

УДК 517.956

**НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО
ТИПА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ, ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ
КОТОРОЙ ПРЯМОУГОЛЬНИК**

Р.Т. Зуннунов¹, М.А. Мамасолиева²

¹ Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. ВУЗ городок

² Кокандский государственный педагогический университет им. Мукини,
113000, Узбекистан, г. Коканд, ул. Амира Темура, 37

E-mail: zunnunov@mail.ru

В статье для уравнения смешанного типа в неограниченной области эллиптическая часть которой прямоугольник, доказана однозначная разрешимость одной нелокальной краевой задачи. Единственность решения доказана методом интегралов энергии, а существование методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: уравнения смешанного типа, нелокальная краевая задача, метод интегралов энергии, метод интегральных уравнений.

© Зуннунов Р.Т., Мамасолиева М.А., 2014

MSC 35M10

**A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED-TYPE
EQUATION IN AN UNBOUNDED DOMAIN, WHICH IS PART OF AN
ELLIPTIC RECTANGLE**

R.T. Zunnunov¹, M.A. Mamasolieva²

¹ National University of Uzbekistan by Mirzo Ulugbeka, 100174, Uzbekistan,
Tashkent c., VUZ gorodok st.

² Kokand State Pedagogical Institute by Mukini, 113000, Uzbekistan, Kokand, Amira
Temura st. 37

E-mail: zunnunov@mail.ru

In an article for mixed-type equation in an unbounded domain elliptic part is a rectangle, the unique solvability of a nonlocal boundary value problem. The uniqueness of the solution is proved by energy integrals, and the existence of the method of integral equations.

Key words: mixed-type equation, the nonlocal boundary value problem, a method of energy integrals, the method of integral equations

© Zunnunov R.T., Mamasolieva M.A., 2014

Введение

Математический аппарат дифференциальных уравнений смешанного типа является эффективным инструментом в решении прикладных задач физики. В настоящее время математическая теория бурно развивается чему свидетельствует множество работ посвященных этой проблематике. Не исключением является и наша статья

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0, \quad m = \operatorname{const} > 0, \quad (1)$$

в неограниченной смешанной области:

$$\Omega = \Omega^+ \cup AB \cup \Omega^-,$$

где $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, $AB = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$, а Ω^- – область, ограниченная полупрямой $\sigma = \{(x, y) : 0 \leq x < \infty, y = 0\}$ и характеристикой $\Gamma : \xi = 0$ уравнения (1), где $\xi = x - [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2}$. Предположим, что $\lambda = \lambda_1$ в Ω^+ и $\lambda = \lambda_2$ в Ω^- , и λ_1, λ_2 – заданные действительные числа.

Пусть $k = \operatorname{const} > 1$, $a = 2/(1+k)$, $0 < a < 1$ а $\theta_0(x)$ и $\theta_k(x)$ – есть точки пересечения характеристики Γ уравнения (1) с линиями $x + [2j/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = x_0$, ($0 < x_0 < 1$) при $j = 1$ и $j = k$ соответственно, с координатами

$$\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, - \left[\frac{m+2}{4} \cdot x \right]^{2/(m+2)} \right), \theta_k(x) = \left(\frac{x}{k+1}, - \left[\frac{m+2}{2(k+1)} \cdot x \right]^{2/(m+2)} \right).$$

Введем следующие обозначения:

$$\beta = m/(2m+4),$$

$$\sigma_1 = \{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\},$$

$$\sigma_2 = \{(x, y) : y = 1, 0 < x < 1\},$$

$$\sigma_3 = \{(x, y) : x = 1, 0 < y < 1\},$$

$$\sigma_4 = \{(x, y) : 1 < x < \infty,$$

$$y = 0\}, \Gamma_1 = \Gamma \cap (0 < \eta < 1), \Gamma_2 : \xi = 1,$$

$$\Gamma_3 = \Omega^- \cap (\eta = 1), \Gamma_4 = \Gamma \cap (\eta > 1),$$

$$\eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2},$$

Ω_1^- – характеристический треугольник, ограниченный отрезком AB и характеристиками Γ_1 и Γ_2 , Ω_2^- – неограниченный характеристический четырехугольник ограниченный характеристиками Γ_2, Γ_3 и Γ_4 , а Ω_3^- – неограниченный характеристический треугольник ограниченный полупрямой σ_4 и характеристикой Γ_2 уравнения (1).

