



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Ильин, И. В. Ильина, Анализ системы уравнений динамики гибкой нити,
Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2010, выпуск 1(1), 31–38

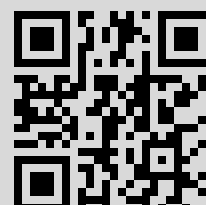
DOI: <http://dx.doi.org/10.18454/2079-6641-2010-1-1-31-38>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 77.82.199.43

20 июля 2016 г., 04:00:51



DOI: 10.18454/2079-6641-2010-1-1-31-38

УДК 519.644

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ГИБКОЙ НИТИ

И.А. Ильин, И.В. Ильина

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: Ilyin@mail.ru

Проведено математическое моделирование динамики гибкой нити. Предложена методика, которая сводит исходную задачу о динамике гибкой нити к задаче, допускающей простую реализацию для численных алгоритмов.

Ключевые слова: гибкая нить, динамическая система, волна

© Ильин И.А., Ильина И.В., 2010

MSC 35L05

THE ANALYSIS OF SYSTEM OF THE EQUATIONS OF DYNAMICS OF THE FLEXIBLE THREAD

I.A. Ilyin, I.V. Ilyina

Kamchatka State University by Vitus Bering, 683032, Petropavlovsk-Kamchatskiy,
Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: Ilyin@mail.ru

Mathematical modeling of dynamics of a flexible thread is spent. The technique which reduces an initial problem about dynamics of a flexible thread to a problem supposing simple realization for numerical algorithms is offered.

Key words: flexible thread, dynamic system, wave

© Ilyin I.A., Ilyina I.V., 2010

Введение

Многие задачи современного естествознания связаны с моделями, в которых в качестве основного элемента или объекта исследования выступает гибкая нить [1, 2]. Под гибкой нитью обычно понимается одномерная материальная система, которая под действием приложенных сил может принять форму любой гладкой геометрической линии.

В геометрии гибкая нить представляет собой тело, два измерения которого сравнимы между собой и бесконечно малы по сравнению с третьим. Если нить не оказывает сопротивления изгибу и кручению, то она называется идеальной нитью. Если идеальная нить может изменять свою длину, то она называется растяжимой. В противном случае нить называется нерастяжимой. В дальнейшем под термином «нить» мы будем понимать идеальную нерастяжимую или растяжимую нить.

Идеальная нить представляет собой удобную модель для решения ряда важных задач, связанных с исследованием динамики пряжи или нитки при работе ткацкого станка, динамики тросовых и вантовых систем, цепей, траловых систем, ваеров, канатов и т. д. Поэтому моделирование динамики нити и численная реализация этой модели имеют большое прикладное значение.

Постановка задачи

Координаты произвольной точки $M(X, Y, Z)$ нити представляют собой функции времени t и дуговой координаты s , являющейся натуральным параметром и отсчитываемой от фиксированной точки нити. Чаще всего в качестве такой точки выбирается один из концов нити.

В каждой точке нити определяется некоторое натяжение \mathbf{T} . В общем случае натяжение нити \mathbf{T} будет функцией двух переменных – дуговой координаты s и времени t :

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(s, t).$$

В произвольной точке M нити рассмотрим единичный касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$. Тогда можно записать:

$$\mathbf{T} = T\boldsymbol{\tau},$$

где T называется модулем натяжения нити.

Если нить является растяжимой, то будем полагать, что удлинение нити зависит только от натяжения :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = f(T)^2 s^2.$$

В случае упругого растяжения по закону Гука имеем:

$$f(T) = 1 + \alpha T.$$

Известно, что уравнения движения пространственной нити могут быть записаны в виде

$$\rho x_{tt} = T(x_s)_s + F_x, \quad (1)$$

$$\rho y_{tt} = T(y_s)_s + F_y, \quad (2)$$

$$\rho z_{tt} = T(z_s)_s + F_z, \quad (3)$$

$$x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 = 1, \quad (4)$$

где t – время, s – локальная координата вдоль нити (расстояние до начала нити); $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z = z(s, t)$ – координаты точки нити, лежащей на расстоянии s от начала в момент времени t .

Методика решения

Основная проблема анализа и численной реализации этой системы уравнений заключается в условии (4). Авторы сводят систему (1–4) к новой системе дифференциальных уравнений, которая допускает более простую реализацию.

