П., Рудаков В.П. Результаты регистрации подпочвенного радона в 1997–2000 гг. на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне // Вулканология и сейсмология. 2002. № 6. С. 1–16.
3. КУПОВЫХ Г.В., МОРОЗОВ В.Н., ШВАРЦ Я.М. Теория электродного эффекта в атмосфере. Таганрог: ТрГУ, 1998. 122 с.
4. Новиков Г.Ф., Капков Ю.Н. Радиоактивные методы разведки. Л.: Недра, 1965. 759 с.
5. ПАРОВИК Р.И., ШЕВЦОВ Б.М. Моделирование процесса массопереноса радона (^{222}Rn) из фрактальной среды в атмосферу // Мат. моделирование. 2009. № 8. Т. 21. С. 30–36.
6. ДИТКИН В.А., ПРУДНИКОВ А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высш. шк., 1965. 455 с.
7. ПАРОВИК Р.И., ИЛЬИН И.А., ФИРСТОВ П.П. Обобщенная одномерная модель массопереноса радона (ОА ^{222}Rn) и его эксхалация в приземный слой атмосферы // Мат. моделирование. 2007. № 11. Т. 19. С. 43–50.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 11.09.10