Задача T_n^∞ . Найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega \setminus (\Gamma_2 \cup \Gamma_3)) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega_1^- \cup \Omega_2^- \cup \Omega_3^-)$, а $u_y(x, 0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше чем $1 - 2\beta$ при $x \rightarrow 1$;

2) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в областях $\Omega^+, \Omega_1^-, \Omega_2^-$ и Ω_3^- .

3) $u(x, y)$ удовлетворяет следующим условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (2)$$

$$u(x, 1) = \varphi_3(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi_4(x), \quad 1 \leq x < +\infty, \quad (4)$$

$$u|_{\Gamma_4} = \psi_1(x), \quad 1/2 \leq x < +\infty, \quad (5)$$

$$A_{0x}^{1, \lambda_2} \left\{ D_{0x}^{1-\beta} u[\theta_0(x)] \right\} + \omega(x) A_{0x}^{1, a\lambda_2} \left\{ D_{0x}^{1-\beta} u[\theta_k(x)] \right\} = \delta(x), \quad 0 < x < 1, \quad (6)$$

где $\omega(x)$, $\delta(x)$, $\varphi_3(x)$, $\varphi_4(x)$, $\varphi_5(x)$, $\varphi_i(y)$ ($i = 1, 2$) – заданные функции, причем $\varphi_i(y) \in C[0, 1]$; $\omega(x)$, $\delta(x)$, $\varphi_3(x) \in C[0, 1]$; $\varphi_4(x) \in C[1, +\infty)$; $\psi_1(x)$ – непрерывная и ограниченная функция на промежутке $[1/2, +\infty)$.

Для заданных функций выполняются условия согласования:

$$\varphi_4(1) = \varphi_2(0), \quad \varphi_1(1) = \varphi_3(0), \quad \varphi_2(1) = \varphi_3(1),$$

$$\psi_1(1/2) = \frac{1}{\sin \pi \beta} \int_0^1 [z(1-z)]^{-\beta} \bar{I}_{-\beta} \left[\lambda_2 \sqrt{z(1-z)} \right] F_1(z) dz.$$

Здесь $\bar{I}_p[x] = \Gamma(p+1)(x/2)^{-p} I_p[x]$, а $I_p[x]$ – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка p [1];

$$F_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(-a^{1-2\beta} \right)^j \varpi_j(x) \delta_1(a^j x),$$

$$\delta_1(x) = \Gamma(\beta) x^\beta \delta(x),$$

$$\varpi_n(x) = \omega(x) \omega(ax) \dots \omega(a^{n-1}x), \quad \varpi_0(x) = 1.$$

Условие (6) связывает значения искомой функции в двух точках, лежащих на характеристике Γ_1 . В силу обратимости операторов $A_{sx}^{1, \lambda}$ [2] и D_{sx}^δ [3] из задачи T_n^∞ в частном случае при $\omega(x) \equiv 0$ следует задача Трикоми для уравнения (1) в области Ω .

Целью настоящей работы является доказательство существования и единственности решения задачи T_n^∞ .

Пусть $u(x, y)$ – решение задачи T_n^∞ . Введем обозначения:

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < 1.$$

Теорема 1. Пусть

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(x) \in C^{(0, \alpha)}[0, 1], \quad \alpha > 1 - 2\beta \quad (7)$$

и

$$\max_{[0,1]} |\omega(x)| = M_0 < a^{2\beta-1}, M_0 = const > 0 \quad (8)$$

тогда задача T_n^∞ не может иметь более одного решения.

Доказательство. Известно [4], что решение задачи T_n^∞ в области Ω_1^- удовлетворяющее условиям $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1), v(x) \in C^2(0,1)$ представимо в виде

$$\begin{aligned} u(x,y) = \gamma_1 \int_0^1 \frac{\tau[x+\sigma(2t-1)]}{[t(1-t)]^{1-\beta}} \bar{I}_{\beta-1} [2\lambda_2\sigma\sqrt{t(1-t)}] dt + \\ + \gamma_2 \int_0^1 \frac{v[x+\sigma(2t-1)]}{[t(1-t)]^\beta} \bar{I}_{-\beta} [2\lambda_2\sigma\sqrt{t(1-t)}] dt, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\sigma = [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2}$, $\gamma_1 = \Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2 = \Gamma(2-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$. Пользуясь (9) и проводя аналогичные преобразования как в работе [2], имеем

