

DOI: 10.18454/2079-6641-2016-13-2-43-49

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517. 925.42

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭРЕДИТАРНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ НА ПРИМЕРЕ ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В СМЫСЛЕ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

И. В. Дробышева

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4

E-mail: irisha_dr@mail.ru

В работе предложена математическая эредитарная модель осциллятора Дуффинга с трением, которая является обобщением ранее известной классической модели осциллятора Дуффинга. Это обобщение заключается замене в модельном уравнении целочисленной производной на производные дробных порядков в смысле Римана-Лиувилля. Построена явная конечно разностная схема для вычисления приближенного решения, а также фазовые траектории при различных значениях управляющих параметров.

Ключевые слова: производная Римана-Лиувилля, производная Грюнвальда-Летникова, эредитарность, осциллятор Дуффинга, фазовая траектория

© Дробышева И. В., 2016

MATHEMATICAL MODELLING

MSC 34C26

MATHEMATICAL MODELING OF NONLINEAR OSCILLATORS HEREDITARITY EXAMPLE DUFFING OSCILLATOR WITH FRACTIONAL DERIVATIVES IN THE RIEMANN-LIOUVILLE

I. V. Drobysheva

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky,
Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: irisha_dr@mail.ru

The paper presents a mathematical model hereditarity Duffing oscillator with friction, which is a generalization of previously known classical model of Duffing oscillator. This generalization is replaced in the model equation integral derivative on derivatives of fractional order in the sense of Riemann-Liouville. Built explicit finite difference scheme for calculating approximate solutions, as well as the phase trajectories for different values of the control parameters.

Key words: Riemann-Liouville derivative Grunwald-Letnikova, hereditarity, Duffing oscillator, phase trajectory

© Drobysheva I. V., 2016

Введение

Исследование эредитарных колебательных систем является одним из актуальных направлений исследований, что подтверждено различными приложениями [2]-[5]. Эредитарные колебательные системы рассматриваются в рамках теории эредитарной динамики, предложенной Вито Вольтерра [2].

Эредитарность процесса – это свойство процесса сохранять «память» о его состояниях в предыдущие моменты времени. В частности, такие процессы происходят во фрактальных средах, обладающие масштабной инвариантностью и нелокальностью по времени и пространству. Для процессов происходящих во фрактальных средах, функция памяти имеет степенной вид, поэтому такие эредитарные процессы можно описать с помощью дробных производных. Например, более подробно вопросы исследования эредитарных колебательных системы с помощью дробной производной Римана-Лиувилля изложены в книге Ивана Петраса [1].

В настоящей работе мы исследуем пример эредитарной колебательной системы – эредитарный осциллятор Дуффинга с трением и периодической внешней силой. Далее для приближенного решения модельного уравнения с начальными условиями построим численную явную конечно-разностную схему. На основе численного решения построим и исследуем осциллограммы и фазовые траектории эредитарного осциллятора Дуффинга.

Отметим, что в работе [3] была предложена модель осциллятора Дуффинга с фрактальным трением.

Постановка задачи

Рассмотрим следующее эредитарное уравнение Дуффинга:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^t K_1(t-\tau)x(\tau)dt + \alpha \frac{d}{dt} \int_0^t K_2(t-\tau)x(\tau)dt - x(t) + x^3(t) = \sigma \cos(\omega t), \quad (1)$$

где $K_1(t-\tau)$ и $K_2(t-\tau)$ – функции памяти.

Если выбрать функции памяти в уравнении (1) в виде:

$$K_1(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{1-p}}{\Gamma(2-p)}, \quad K_2(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^{-q}}{\Gamma(1-q)}, \quad 1 < p < 2, 0 < q < 1, \quad (2)$$

то мы приходим к следующей задаче.

Задача. Найти решение $x(t)$, где $t \in [0, T]$ следующей задачи Коши в локальной постановке [6]:

$$D_{0r}^p x(\tau) + \alpha D_{0r}^q x(\tau) - x(t) + x^3(t) = \sigma \cos(\omega t), \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{2-p} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} (t^{2-p} x(t)) = y_0,$$

где $D_{0r}^q x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^q}$ и $D_{0r}^p x(\tau) = \frac{1}{\Gamma(2-p)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{p-1}}$ – производные Римана-Лиувилля дробных порядков p, q , α – коэффициент вязкого трения, σ

и ω – амплитуда и частота внешней периодической силы, x_0 и y_0 – заданные константы, начальные условия.