Дифференцируя обе части (1), (2) и (3) по s и обозначая

$$X = x_s, \quad Y = y_s, \quad Z = z_s, \quad (F_x)_s = FX, \quad (F_y)_s = FY, \quad (F_z)_s = FZ,$$

приходим к системе:

$$L(s, t) = \rho X_{tt} - (TX)_{ss} - FX, \quad (5)$$

$$M(s, t) = \rho Y_{tt} - (TY)_{ss} - FY, \quad (6)$$

$$N(s, t) = \rho Z_{tt} - (TZ)_{ss} - FZ, \quad (7)$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2. \quad (8)$$

Введем новые неизвестные функции $a(s, t)$ и $b(s, t)$ по формулам:

$$X = \cos(a(s, t)) \cos(b(s, t)), \quad (9)$$

$$Y = \cos(a(s, t)) \sin(b(s, t)), \quad (10)$$

$$Z = \sin(a(s, t)). \quad (11)$$

При этом соотношение (8) оказывается выполненным. Для упрощения формул полагаем $\rho = 1$.

В результате преобразований относительно неизвестных $a(s, t)$, $b(s, t)$ и $T(s, t)$ получим систему трех дифференциальных уравнений:

$$a_{tt} = Ta_{ss} + 2T_s a_s + (Tb_s^2 - b_t^2) \sin a \cos a - FX \sin a \cos b - FY \sin a \sin b + FZ \cos a, \quad (12)$$

$$b_{tt} \cos^2 a = Tb_{ss} \cos^2 a + 2T_s b_s \cos^2 a + 2a_t b_t \sin a \cos a \quad (13)$$

$$-2Ta_s b_s \sin a \cos a - FX \sin b \cos a + FY \cos a \cos b,$$

$$T_{ss} = (a_s^2 + b_s^2 \cos^2 a)T - (a_t^2 + b_t^2 \cos^2 a) - FX \cos a \cos b - FY \cos a \sin b - FZ \sin a. \quad (14)$$

Заметим, что уравнение (13) тождественно выполняется при $\cos a = 0$. После сокращения этого уравнения на $\cos a$ оно преобразуется к виду

$$b_{tt} \cos a = T b_{ss} \cos a + 2T_s b_s \cos a + 2a_t b_t \sin a - 2T a_s b_s \sin a - F X \sin a + F Y \cos a.$$

Если в системе уравнений (1)–(4) $F_x = F_y = 0, F_z = \rho g$, то система упрощается:

$$a_{tt} = T a_{ss} + 2T_s a_s + (T b_s^2 - b_t^2) \sin a \cos a, \quad (15)$$

$$b_{tt} \cos a = T b_{ss} \cos a + 2T_s b_s \cos a + 2a_t b_t \sin a - 2T a_s b_s \sin a, \quad (16)$$

$$T_{ss} = (a_s^2 + b_s^2 \cos^2 a) T - (a_t^2 + b_t^2 \cos^2 a). \quad (17)$$

В случае плоского движения нити отсюда получаем:

$$\alpha_{tt} = T \alpha_{ss} + 2T_s \alpha_s, \quad (18)$$

$$T_{ss} = \alpha_s^2 T = -\alpha_t^2. \quad (19)$$

Относительно дальнейшего исследования или построения методов численной реализации системы уравнений (13)–(15) и (16)–(17) представляются более удачными, нежели исходная система уравнений (1)–(4). Введем обозначения:

$$\Psi a = a_{tt} - T a_{ss} - 2T_s a_s, \quad (20)$$

$$\Phi a = T a_s^2 - a_t^2. \quad (21)$$

Тогда уравнения (13)–(15) можно представить в виде

$$\Psi = \sin a \cos a \Phi b, \quad (22)$$

$$\Psi b = 2(a_t b_t - T a_s b_s) \operatorname{tg} a, \quad (23)$$

$$T_{ss} = \Phi a + \cos^2 a \Phi b. \quad (24)$$

Из последнего уравнения находим

$$\Phi b = \frac{1}{\cos^2 a} (T_{ss} - \Phi a).$$

Подставляя полученное выражение в (20), получаем:

$$\Psi a = (T_{ss} - \Phi a) \operatorname{tg} a,$$

или в развернутом виде

$$a_{tt} - T a_{ss} - 2T_s a_s = (T_{ss} - T a_s^2 + a_t^2) \operatorname{tg} a. \quad (25)$$

Примечательно, что в это уравнение не входит переменная b .

Заметим, что в плоскости $b = \text{const}$ координаты единичного касательного к нити вектора будут $[\cos a, \sin a]$, поэтому вектор

$$[a_{tt} - Ta_{ss} - 2a_s T_s, Ta_s^2 - T_{ss} - a_t^2]$$

направлен по бинормали к нити и предыдущее равенство эквивалентно обращению вектора бинормали в нуль-вектор.