$$A_{0x}^{1,\lambda_2} \left\{ D_{0x}^{1-\beta} u(\theta_0(x)) \right\} = \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(\beta)} \left\{ \Gamma(2\beta) C_{0x}^{1,\lambda_2} [\tau(x)] - \frac{\pi\gamma_3 v(x)}{\sin(2\beta\pi)} \right\}, \quad (10)$$

$$A_{0x}^{1,a\lambda_2} \left\{ D_{0x}^{1-\beta} u(\theta_{0k}(x)) \right\} = \frac{a^{1-2\beta} x^{-\beta}}{\Gamma(\beta)} \left\{ \Gamma(2\beta) C_{0ax}^{1,\lambda_2} [\tau(x)] - \frac{\pi\gamma_3 v(ax)}{\sin(2\beta\pi)} \right\},$$

где $\gamma_3 = \Gamma(\beta)(2-4\beta)^{2\beta}/[2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)]$.

Подставляя (10) в (6) получим функциональное уравнение вида

$$\Phi(x) + a^{1-2\beta} \omega(x) \Phi(ax) = \delta_1(x), \quad 0 < x < 1, \quad (11)$$

где

$$\Phi(x) = \Gamma(2\beta) C_{0x}^{1,\lambda_2} [\tau(x)] - \frac{\pi\gamma_3}{\sin(2\beta\pi)} v(x), \quad (12)$$

$$\Phi(ax) = \Gamma(2\beta) C_{0(ax)}^{1,\lambda_2} [\tau(x)] - \frac{\pi\gamma_3}{\sin(2\beta\pi)} v(ax).$$

Применив метод итераций [5] к решению функционального уравнения (10), для n -ой итерации имеем;

$$\Phi(x) = (-a^{1-2\beta})^n \omega_n(x) \Phi(a^n x) + \sum_{j=0}^{n-1} (-a^{1-2\beta})^j \omega_j(x) \delta_1(a^j x), \quad (13)$$

Функцию $\Phi(x)$ будем искать в классе функций $C(0,1)$ и ограниченных при $x=0$. Переходя в (13) к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая (8), $0 < a < 1$, $0 < M_0 a^{2\beta-1} < 1$ а также ограниченность искомой функции $\Phi(x)$, получим

$$\Phi(x) = F_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (14)$$

Учитывая (12), из (14), получим функциональное соотношение, между $\tau(x)$ и $v(x)$ на AB , принесенное из области Ω_1^- :

$$v(x) = \gamma_4 C_{0x}^{1,\lambda_2} [\tau(x)] - \frac{\gamma_4}{\Gamma(2\beta)} F_1(x), \quad (15)$$

где $\gamma_4 = \Gamma(2\beta) \sin(2\beta\pi) / \pi\gamma_3$.

В силу $0 < a < 1$, $0 < M_0 a^{2\beta-1} < 1$ и $\delta(x) \in C[0, 1]$, ряд в составе $F_1(x)$ сходится абсолютно равномерно, при $x \in [0, 1]$.

Пусть $u(x, y)$ решение однородной задачи T_n^∞ . При этом $\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(y) \equiv \varphi_3(x) \equiv \varphi_4(x) \equiv \psi_1(x) \equiv F_1(x) \equiv 0$ и в области Ω^+ справедливо тождество

$$(y^m uu_x)_x + (uu_y)_y - y^m (u_x)^2 - (u_y)^2 - y^m \lambda_1^2 u = 0, \tag{16}$$

Интегрируя тождество (16) по области Ω^+ и применяя формулу Гаусса-Остроградского имеем

$$\iint_{\Omega^+} [y^m (u_x)^2 + (u_x)^2 + \lambda_1^2 y^m u^2] dx dy + \int_0^1 \tau(x) v(x) dx = 0. \tag{17}$$

