

DOI: 10.18454/2079-6641-2011-2-1-30-35

Математическое моделирование
517.958:539.3(3)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ ДЕФОРМАЦИЙ И ЗОН ДИЛАТАНСИИ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С КОМБИНАЦИЕЙ ДВОЙНЫХ СИЛ

Боброва М.Е., Пережогин А.С.

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

E-mail: drew72156@yandex.ru

Рассмотрена модель зон дилатансии в поле напряжений двойных сил в однородном, изотропном, упругом полупространстве. Выполнены расчеты компонент тензора напряжений и критерия дилатансии. Сопоставлены уровни относительных деформаций с областями дилатансии горных пород.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, дилатансия, модель Миндлина, деформации земной коры

© Боброва М.Е., Пережогин А.С., 2011

Mathimatical simulation

MSC 74B05:86-04

MODELING OF STRESS FIELD AND DILATANCYS ZONES IN ELASTIC HALFSpace OF DOUBLE FORCE

Bobrova M.E., Perezhogin A.S.

Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch,
Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7

E-mail: drew72156@yandex.ru

A model of the dilatancy's zones in the stress field of the double forces in a homogeneous, isotropic elastic half-space was considered. Calculations of the stress tensor components and the criterion of dilatancy were performed. Relative deformations of Earth crust were interconnected with zone of dilatancy.

Key words: stress field, dilatancy, the problem of Mindlin, deformation of Earth crust

© Bobrova M.E., Perezhogin A.S. , 2011

Введение

В сейсмоактивных зонах тектонические силы, возникающие на стыке блоков земной коры, формируют области повышенных тектонических напряжений, где процессы раскрытия трещин могут приводить к разрушению среды. Такого рода изменения в горных породах большинство сейсмологов связывают с состоянием нелинейного разуплотнения среды за счет образования трещин сдвига при достижении касательных напряжений некоторого порога. Поля напряжений и деформаций горных пород влияют на процессы в различных геофизических полях. В частности, уровень воды в скважинах, повышение интенсивности выделения подпочвенного радона, аномалии в геоакустических сигналах, электрическом и магнитном полях являются следствием изменения напряженно-деформированного состояния среды. Физико-математической моделью, которая может связывать все эти процессы, является модель зон дилатансии, разуплотнения горных пород за счет доминирования касательных напряжений над сжатием. В случае простой сосредоточенной силы зоны дилатансии исследованы в работе [1]. Моделирование в случае двойной силы направленной параллельно свободной границе проведено в работе [3].

В настоящей работе с помощью математического моделирования получено пространственное распределение зон дилатансии для комбинации трех двойных сил, описывающих точечный центр расширения [5]. В зависимости от параметров точечного источника происходит образование двух зон дилатансии: «очаговой» в окрестностях источника и «пограничной» около свободной поверхности. Исследовано поведение «пограничной» зоны при изменении интенсивности двойных сил и глубины источника напряжений. Так как прямое измерение напряжений в земной коре невозможно, то для практического обнаружения областей дилатансии будет полезно сопоставление критерия дилатансии с уровнем относительных деформаций земной коры. Представленные результаты моделирования дают возможность оценки размеров зон дилатансии по уровню относительных деформаций горных пород. Сопоставления результатов моделирования зон дилатансии и областей относительных деформаций при одних и тех же параметрах модели показывают, что максимальные сдвиговые деформации порядка 10^{-5} соответствуют областям нелинейного разуплотнения.

Постановка задачи

Рассмотрим модель земной коры в приближении упругого однородного изотропного полупространства. Полупространство совпадает с положительным направлением оси OZ . Тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} и вектор смещения u_i удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

где X_i – двойная сила, λ , μ – коэффициенты Ламэ, δ_{ij} – символ Кронекера. Граничным условием для системы (1 - 3) является свободная граница $z = 0$: $\sigma_{zx}|_{z=0} = \sigma_{zy}|_{z=0} = \sigma_{zz}|_{z=0} = 0$.

Источник в виде комбинации трех двойных сил помещен в точку c на оси OZ (рис. 1). Интенсивность действия двойных сил одинакова для каждой из них. Общая интенсивность равна 0 . Для нахождения поля напряжений можно воспользоваться представлением Галеркина. Компоненты тензора напряжений в упругом изотропном полупространстве могут быть выражены через частные производные вектора Галеркина [2]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial x} \Delta X + \left(\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \operatorname{div} \mathbf{H}, \\
 \sigma_{yy} &= 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial y} \Delta Y + \left(\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \operatorname{div} \mathbf{H}, \\
 \sigma_{zz} &= 2(1-\nu) \frac{\partial}{\partial z} \Delta Z + \left(\nu \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \operatorname{div} \mathbf{H}, \\
 \sigma_{yz} &= (1-\nu) \left(\frac{\partial}{\partial z} \Delta Y + \frac{\partial}{\partial y} \Delta Z \right) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \operatorname{div} \mathbf{H}, \\
 \sigma_{zx} &= (1-\nu) \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta Z + \frac{\partial}{\partial z} \Delta X \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \operatorname{div} \mathbf{H}, \\
 \sigma_{xy} &= (1-\nu) \left(\frac{\partial}{\partial y} \Delta X + \frac{\partial}{\partial x} \Delta Y \right) - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \operatorname{div} \mathbf{H},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где X, Y, Z – координаты вектора Галеркина \mathbf{H} ; $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$ – компоненты тензора напряжений; Δ – оператор Лапласа, ν – коэффициент Пуассона.