Задача Коши (3), в силу кубической нелинейности, не имеет точного решения, поэтому будем искать приближенное решение с помощью теории конечно-разностных схем [6]-[9]. Разобьем отрезок $[0, T]$ на N равных частей с шагом h . Решение дифференциальной задачи $x(t)$ перейдет в приближенное сеточное решение $x(t_k)$, $t_k = kh$, $k = 1, \dots, N$. Производную дробного порядка в системе (3) дискретной производной Грюнвальда-Летникова [10]:

$$D_{0t}^p x(\tau) \approx \frac{1}{h^p} \sum_{j=0}^{k-1} m_j^{(p)} x_{k-j} = \frac{x_k}{h^p} + \sum_{j=1}^{k-1} m_j^{(p)} x_{k-j}, \tag{4}$$

$$D_{0t}^q x(\tau) \approx \frac{1}{h^q} \sum_{j=0}^{k-1} c_j^{(q)} x_{k-j} = \frac{x_k}{h^q} + \sum_{j=1}^{k-1} c_j^{(q)} x_{k-j},$$

$$c_0^{(q)} = m_0^{(p)} = 1, c_j^{(q)} = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^{(q)}, m_j^{(p)} = \left(1 - \frac{1+p}{j}\right) m_{j-1}^{(p)},$$

а целочисленные производные:

$$\dot{x}(t) = y(t) \approx \frac{x_k - x_{k-1}}{h} \tag{5}$$

Подставляя (4) и (5) в систему (3), приходим к следующему численному решению задачи Коши:

$$\begin{cases} x_k = \frac{1}{B} (x_{k-1} - x_{k-1}^3) - C \sum_{j=1}^{k-1} m_j^{(p)} x_{k-j} - K \sum_{j=1}^{k-1} c_j^{(q)} x_{k-j} + A \cos(\omega(k-1)h), \\ y_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{h}. \end{cases} \tag{6}$$

где $B = h^{-p} + \alpha h^{-q}$, $C = \frac{h^{-p}}{B}$, $K = \frac{h^{-q}}{B}$, $A = \frac{\sigma}{B}$.

Можно отметить, исходя из работы [10], что аппроксимация (6) дифференциальной задачи (3) имеет первый порядок. В работе нас не будут интересовать вопросы устойчивости и сходимости явной схемы (6). Скажем лишь, что явные схемы, как правило, условно устойчивы, т.е. существует ограничение на шаг h . Оценить шаг h можно с помощью правила Рунге [11].

Также для выбранных управляющих параметров можно провести эксперимент по исследованию устойчивости по правой части или начальным данным. Если схема устойчива с первым порядком, то по теореме Лакса она сходится с таким же порядком. Рассмотрим некоторые результаты моделирования эрдитарного осциллятора Дуффинга с трением и гармоническим внешним воздействием.

Результаты моделирования

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Значения управляющих параметров имеют вид: $N = 2000$, $\sigma = 10$, $\alpha = 0.15$, $p = 1.7$, $q = 0.8$, $\omega = 5$, $h = 0.05$.

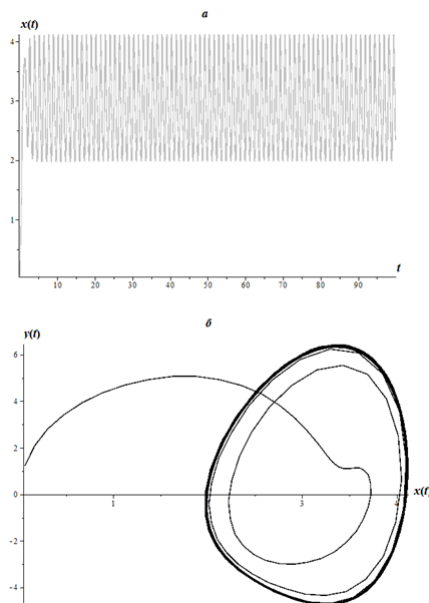


Рис. 1. Расчетная кривая, полученная по формуле (6) а) и фазовая траектория б)

На рис.1а приведена расчетная кривая численного решения, полученная по формуле (6) и фазовые траектории (рис.1б.). Видно, что амплитуда колебаний практически не меняется, что может свидетельствовать о наличии периодического решения или предельного цикла. Действительно, на рис. 1б. фазовая траектория выходит на предельный цикл.

Пример 2. Управляющие параметры имеют следующие значения: $N = 2000, \sigma = 30, \alpha = 0.15, p = 1.7, q = 0.8, \omega = 5, h = 0.05..$