Рассмотрим интеграл

$$\Delta = \int_0^1 \tau(x) v(x) dx. \tag{18}$$

Обращая равенство (15) относительно $\tau(x)$ при $F_1(x) \equiv 0$ с учетом условий (7), получим

$$\tau(x) = \gamma_4 \int_0^x v(t) (x-t)^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(x-t)] dt. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18) и учитывая формулы [1]-[2]

$$|x-t|^{-2\beta} = \frac{1}{\Gamma(2\beta) \cos \pi\beta} \int_0^\infty z^{2\beta-1} \cos z(x-t) dz,$$

$$J_{-\beta}[\lambda_2(x-t)] = \frac{|\lambda_2(x-t)/2|^{-\beta}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-\beta)} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\beta-1/2} \cos \lambda_2 \xi(x-t) d\xi,$$

после несложных преобразований, имеем

$$\Delta = \frac{\gamma_4}{2\sqrt{\pi}\Gamma(2\beta) \cos \pi\beta} \int_0^{+\infty} z^{2\beta-1} dz \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\beta-1/2} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^2 \left[\left(\int_0^1 v(t) \sin t z_j dt \right)^2 + \left(\int_0^1 v(t) \cos t z_j dt \right)^2 \right] d\xi,$$

где $z_j = z - (-1)^j \lambda_2 \xi$, и откуда следует что $\Delta \geq 0$. Учитывая $\Delta \geq 0$ и $u(x, y) \equiv 0$ на $\bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_2 \cup \bar{\sigma}_3$, из (17) при $\lambda_1 \neq 0$ получим что $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}^+$. Если $\lambda_1 = 0$, то $u(x, y) \equiv const$ в $\bar{\Omega}^+$. В силу нулевых граничных условий и в этом случае получаем $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}^+$.

Тогда $\tau(x) \equiv 0$ на \overline{AB} , откуда из (15) следует, что $v(x) \equiv 0$ на \overline{AB} . Тогда, согласно формуле (9), $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_1^-$.

Регулярное решение задачи Гурса в области Ω_2^- удовлетворяющее условию (5) и

$$u|_{\Gamma_3} = \psi_2(x), 1/2 \leq x \leq 1$$

имеет вид

$$u(x, y) = \Phi(\psi_1, \psi_2), \quad (20)$$

где $\psi_2(x) \in C[1/2, 1] \cap C^2(1/2, 1)$ и

$$\begin{aligned} \psi_2(x) = & \gamma_1 \int_0^1 \frac{\tau [x + (1-x)(2t-1)]}{[t(1-t)]^{1-\beta}} \bar{I}_{\beta-1} \left[2\lambda_2 (1-x) \sqrt{t(1-t)} \right] dt + \\ & + \gamma_2 y \int_0^1 \frac{v [x + (1-x)(2t-1)]}{[t(1-t)]^\beta} \bar{I}_{-\beta} \left[2\lambda_2 (1-x) \sqrt{t(1-t)} \right] dt. \end{aligned} \quad (21)$$

Следовательно, учитывая функциональное соотношение (21) имеем $\psi_1(x) \equiv \psi_2(x) \equiv 0$. Отсюда из (20) получим $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_2^-$.

Регулярное решение задачи Дарбу в области Ω_3^- удовлетворяющее условию (4) и

$$u|_{\Gamma_2} = \psi_3(x), 1 \leq x < +\infty$$

имеет вид [2]

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \gamma_4 \int_1^\xi [(\xi-t)(\eta-t)]^{\beta-1} \bar{J}_{\beta-1} \left[\lambda_2 \sqrt{(\xi-t)(\eta-t)} \right] \varphi_4(t) dt + \\ & + \int_1^\eta \Phi_1(t) v(0, t; \xi, \eta) dt, \end{aligned} \quad (22)$$

где $\Phi_1(t) = \psi_3'(t/2) + 2\beta \psi_3(t/2)/t, \psi_3(t) \in C[1, +\infty] \cap C^2(1, +\infty)$,

$$v(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \begin{cases} v_1(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0), \eta > \xi_0, \\ v_3(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0), \eta < \xi_0 \end{cases}$$

$$v_1(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \left(\frac{\eta - \xi}{\eta_0 - \xi_0} \right)^\beta \Xi_2(\beta, 1 - \beta, 1; s_1, s_2),$$

$$v_3(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = k \frac{(\eta - \xi)(\eta_0 - \xi_0)^{1-2\beta}}{(\eta_0 - \eta)^{1-\beta} (\xi_0 - \xi)^{1-\beta}} H_3 \left(1 - \beta, 1 - \beta, 2 - 2\beta; \frac{1}{s_1}, s_2 \right).$$