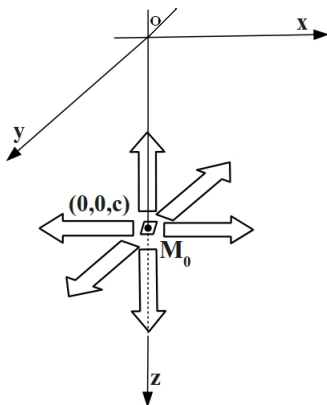


Рис. 1. Направление действия двойных сил X_i в однородном изотропном полупространстве. M_0 – интенсивность двойных сил.

Используя 4 и суммы векторов Галеркина для двойных сил без момента [4] получены явные решения для тензора напряжений с помощью пакета аналитических вычислений Mathematica [7].

В работе [1] предложен критерий возникновения зон дилатансии в поле напряжений горных пород земной коры:

$$D_\tau = \tau - \alpha(P + \rho g z) - S \geq 0, \tag{5}$$

где $\tau = \frac{\sqrt{3}}{2} \left((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) \right)^{\frac{1}{2}}$ – интенсивность касательных напряжений, $P = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$ – давление, α – коэффициент внутреннего трения, ρ – плотность породы, g – ускорение свободного падения, z – координата точки, Y – сцепление породы. В зонах, где $D_\tau \geq 0$, касательные напряжения доминируют над сжимающими напряжениями, и развивается дилатансия. Те зоны, где $D_\tau < 0$, являются зонами без нелинейного разуплотнения среды.

Для сопоставления с уровнем относительных деформаций в областях дилатансии выполнены расчеты максимальных касательных напряжений. Для выделения не только критических, но и всех других возможных уровней напряжений, воспользуемся величиной $\sigma_{\max} = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|)/2$ – критерием максимальных касательных напряжений, где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные значения тензора напряжений. С помощью значения максимального касательного напряжения определим относительные деформации сдвига:

$$\epsilon_{\max} = \frac{(1 + \nu)}{E} \sigma_{\max} \quad (6)$$

В упругом полупространстве определим следующие уровни сдвиговых деформаций ϵ_{\max} $10^{-8} - 10^{-7}; 10^{-7} - 10^{-6}; 10^{-6} - 10^{-5}; 10^{-5} <$. Значение 10^{-8} величины ϵ_{\max} соответствует уровню приливной деформации земной коры, а значение больше чем 10^{-5} – образованию области разуплотнения и достижению предела прочности пород. При численном моделировании установим уровень сдвиговых деформаций соответствующих области дилатансии.

Численное моделирование

В случаях действия простой силы и двойных сил происходит образование двух зон дилатансии – «очаговой» в окрестностях приложения силы и «пограничной» в слое около свободной поверхности [1, 3]. Исследуем формирование зон дилатансии в зависимости от глубины и интенсивности рассматриваемого сосредоточенного источника.

Для того, чтобы представить форму зоны дилатансии, необходимо рассмотреть соответствующие сечения трехмерной области. На рис. 2 приведены результаты моделирования зон дилатансии по формуле (5) для различных интенсивностей источника и его глубины. Использовались следующие параметры земной коры: $\nu=0.25$, $\lambda=3.48 \cdot 10^{10}$ Па, $\mu=3.48 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho=2900$ кг/м³, $g=9.8$ м/с², $Y=3 \cdot 10^6$ Па, $\alpha=0.5$. Визуализация результатов моделирования выполнена с помощью пакета построения графиков gnuplot [6]. В связи с симметричностью решений поля напряжений сечение по ОУ будет выглядеть аналогично сечению по ОХ.

В случае с интенсивностью $M_0 = 5 \cdot 10^{20}$ Н·м на глубине $s=10050$ м видно, что «очаговая» зона дилатансии соединяется с «пограничной». Для заданной интенсивности и глубины источника размер области дилатансии на земной поверхности рис. (2, б) составляет десятки километров.