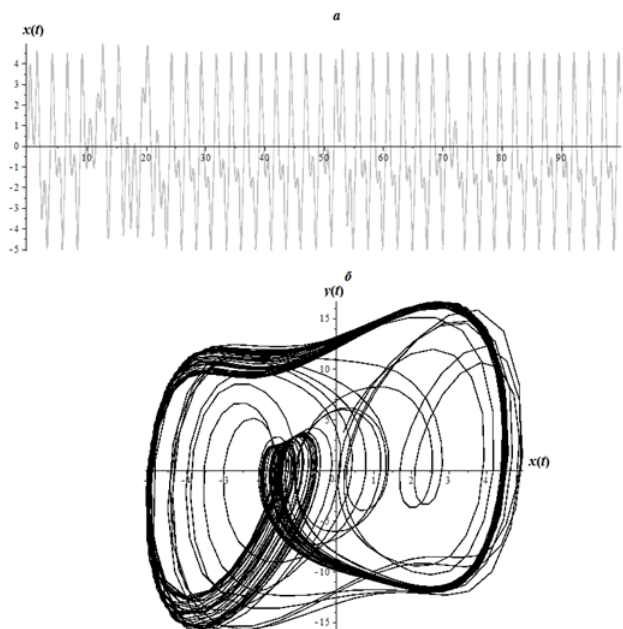


Рис. 2. Расчетная кривая, полученная по формуле (6) а) и фазовая траектория б)

На рис.2а приведена осциллограмма и фазовая траектория рис.2б., когда в отличие от предыдущего примера амплитуда внешней силы в три раза больше. На

осциллограмме (рис.2а) можно увидеть, что в начале колебания происходят в хаотическом режиме с раздвоенной амплитудой, затем выходят на квазирегулярный режим. На рис. 2б. фазовая траектория имеет петлю, соответствующую раздвоению амплитуды колебаний, и выходит на предельный цикл.

Рассмотрим другой пример с уменьшением шага дискретизации.

Пример 3. Параметры: $N = 2000, \sigma = 30, \alpha = 0.15, p = 1.7, q = 0.8, \omega = 5, h = 0.07$.

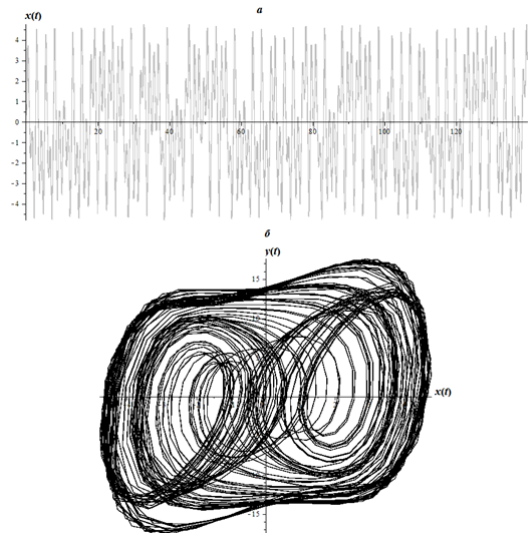


Рис. 3. Расчетная кривая, полученная по формуле (6) а) и фазовая траектория б)

В этом случае мы видим, что колебания происходят в регулярном хаотическом режиме. Фазовые траектории типа (рис. 3б) были получены в работе [12] с дробной производной в смысле Герасимова-Капуто.

Рассмотрим случай, когда изменяются дробные параметры.

Пример 4. Параметры: $N = 2000, \sigma = 30, \alpha = 0.15, p = 1.3, q = 0.8, \omega = 1, h = 0.07$.

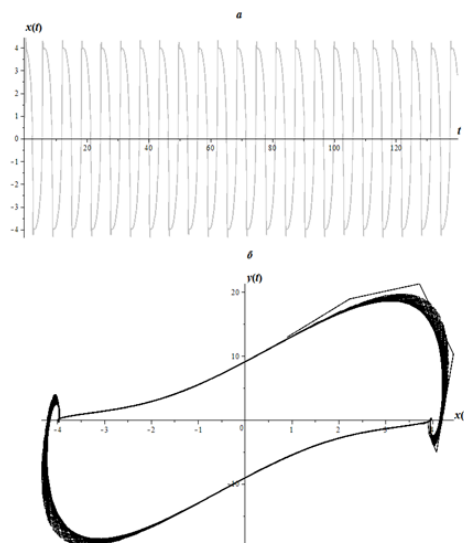


Рис. 4. Расчетная кривая, полученная по формуле (6) а) и фазовая траектория б)

С уменьшением параметра p до 1.7 характер колебаний меняется. Можно заметить на рис. 4а, что колебания имеют раздвоенную амплитуду, о чем свидетельствуют две петли на фазовой траектории (рис. 4б), которая выходит на предельный цикл. Такой режим колебаний характерен для эрдитарного осциллятора Ван-дер-Поля [12].

Эти петли более ярко выражены в следующем примере.

Пример 5. Параметры: $N = 3000, \sigma = 30, \alpha = 0.15, p = 1.6, q = 0.8, \omega = 1, h = 0.07$.