Ξ_2 и H_3 – гипергеометрические функции Гумберта и Горна [6], а

$$s_1 = \frac{(\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta)}{(\eta_0 - \xi_0)(\eta - \xi)}, s_2 = \frac{\lambda_2^2}{4} (\xi_0 - \xi)(\eta_0 - \eta), k = \frac{\Gamma(1 - \beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(2 - 2\beta)}.$$

Функциональное соотношение на характеристике Γ_2 имеет вид

$$\psi_3(x) = \Phi(\psi_1, \psi_2).$$

Так как $\varphi_4(x) \equiv \psi_3(x) \equiv 0$, то из (22) получим $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_3^-$. Следовательно $u(x,y) \equiv 0$, в $\bar{\Omega}$, откуда следует единственность решения задачи T_n^∞ .

Теперь переходим к доказательству существования решения задачи T_n^∞ . При этом от заданные функции удовлетворяют следующим условиям, $\delta(x) = x^{1-\beta} \delta_0(x), \delta_0(x) \in C^2[0, 1], \varphi_4(x) \in C[1/2, +\infty) \cap C^2(1/2, +\infty), \varphi_j(y) = y^2 \bar{\varphi}_j(y), \bar{\varphi}_j(y) \in C[0, 1], \omega(x) \in C^2[0, 1]$.

Нетрудно убедиться, что решение задачи N для уравнения (1) в области Ω^+ имеет вид

$$u(x,y) = - \int_0^1 v(\xi) G(\xi, 0; x, y; \lambda_1) d\xi - \int_0^1 \eta^m \varphi_1(\eta) G_\xi(0, \eta; x, y; \lambda_1) d\eta + \quad (23)$$

$$+ \int_0^1 \eta^m \varphi_2(\eta) G_\xi(1, \eta; x, y; \lambda_1) d\eta - \int_0^1 \varphi_3(\xi) G_\eta(\xi, 1; x, y; \lambda_1) d\xi.$$

Здесь $G(\xi, \eta; x, y; \lambda_1)$ – функция Грина задачи N , имеющая вид

$$G(\xi, \eta; x, y; \lambda_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [G_\Gamma(\xi + 2n, \eta; x, y; \lambda_1) - G_\Gamma(-\xi + 2n, \eta; x, y; \lambda_1)],$$

где $G_\Gamma(\xi, \eta; x, y; \lambda_1)$ – функция Грина для горизонтальной полуполосы, которая имеет вид:

$$G(\xi, \eta; x, y; \lambda_1) = \begin{cases} G_1(\xi, \eta; x, y; \lambda_1), & y \leq \eta \leq 1, \\ G_2(\xi, \eta; x, y; \lambda_1), & 0 \leq \eta \leq y, \end{cases}$$

$$G_1(\xi, \eta; x, y; \lambda_1) = - \frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_\alpha[2\alpha\mu]}{I_{-\alpha}[2\alpha\mu]} I_\alpha \left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}} \right] I_\alpha \left[2\alpha\mu \eta^{\frac{m+2}{2}} \right] \sin \rho x \sin \rho \xi d\rho -$$

$$- \frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_\alpha[2\alpha\mu]}{a_1 I_{-\alpha}[2\alpha\mu]} K_\alpha \left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}} \right] I_\alpha \left[2\alpha\mu \eta^{\frac{m+2}{2}} \right] \sin \rho x \sin \rho \xi d\rho +$$

$$+ \frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_\alpha[2\alpha\mu]}{I_{-\alpha}[2\alpha\mu]} I_\alpha \left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}} \right] K_\alpha \left[2\alpha\mu \eta^{\frac{m+2}{2}} \right] \sin \rho x \sin \rho \xi d\rho +$$

$$+ \frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_\alpha[2\alpha\mu]}{a_1 I_{-\alpha}[2\alpha\mu]} K_\alpha \left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}} \right] K_\alpha \left[2\alpha\mu \eta^{\frac{m+2}{2}} \right] \sin \rho x \sin \rho \xi d\rho,$$

$$G_2(\xi, \eta; x, y; \lambda_1) = - \frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_\alpha[2\alpha\mu]}{I_{-\alpha}[2\alpha\mu]} I_\alpha \left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}} \right] I_\alpha \left[2\alpha\mu \eta^{\frac{m+2}{2}} \right] \sin \rho x \sin \rho \xi d\rho +$$