В заключение рассмотрим задачу о распространении волны вдоль гибкой нити. Вначале рассмотрим плоский случай движения тонкой нити в переменных α, T :

$$T_{ss} + \alpha_s^2 T = -\alpha_t^2, \quad (26)$$

$$\alpha_{tt} = T \alpha_{ss} + 2T_s \alpha_s. \quad (27)$$

Решение этой системы будем искать в виде волны, распространяющейся вдоль нити со скоростью a , а именно:

$$T(s, t) = T(s - at), \quad (28)$$

$$\alpha(s, t) = \alpha(s - at). \quad (29)$$

Введем обозначение:

$$z = s - at. \quad (30)$$

Заметим, что если

$$W(s, t) = W(s - at), \quad (31)$$

то

$$W_s = W_z = W', \quad W_t = -aW_z - aW'. \quad (32)$$

Подставляя предполагаемое решение (28), (29) в систему (26), (27) и учитывая соотношения (32), получим:

$$T'' = \alpha'^2 (T - a^2), \quad (33)$$

$$\alpha'' (T - a^2) + 2\alpha' T' = 0. \quad (34)$$

Обозначим $\alpha' = \beta$ и приведем уравнение (34) к виду

$$\frac{\beta'}{\beta} = -\frac{2T'}{T - a^2},$$

откуда после интегрирования получим:

$$\beta (T - a^2)^2 = C_1,$$

или

$$\alpha' (T - a^2)^2 = C_1 = \text{const}. \quad (35)$$

Соотношение (35) имеет смысл закона сохранения для уравнений плоского движения тонкой нити.

Заметим, что знак постоянной C_1 совпадает со знаком величины β , которая имеет смысл кривизны нити в точке s в момент времени t .

Из выражения (35), в частности, следует, что если $T = \text{const}$, то α зависит от z линейно.

С учетом соотношения (35) уравнение (34) можно записать в виде

$$S'' = \frac{C_1^2}{s^2}, \quad (36)$$

где $S = T - a^2$.

Умножая обе части уравнения (36) на S' и интегрируя, получим:

$$(S')^2 + \frac{C_1^2}{s^2} = C_2 = \text{const} \geq 0. \quad (37)$$

Поскольку $\beta S^2 = C_1$, то последнее соотношение можно переписать в виде

$$(T')^2 + \alpha' C_1 = C_2 \geq 0. \quad (38)$$

Соотношение (38) также имеет смысл закона сохранения.

Умножая уравнение (37) на S^2 и интегрируя, получим:

$$\left((S^2)' \right)^2 = 4(C_2 S^2 - C_1^2).$$

Вводя обозначение $Z = S^2$, из последнего равенства получаем:

$$Z' = \pm 2\sqrt{C_2 Z - C_1^2},$$

откуда после интегрирования приходим к соотношению

$$\sqrt{C_2 Z - C_1^2} = \pm C_2 z + C_3, \quad (39)$$

где $z = s - at$.

Выражая Z через T , получаем:

$$T(s, t) = a^2 \pm \sqrt{\frac{C_1^2 + (C_2(s - at) \pm C_3)^2}{C_2}}. \quad (40)$$

Теперь из уравнения (35) получаем:

$$\alpha' = \frac{C_1 C_2}{C_1^2 + (C_2 z \pm C_3)^2},$$

откуда

$$\alpha(s, t) = \arctg \left(\frac{C_2(s - at) \pm C_3}{C_1} + C_4 \right). \quad (41)$$

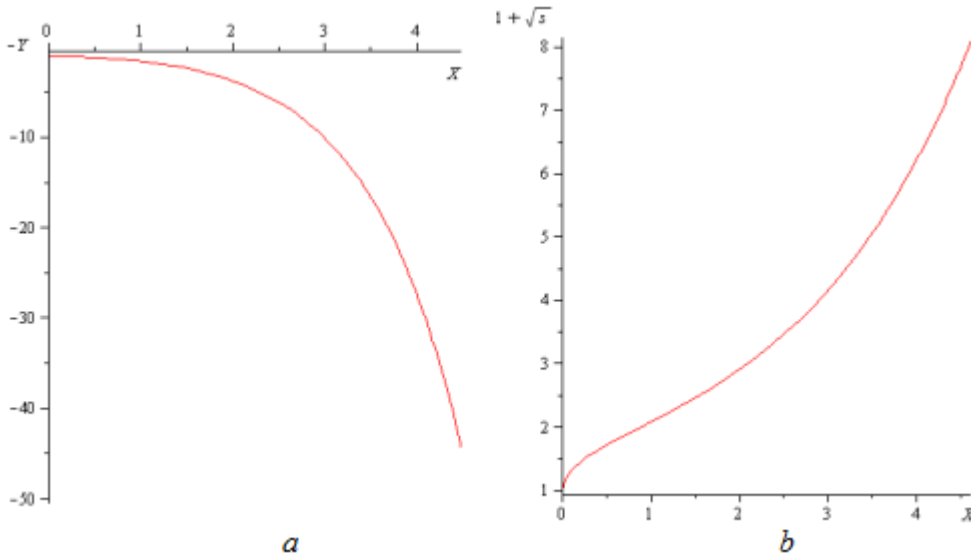
Выражения (40), (41) дают решение поставленной задачи.