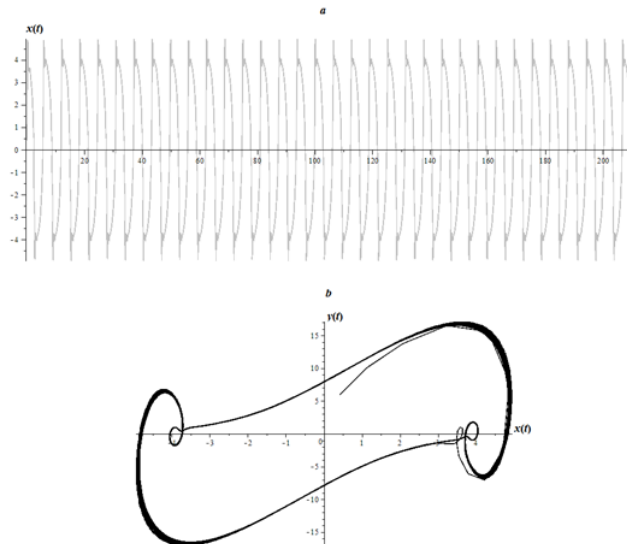


Рис. 5. Расчетная кривая, полученная по формуле (6) а) и фазовая траектория б)

Растроение амплитуды мы наблюдаем в следующем примере.

Пример 6. Примеры: $N = 2000, \sigma = 30, \alpha = 0.15, p = 1.9, q = 0.8, \omega = 1, h = 0.05$.

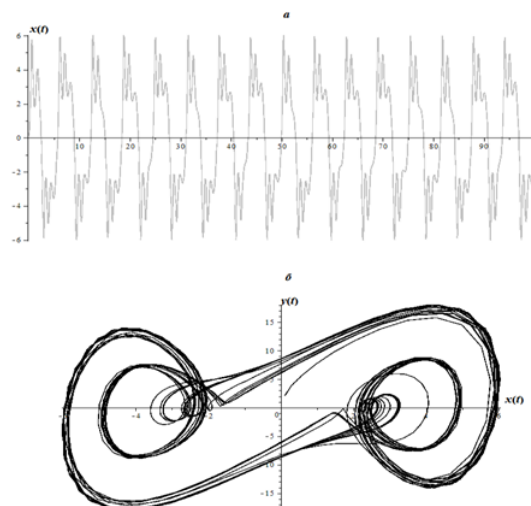


Рис. 6. Расчетная кривая, полученная по формуле (6) а) и фазовая траектория б)

В этом случае мы видим растроение амплитуды колебаний (рис.6а), что приводит к дополнительны петлям на фазовой траектории (рис. 6б.)

Заключение

Была предложена математическая модель эрдитарного осциллятора Дуффинга с трением с дробными производными Римана-Лиувилля. Построена явная конечно-разностная схема для численного счета приближенного решения задачи Коши в локальной постановке. С учетом различных значений управляющих параметров, построены осциллограммы и фазовые траектории. Показано, что практически все фазовые траектории выходят на предельный цикл, также показано, что могут существовать режимы присущи другим колебательным системам. Поэтому решение эрдитарного осциллятора Дуффинга обладает более широкими свойствами, чем классический его аналог.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Р.И. Паровику за ценные замечания и советы при написании этой работы.

Список литературы

- [1] Учайкин В. В., *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008, 512 с.
- [2] Gao X., Yu J., "Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators", *Chaos, Solitons & Fractals*, **24**:4 (2005), 1097–1104.
- [3] Rossikhin Y. A., Shitikova M. V., "Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results", *Applied Mechanics Reviews*, **63**:1 (2010), 010801.
- [4] Petras I., *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*, Springer, New York, 2011, 218 pp.
- [5] Syta A., Litak G., Lenci S., Scheffler M., "Chaotic vibrations of the Duffing system with fractional damping", *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **24**:1 (2014), 013107.
- [6] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его приложения*, Физматлит, М., 2003, 272 с.
- [7] Паровик Р. И., "Математическое моделирование нелокальной колебательной системы Дуффинга с фрактальным трением", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2015, № 1(10), 18–24.
- [8] Паровик Р. И., "О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка от времени", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2014, № 1(8), 60–65.
- [9] Паровик Р. И., "Численный анализ некоторых осцилляционных уравнений с производной дробного порядка", *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2014, № 2(9), 30–35.
- [10] Паровик Р. И., "Об одной конечно-разностной схеме для математической модели нелинейного эрдитарного осциллятора", *Международный научно-исследовательский журнал*, 2016, № 4-2(9), 138–142.
- [11] Петухов А. А., Ревизников Д. Л., "Алгоритмы численных решений дробно-дифференциальных уравнений", *Вестник МАИ*, **16**:6 (2009), 228–243.
- [12] Марчук Г. И., *Вычислительные методы*, Наука, М., 1977, 456 с.
- [13] Паровик Р. И., "Об исследовании устойчивости эрдитарного осциллятора Ван-дер-Поля", *Фундаментальные исследования*, 2016, № 3-2, 283–287.

Поступила в редакцию / Original article submitted: 18.03.2016