$$- \frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_\alpha[2\alpha\mu]}{a_1 I_{-\alpha}[2\alpha\mu]} K_\alpha \left[2\alpha\mu \eta^{\frac{m+2}{2}} \right] I_\alpha \left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}} \right] \sin \rho x \sin \rho \xi d\rho +$$

$$+ \frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_\alpha[2\alpha\mu]}{I_{-\alpha}[2\alpha\mu]} I_\alpha \left[2\alpha\mu \eta^{\frac{m+2}{2}} \right] K_\alpha \left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}} \right] \sin \rho x \sin \rho \xi d\rho +$$

$$+ \frac{4\alpha\sqrt{y\eta}}{\pi} \int_0^\infty \frac{I_\alpha[2\alpha\mu]}{a_1 I_{-\alpha}[2\alpha\mu]} K_\alpha \left[2\alpha\mu y^{\frac{m+2}{2}} \right] K_\alpha \left[2\alpha\mu \eta^{\frac{m+2}{2}} \right] \sin \rho x \sin \rho \xi \, d\rho,$$

$$\alpha = \frac{1}{m+2}, \quad a_1 = \frac{\pi}{2 \sin \alpha \pi}, \quad \mu^2 = \rho^2 + \lambda_1^2.$$

Здесь $K_\alpha[z]$ - модифицированная функция Бесселя второго рода [1].

Из (23) при $y \rightarrow 0$ получаем фундаментальное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное на AB из эллиптической Ω^+ части смешанной области Ω в следующем виде

$$\tau(x) = - \int_0^1 v(t) H_1(x,t) dt - \int_0^1 v(t) H_2(x,t) dt + F_2(x), \tag{24}$$

$$H_1(x,t) = k_1 \left\{ |x-t|^{-2\beta} - (x+t)^{-2\beta} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^\infty \left[(2n-x+t)^{-2\beta} - (2n-x-t)^{-2\beta} + (2n+x-t)^{-2\beta} - (2n+x+t)^{-2\beta} \right] \right\},$$

$$H_2(x,t) = f(x,t) + \sum_{n=1}^\infty [f(x,t+2n) + f(x,t-2n)]$$

$$f(x,t) = k_2 \sum_{k=1}^\infty \frac{|\lambda_1|^k}{\Gamma(k-\beta+1)k!} \left[\left(\frac{|x-t|}{2} \right)^{2k-2\beta} - \left(\frac{x+t}{2} \right)^{2k-2\beta} \right] +$$

$$+ k_3 \left[(x+t)^{-\beta} I_\beta((x+t)|\lambda_1|) - |x-t|^{-\beta} I_\beta(|x-t||\lambda_1|) \right] +$$

$$+ k_4 \int_0^\infty \frac{K_{1/2-\beta}[(1-2\beta)\sqrt{\rho^2+\lambda_1^2}]}{I_{\beta-1/2}[(1-2\beta)\sqrt{\rho^2+\lambda_1^2}]} [\rho^2 + \lambda_1^2] \sin \rho x \sin \rho \xi \, d\rho,$$

$$F_2(x) = - \int_0^\infty \eta^m \varphi_1(\eta) G_\xi(0, \eta; x, 0; \lambda_1) d\eta + \int_0^\infty \eta^m \varphi_2(\eta) G_\xi(1, \eta; x, 0; \lambda_1) d\eta -$$

$$- \int_0^1 \varphi_3(\xi) G_\eta(\xi, 1; x, 0; \lambda_1) d\xi,$$

$$k_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2\beta} \frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}, \quad k_2 = \frac{(m+2)^{-2\beta} \sqrt{\pi}}{2\Gamma^2(1/2+\beta)}, \quad k_3 = |2\lambda_1|^\beta, \quad k_4 = \frac{4(m+2)^{-2\beta}}{\pi\Gamma^2(1/2+\beta)}.$$

Исключая функцию $\tau(x)$ в (15) и (24) получим сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $v(x)$ в виде:

$$v(x) + \gamma_5 \int_0^1 v(t) K(x,t) dt = \int_0^1 v(t) L(x,t) dt + F_3(x), \tag{25}$$

