

DOI: 10.18454/2079-6641-2014-8-1-7-13

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.956

### **ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

**М. Мамажонов<sup>1</sup>, Х.М. Шерматова<sup>2</sup>, Х. Мукадасов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Кокандский государственный педагогический университет им. Мукини,  
113000, Узбекистан, г. Коканд, ул. Амира Темура, 37

<sup>2</sup> Ферганский государственный университет, 150100, Узбекистан, г. Фергана,  
ул. Мураббийлар, 19

E-mail: fizmat@fdu.com

Настоящая работа посвящена изучению методики исследования некоторых краевых задач для одного класса парабола-гиперболических уравнений третьего порядка в вогнутой шестиугольной области, которые воспользуется при изучении задач математической физики в магистратуре.

*Ключевые слова: краевые условия, условие склеивания, интегральное уравнение Вольтерра второго рода*

© Мамажонов М., Шерматова Х.М., Мукадасов Х., 2014

## MATHEMATICS

MSC 35M13

### **FORMULATION AND METHOD OF SOLVING CERTAIN BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A CLASS OF EQUATIONS THIRD ORDER PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE**

**M. Mamajonov<sup>1</sup>, H.M. Shermatova<sup>2</sup>, H. Mukadasov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> Kokand State Pedagogical Institute by Mukini, 113000, Uzbekistan, Kokand, Amira Temura st. 37

<sup>2</sup> Fergana State University, 150100, Uzbekistan, Fergana c., Murabbiylar st., 19

E-mail: fizmat@fdu.com

This paper studies the methods of investigation of some boundary value problems for a class of parabolic-hyperbolic equations of the third order in the hexagonal concave areas that take advantage of the study of problems of mathematical physics in the magistracy.

*Key words: operator boundary conditions, the condition of bonding, Volterra integral equation of the second kind*

© Mamajonov M., Shermatova H.M., Mukadasov H., 2014

## Введение

Развитие уравнений в частных производных обусловлено широким кругом прикладных задач в физике, экономике, биологии и в других науках. В рамках теории уравнений математической физики как дисциплины, читаемой в магистратуре, большой интерес представляют уравнения смешанного типа. Такие уравнения могут быть использованы при описании различных физических процессов от пространственных околосвуковых течений идеального политропного газа, гидродинамических течений с переходом через скорость звука до бесконечно малых изгибов поверхностей.

Уравнения смешанного типа рассматриваются в разных областях с границей (линией вырождения). На этой границе задаются условия сопряжения или склеивания.

Впервые на необходимость рассмотрения задач сопряжения, когда на одной части области задано параболическое уравнение, на другой - гиперболическое, было указано в 1959 г. И.М. Гельфандом [1]. Он рассматривает пример, связанный с движением газа в канале, окруженном пористой средой, при этом в канале движение газа описывается волновым уравнением, вне его – уравнением диффузии. Затем Г.М. Стручина [2], Я.С. Уфлянд [3], Л.А. Золина [4] показали другие применения этих задач. Так, например, Я.С. Уфлянд задачу о распространении электрических колебаний в составных линиях, когда на участке полубесконечной линии пренебрегается потерями, а остальная часть линии рассматривается как кабель без утечки.

Математический аппарат уравнений параболо-гиперболического типа описан в работах [5]-[6]. В настоящей работе предложена методика изучения краевых задач для уравнения параболо-гиперболического типа.

## Постановка задачи

Рассмотрим в области  $D$  уравнение

$$\left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \right) (Lu) = 0, \quad (1)$$

где  $a, b, c \in R$ ,  $Lu \equiv \begin{cases} L_1 u \equiv u_{xx} - u_y & D_1, \\ L_i u \equiv u_{xx} - u_{yy} & D_i \ (i = 2, 3), \end{cases}$

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup J_1 \cup J_2, \quad D_1 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 1, 0 < y \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 1, x - 1 < y < 0\}, AB = \{(x, y) \in R^2 : y = 0, 0 < x < 1\},$$

$$D_3 = \{(x, y) \in R^2 : 0 < y < 1, y - 1 < x < 0\}, AA_0 = \{(x, y) \in R^2 : x = 0, 0 < y < 1\},$$