Учитывая связь между переменной $\alpha(s, t)$ и координатами $X(s, t), Y(s, t)$ получим:

$$X(s, t) = X_0 + \int_0^s \cos \alpha(s, t) ds = X_0 + \int_0^s \cos \arctg \left(\frac{C_2(s - at) \pm C_3}{C_1} + C_4 \right) ds,$$

$$Y(s, t) = Y_0 + \int_0^s \sin \alpha(s, t) ds = Y_0 + \int_0^s \sin \arctg\left(\frac{C_2(s - at) \pm C_3}{C_1} + C_4\right) ds.$$

В качестве иллюстрации на рисунке приведены графики профилей волны и натяжения при $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = C_4 = 0$.



Графики профилей волны (а) и натяжения (б)

Уравнения динамики растяжимой нити менее исследованы, хотя практически все указанные системы при больших натяжениях описываются как раз с помощью уравнений динамики растяжимой нити.

Рассмотрим плоское движение растяжимой нити, определенное формулами

$$\rho x_{tt} = T(x_s)_s + F_x,$$

$$\rho y_{tt} = T(y_s)_s + F_y,$$

$$x_s^2 + y_s^2 = f^2(T(s, t)).$$

Последнее уравнение описывает удлинение нити под действием сил натяжения. Для нерастяжимой нити это уравнение принимает вид

$$x_s^2 + y_s^2 = f^2(T(s, t)).$$

Физический смысл f заключается в том, что это есть коэффициент перехода от геометрических координат x, y, z к локальным (местным) координатам вдоль нити. Конкретный вид этого коэффициента определяется физическими свойствами нити и условиями ее нагружения. Если, например, растяжение происходит в рамках действия закона Гука, то

$$f = f(T(s, t)) = 1 + KT(s, t).$$

В общем случае коэффициент f является функцией натяжения T , локальной координаты s и времени t : $f = f(T(s, t), s, t)$. Поступая по аналогии с преобразованием системы (1)–(4), приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned}
& -\cos a Fx - \sin a Fy + f_{tt} + T_t^2 f_{TT} - \\
& -2T_s f_s - T_{ss} f - f_{ss} T + a_s^2 f T - T_s^2 f_{TT} - 2T_s f_{TT} T - T_{ss} f T - \\
& -a_t^2 f + 2T_t f_{TT} - 2T_s^2 f T + T_{tt} f T = 0,
\end{aligned} \tag{42}$$

$$-2a_t T_t f_t - 2a_t f_t + 2T_s a_s f T + 2T_s a_s f - a_{tt} f + 2a_s f_s T + a_{ss} f T - \sin a Fx + \cos a Fy = 0. \tag{43}$$

В наиболее интересном для практики случае коэффициент f зависит только от натяжения: $f = f(T(s, t))$, тогда полученные уравнения принимают вид:

$$-2a_t T_t f - a_{tt} f + a_{ss} f T + 2a_s T_s f T + 2a_s T_s f = 0, \tag{44}$$

$$T_t^2 f_{TT} + T_{tt} f T - a_t^2 f - T_{ss} f - T_{ss} f T - T_s^2 f_{TT} T - 2T_s^2 f T + a_s^2 f T = 0. \tag{45}$$

Наконец, в случае растяжения по закону Гука уравнения принимают следующий вид:

$$-2T_t a_t K + a_{ss} T + a_{ss} T^2 K + 2a_s T_s + 4a_s T_s K T - a_{tt} - a_{tt} K T = 0, \tag{46}$$

$$-a_t^2 - a_t^2 K T + T_{tt} K - 2T_s^2 K + a_s^2 T + a_s^2 T^2 K - 2T_{ss} K T - T_{ss} = 0. \tag{47}$$

Заключение

Для дальнейшего исследования или численной реализации полученные системы уравнений относительно неизвестных $a(s, t)$ и $T(s, t)$ представляются более удачными, нежели исходная система уравнений.

Библиографический список

1. Альтшуль Б.А., Фридман А.Л. Динамика траловой системы. М.: Судостроение, 1989. 240 с.
2. Белецкий В.В., Левин Е. М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 10.05.10