где

$$K(x,t) = \left(\frac{x}{t} \right)^{2\beta} \left\{ \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} - \sum_{n=1}^\infty \left\{ \left(\frac{t}{2n-t} \right)^{2\beta} \left(\frac{1}{2n-t+x} + \frac{1}{2n-t-x} \right) - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{t}{2n+t} \right)^{2\beta} \left(\frac{1}{2n+t-x} + \frac{1}{2n+t+x} \right) \Bigg\}, \\
 L_1(x,t) = & \frac{\gamma_4}{\Gamma(2\beta)(1+\sin\pi\beta)} \left\{ \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\xi)^{2\beta-1} [H_2(\xi,t) [1 - \bar{J}_\beta[\lambda_2(x-\xi)]] \right. \\
 & \left. - \frac{\lambda_2^2}{2(1+\beta)\Gamma(1+2\beta)} \int_0^x (x-\xi)^{2\beta} \bar{J}_{\beta+1}[\lambda(x-\xi)] H_2(\xi,t) d\xi \right\}, \\
 F_3(x) = & \frac{\gamma_4}{(1+\sin\pi\beta)} \left\{ C_{0x}^{1,\lambda} [F_2(x)] - \frac{1}{\Gamma(2\beta)} F_1(x) \right\}, \\
 & \gamma_5 = \cos\pi\beta / \pi(1+\sin\pi\beta).
 \end{aligned}$$

В силу условий, наложенных на заданные функции имеем $F_3(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, причем $F_3(x) = O(x^{2\beta})$.

Теперь переходим к решению уравнения (19) с этой целью запишем его в виде

$$v(x) + \gamma_5 \int_0^1 v(t) K(x,t) dt = F_4(x), \tag{26}$$

где $F_4(x) = F_3(x) - \int_0^1 v(t) L(x,t) dt$.

Полагая $v(x) = x^{2\beta} \mu(x)$, $K(x,t) = \left(\frac{x}{t}\right)^{2\beta} K_1(x,t)$, $F_4(x) = x^{2\beta} F_5(x)$, приведем уравнение (26) к виду

$$\mu(x) + \gamma_5 \int_0^1 \mu(t) K_1(x,t) dt = F_5(x), \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned}
 K_1(x,t) = & \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{t}{2n-t} \right)^{2\beta} \left(\frac{1}{2n-t+x} + \frac{1}{2n-t-x} \right) - \right. \\
 & \left. - \left(\frac{t}{2n+t} \right)^{2\beta} \left(\frac{1}{2n+t-x} + \frac{1}{2n+t+x} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Найдем с начала функцию $K_0(x,t)$, имеющую те же линии особенностей что и ядро $K_1(x,t)$ и такую что сингулярное интегральное уравнение с ядром $K_0(x,t)$ допускает решение в замкнутом виде.

В качестве ядра $K_0(x,t)$ возьмем выражение

$$K_0(x,t) = \frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+t+x} + \frac{1}{2n+t-x} - \frac{1}{2n-t+x} - \frac{1}{2n-t-x} \right).$$

И запишем уравнение (27) в виде

$$\mu(x) + \gamma_5 \int_0^1 \mu(t) K_0(x,t) dt = F_5(x) - \gamma_5 \int_0^1 \Delta K(x,t) \mu(t) dt \tag{28}$$

где $\Delta K(x, t) = K_0(x, t) - K_1(x, t)$.

Пользуясь разложением ядер $K_1(x, t)$ и $K_0(x, t)$ функцию $\Delta K(x, t)$ можно писать в виде:

$$\Delta K(x, t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(2n-t)^{1-2\beta} [(2n-t)^{2\beta} - t^{2\beta}]}{(2n-t)^2 - x^2} - \frac{(2n+t)^{1-2\beta} [(2n+t)^{2\beta} - t^{2\beta}]}{(2n+t)^2 - x^2} \right\}.$$

Отсюда нетрудно доказать, что $\Delta K(x, t)$ – ограничена в квадрате $0 \leq x, t \leq 1$. Теперь считая правую часть уравнения (28) известной, запишем ее в виде

$$\mu(x) + \gamma_5 \int_0^1 \mu(t) K_0(x, t) dt = F_6(x). \quad (29)$$

Используя разложения $ctgx$ на простейшие дроби

$$ctgz = \frac{1}{z} + 2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - k^2 \pi^2}, \quad z \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$$