то есть  $D$  – вогнутая шестиугольная область с вершинами в точках

$$A(0, 0), C(0, -1), B(1, 0), B_0(1, 1), A_0(0, 1), D(-1, 0).$$

Области  $D_2$  и  $D_3$  разделим по две части каждой с помощью отрезка

$$E_1 E_2 = \left\{ (x, y) \in R^2 : y = -x, -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \right\}.$$

Тогда эти области можно записать в виде

$$D_2 = D_{21} \cup D_{22} \cup AE_1, D_3 = D_{31} \cup D_{32} \cup AE_2$$

где

$$D_{21} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} < y < 0, -y < x < y + 1 \right\},$$

$$D_{22} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{1}{2}, x - 1 < y < -x \right\},$$

$$D_{31} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \frac{1}{2}, y - 1 < x < -y \right\},$$

$$AE_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \frac{1}{2}, y = -x \right\},$$

$$D_{32} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} < x < 0, -x < y < x + 1 \right\},$$

$$AE_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \frac{1}{2}, x = -y \right\},$$

, а  $E_1 \left( \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ ,  $E_2 \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ .

Теперь переходим к постановке краевой задачи для уравнения (1). Перед тем, как приступить к постановке задачи запишем все краевые условия и условия склеивания на линиях изменения типа, которые воспользуются при постановке задачи.

Краевые условия:

$$u(1, y) = \varphi_1(y), 0 \leq y \leq 1, \quad (2)$$

$$u_x(1, y) = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq 1, \quad (3)$$

$$u|_{BC} = \psi_1(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

$$u|_{BE_1} = \psi_1(x), \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = f_1(x), -1 \leq x \leq 0, \quad (6)$$

$$u_y(x, 0) = f_2(x), -1 \leq x \leq 0, \quad (7)$$

$$u_{yy}(x, 0) = f_3(x), -1 \leq x \leq 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{BC} = \psi_2(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{A_0D} = \psi_4(y), 0 \leq y \leq 1, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{E_2D} = \psi_4(y), 0 \leq y \leq 1, \quad (11)$$

$$u(0, y) = \varphi_3(y), -1 \leq y \leq 0, \quad (12)$$

$$u_x(0, y) = \varphi_4(y), -1 \leq y \leq 0, \quad (13)$$

$$u_{xx}(0, y) = \varphi_5(y), -\frac{b}{a} \leq y \leq 0, \quad (14)$$

$$u_{xx}(0, y) = \varphi_5(y), -1 \leq y \leq 0. \quad (15)$$

Условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x, -0) = u(x, +0), 0 \leq x \leq 1, \quad (16)$$

$$u_y(x, -0) = u_y(x, +0), 0 \leq x \leq 1, \quad (17)$$

$$u_{yy}(x, -0) = u_{yy}(x, +0), 0 \leq x \leq 1, \quad (18)$$

$$u(-0, y) = u(+0, y), 0 \leq y \leq 1, \quad (19)$$

$$u_x(-0, y) = u_x(+0, y), 0 \leq y \leq 1, \quad (20)$$

$$u_{xx}(-0, y) = u_{xx}(+0, y), 0 \leq y \leq 1, \quad (21)$$

где  $\varphi_i$  ( $i = \overline{1, 5}$ ),  $\psi_j$  ( $j = \overline{1, 2, 4}$ ),  $f_k$  ( $k = \overline{1, 2, 3}$ ) – заданные достаточно гладкие функции,  $n$  – внутренняя нормаль к прямым  $x - y = 1$  и  $x - y = -1$ .

В зависимости от коэффициентов  $a$  и  $b$ , т.е. от углового коэффициента  $\gamma = \frac{b}{a}$  характеристик  $bx - ay = const$  оператора  $a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y}$  уравнения (1) ставятся различные краевые задачи. Приступим к постановке краевой задачи для уравнения (1).

**Задача.** Требуется найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую следующим условиям:

Таблица

### Классификация краевых задач

Случай	Краевые условия	Условия склеивания
1°. $a = 0, b \neq 0$ ( $\gamma = \infty$ )	(2), (4), (6), (7), (9), (10)	(16) – (20)
2°. $a \neq 0, b = 0$ ( $\gamma = 0$ )	(2), (4), (6), (7), (9), (10)	(16), (17), (19) – (18)
3°. $0 < \gamma < 1$	(2), (5), (6) – (10), (12), (14)	(16) – (21)
4°. $\gamma = 1$	(2), (6) – (8), (12), (13), (15)	(16) – (21)
5°. $1 < \gamma < +\infty$	(2), (5), (6) – (9), (12), (15)	(16) – (21)
6°. $-\infty < \gamma < -1$	(2) – (4), (6), (7), (9), (10) или (2) – (4), (6), (7), (9), (11)	(16) – (20) или (16) – (21)
7°. $-1 \leq \gamma < 0$	(2) – (4), (6), (7), (9), (10)	(16) – (20)