можно упростить ядро $K_0(x, t)$:

$$K_0(x, t) = \frac{\pi}{2} \left[ctg \frac{\pi}{2} (t-x) + ctg \frac{\pi}{2} (t+x) \right] = \frac{\frac{d}{dt} \left(\sin^2 \frac{\pi t}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\pi t}{2} - \sin^2 \frac{\pi x}{2}}.$$

Произведя замену $z = \sin^2 \frac{\pi x}{2}$, $\zeta = \sin^2 \frac{\pi t}{2}$ и полагая $\rho(z) = \mu(x)$, $r(z) = F_6(x)$ из (26) получим сингулярное интегральное уравнение типа Коши

$$\rho(z) + \gamma_5 \int_0^1 \frac{\rho(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = r(z). \quad (30)$$

Так как $1 - \gamma_5^2 \neq 0$, то уравнение (30) является уравнение нормального типа. В соответствии с этим решение уравнения (30) может быть построено согласно общей теории [7]. Из постановки задачи T_n^∞ , введенных обозначений и свойств заданных функций следует что решение уравнение (30) будем искать в классе $h(0)$, то есть в классе функций, ограниченных при $z \rightarrow 0$ и неограниченных при $z \rightarrow 1$. Индекс χ уравнение (30) классе $h(0)$ равен нулю, а каноническая функция $X(z)$ класса $h(0)$ имеет вид:

$$X(z) = [z/(z-1)]^{\frac{1-2\beta}{4}}.$$

Тогда, согласно общей теории уравнения (30) имеет единственное решения и оно дается формулой

$$\rho(z) = \frac{\sqrt{1 + \sin \pi \beta}}{\sqrt{2}} \left[r(z) \cos \frac{\pi}{2} \left(\beta - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sin \frac{\pi}{2} \left(\beta - \frac{1}{2} \right)}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{z(1-\zeta)}{\zeta(1-z)} \right)^{\frac{1}{4} - \frac{\beta}{2}} \frac{r(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \right]. \quad (31)$$

Учитывая (31) и возвращаясь к прежним переменным x, t , и к функции $v(x)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью, эквивалентное (в классе разрешимости и в классе искомых решений) задаче T_n^∞ .

$$v(x) + \int_0^1 v(t) K_2(x, t) dt = F_7(x), \quad (32)$$

где

$$K_2(x, t) = \gamma_6 \left[\gamma_5 \left(\frac{x}{t} \right)^{2\beta} \Delta K(x, t) - L(x, t) \right] +$$

$$+ \gamma_7 \int_0^1 \left(\frac{tg \frac{\pi x}{2}}{tg \frac{\pi t}{2}} \right)^{\frac{1}{2}-\beta} \left(\frac{x}{t} \right)^{2\beta} K_0(x, \xi) [\gamma_5 \Delta K(\xi, t) - L(\xi, t)] d\xi,$$

$$F_6(x) = \gamma_6 F_2(x) + \gamma_7 \int_0^1 \left(\frac{tg \frac{\pi x}{2}}{tg \frac{\pi t}{2}} \right)^{\frac{1}{2}-\beta} \left(\frac{x}{t} \right)^{2\beta} K_0(x, t) F_2(t) dt,$$

$$\gamma_6 = \frac{\sqrt{1 + \sin \pi \beta}}{\sqrt{2}} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \left(\beta - \frac{1}{2} \right), \quad \gamma_7 = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \left(\beta - \frac{1}{2} \right)}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{1 + \sin \pi \beta}}{\sqrt{2}}.$$

В силу единственности решения задачи T_n^∞ , существует единственное решение уравнения (32). \square

Заключение

После того как найдено $v(x)$, функция $\tau(x)$ находится из (15). Затем решение задачи T_n^∞ в областях Ω^+ и Ω_1^- находится по формулам (9), (20), (22) и (23) соответственно.

Библиографический список

1. Кузнецов Д.С. Специальные функции. М.: Высшая школа. 1965. 424 с.
2. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: ФАН, 1997. 165 с.
3. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. 301 с.
4. Бакиевич Н.И. Сингулярные задачи Трикоми для уравнения $y^m u_{xx} - u_{yy} - \lambda^2 y^m u = 0$ // Изв. высш. уч. зав. Серия «Математика». 1964. №2(39). С.7-13.
5. Салахитдинов М.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН, 1974. 155 с.
6. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
7. Мусхелешвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 20.03.2014