- 1) непрерывна в замкнутой области  $\bar{D}$ ;
- 2) удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей  $D_i$  ( $i = 1, 2, 3$ );
- 3) удовлетворяет следующим краевым условиям и непрерывным условиям склеивания на линии изменения типа:

Мы здесь будем указать идею решения поставленной задачи лишь в случае 1<sup>о</sup>. В этом случае уравнение (1) имеет вид:

$$\left(b \frac{\partial}{\partial y} + c\right)(Lu) = 0.$$

Это уравнение можно привести к уравнению второго порядка с неизвестной правой частью следующим образом: введя обозначение  $Lu = v$ , получим уравнение  $b \frac{\partial v}{\partial y} + cv = 0$ . Общее решение последнего уравнения имеет вид:  $v = \omega(x) \exp\left(-\frac{c}{b}y\right)$ . Тогда получим  $Lu_i = \omega_i(x) \exp\left(-\frac{c}{b}y\right)$ , где введено обозначение:

$$u(x, y) = u_i(x, y), (x, y) \in D_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (22)$$

Последнее уравнение можно записать в виде:

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_1(x) \exp\left(-\frac{c}{b}y\right), \quad (23)$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_i(x) \exp\left(-\frac{c}{b}y\right) \quad (i = 2, 3), \quad (24)$$

где  $\omega_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – произвольные достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

В уравнении (24) ( $i = 2$ ) введем обозначения:

$$u_2(x, y) = u_{2k}(x, y), \quad \omega_2(x) = \omega_{2k}(x) \quad (x, y) \in D_{2k} \quad (k = 1, 2).$$

Тогда уравнение (24) имеет вид:

$$u_{2kxx} - u_{2kyy} = \omega_{2k}(x) \exp\left(-\frac{c}{b}y\right) \quad (k = 1, 2). \quad (25)$$

После обозначения (22) условия склеивания (16) - (21) переходят к виду

$$u_2(x, 0) = u_1(x, +0) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (26)$$

$$u_{2y}(x, 0) = u_{1y}(x, 0) = \nu_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (27)$$

$$u_{2yy}(x, 0) = u_{1yy}(x, 0) = \mu_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (28)$$

$$u_3(0, y) = u_1(0, y) = \tau_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (29)$$

$$u_{3x}(0, y) = u_{1x}(0, y) = \nu_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (30)$$

$$u_{3xx}(0, y) = u_{3xx}(0, y) = \mu_2(y), 0 \leq y \leq 1, \quad (31)$$

Здесь  $\tau_1, v_1, \tau_2, v_2, \mu_1, \mu_2$  – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению, кроме того выполняются следующие условия согласования:  $\tau_1(0) = \tau_2(0) = f_1(0), v_1(0) = \tau_2'(0) = f_2(0), \tau_1(1) = \varphi_1(0)$ .

Сначала поставленную задачу будем исследовать в области  $D_2$ .

Записывая решение уравнения (25) ( $k = 1$ ), удовлетворяющее условиям (26), (27) и подставляя это решение в (9), находим неизвестную функцию  $\omega_{21}(x)$  в промежутке  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ .

Затем введя обозначения:

$$u_{22}(0, y) = \tau_3(y), u_{22x}(0, y) = v_3(y) \quad (-1 \leq y \leq 0),$$

где  $\tau_3(y), v_3(y)$  – неизвестные пока функции, подлежащие определению и записывая решение уравнения (25) ( $k = 2$ ), удовлетворяющее этим условиям и подставляя это решение в условие (9), находим неизвестную функцию  $\omega_{22}(x)$  при  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ . Используем условие:

$$\left( \frac{\partial u_{21}}{\partial x} + \frac{\partial u_{21}}{\partial y} \right) \Big|_{AE_1} = \left( \frac{\partial u_{22}}{\partial x} + \frac{\partial u_{22}}{\partial y} \right) \Big|_{AE_1},$$

находим неизвестную функцию  $\omega_{21}(x)$  в промежутке  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .

Подставляя решение уравнения (25) при  $k = 1$  в (4) после некоторых выкладок, получим первое соотношение между неизвестными функциями  $\tau_1(x)$  и  $v_1(x)$ :

$$\tau_1'(x) + v_1(x) = \alpha(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (32)$$

где  $\alpha(x)$  – известная функция.

После этого записывая уравнение (1) в области  $D_1$  в виде

$$bu_{1xxy} + cu_{1xx} - bu_{1yy} - cu_{1y} = 0$$

и переходя в этом уравнении к пределу, при  $y \rightarrow 0$  с учетом условий (26)-(28), имеем второе соотношение между неизвестными функциями  $\tau_1(x), v_1(x)$  и  $\mu_1(x)$ :

$$bv_1''(x) + c\tau_1''(x) - b\mu_1(x) - cv_1(x) = 0. \quad (33)$$

Теперь переходя в уравнении (25) ( $k = 1$ ) к пределу в промежутке  $y \rightarrow 0$ , получим третье соотношение между этими неизвестными функциями:

$$\tau_1''(x) - \mu_1(x) = \omega_{21}(x). \quad (34)$$

Исключая из системы (32), (33), (34) функции  $v_1(x)$  и  $\mu_1(x)$  после некоторых выкладок, мы приходим к дифференциальному уравнению относительно  $\tau_1(x)$ . Решая это уравнение при условиях  $\tau_1(0) = f_1(0), \tau_1'(0) = f_1'(0), \tau_1(1) = \psi_1(1)$ , мы находим неизвестную функцию  $\tau_1(x)$  и тем самым – функции  $v_1(x), u_{21}(x, y)$  в  $D_{21}$ .

Воспользуясь условиями  $u_{22}(x, -x) = u_{21}(x, -x)$  и (4), мы получим две соотношения между неизвестными функциями  $\tau_3(x)$  и  $v_3(x)$ , из которых находим эти функции.

Тем самым – и функцию  $u_{22}(x, y)$  в  $D_{22}$ . Таким образом, мы нашли функцию  $u_2(x, y)$  в области  $D_2$  единственным образом.

Переходим в область  $D_3$ . Аналогично, как и в области  $D_2$ , определяются неизвестные функции  $\omega_{31}(x)$  и  $\omega_{32}(x)$ .

В области  $D_3$  из формулы решения при  $x \rightarrow 0$  мы получим первое соотношение между неизвестными функциями  $\tau_2(y)$  и  $v_2(y)$ .

Переходим в область  $D_1$ . Запишем решение уравнения (23), удовлетворяющее условиям (2), (26), (29). Дифференцируем это решение по  $x$ . Затем в полученном равенстве полагаем  $x \rightarrow 0$ , тогда в силу условия (30), получим второе соотношение между функциями  $\tau_2(y)$  и  $v_2(y)$ . Исключаем из полученных двух соотношений функцию  $v_2(y)$ , тогда мы приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно функции  $\tau_2'(y)$ . Ядро этого уравнения имеет слабую особенность, а правая часть непрерывна. Поэтому это уравнение допускает единственное решение из класса непрерывных функций. Решая это уравнение, находим функцию  $\tau_2'(y)$  и тем самым – функции  $\tau_2(y)$ ,  $v_2(y)$ ,  $u_1(x, y)$  и  $u_2(x, y)$ .

## Заключение

Таким образом, мы нашли единственное решение поставленной задачи 1 в случае 1<sup>о</sup>. Аналогично исследуются остальные случаи. При решении поставленной задачи 1 применяются методы дифференциальных и интегральных уравнений.

В работах [5]-[6] рассмотрен ряд краевых задач для таких уравнений.

## Библиографический список

1. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. 1959. Т. XIV. Вып. 3 (87). С. 3-19.
2. Стручина Г.М. Задача о сопряжении двух уравнений // Инженер.-физ. журн. 1961. Т. 4. № 11. С. 99-104.
3. Уфлянд Я. С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженер.-физ. журн. 1964. Т. 7. № 1. С. 89-92.
4. Золина Л.А. О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т.6. № 6. С. 991-1001.
5. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
6. Джураев Т.Д., Мамажанов М. О корректной постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа // Дифференциальные уравнения. 1983. Т.19. №1. С. 37-50.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 07.04.2014