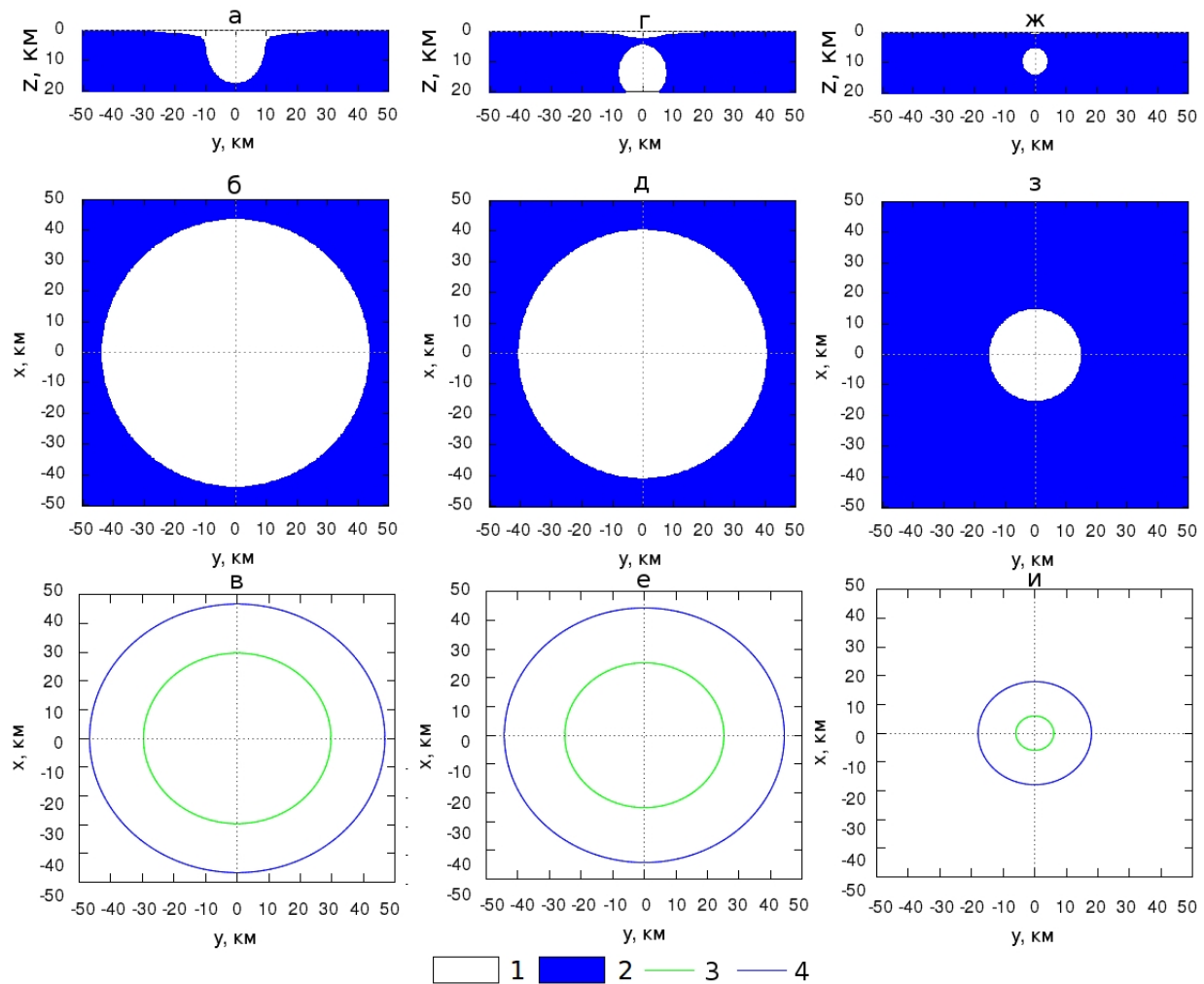


Рис. 2. Зона дилатансии в сечении $x=0$ (а, г, ж), на свободной поверхности $z=0$ (б, д, з); сдвиговые деформации $z=0$ (в, е, и). 1 – зона дилатансии, 2 – область без нелинейного разуплотнения среды, 3 – относительная деформация 10^{-4} , 4 – относительная деформация $3 \cdot 10^{-5}$.

На рис. (г, д) приведены результаты моделирования зон дилатансии по формуле (5) для источника с интенсивностью $M_0 = 5 \cdot 10^{20}$ Н·м на глубине $s=15050$ м.

В этом случае «очаговая» зона дилатансии не соединяется с поверхностью. При этом на поверхности происходит образование «пограничной» зоны дилатансии. С увеличением глубины источника «пограничная» область пропадает и появляется лишь в окрестности источника напряжений в точке $(0,0,15050)$. Рис. (ж, з) показывает результаты моделирования зон дилатансии по (5) на глубине $s=10050$ м при $M_0 = 5 \cdot 10^{19}$ Н·м. В этом случае зона дилатансии находится в области источника напряжений. Размер «пограничной» зоны незначительно отличается от размера «очаговой» зоны.

Результаты моделирования уровней относительных деформаций на рис. (в, е, и) показывают, что области дилатансии соответствуют уровню деформаций $3 \cdot 10^{-5}$. Таким образом, обнаружение дилатансионных эффектов происходит при относительной деформации близкой к разрушительным значениям для горных пород порядка $10^{-5} - 10^{-4}$.

Заключение

Показано наличие области дилатансии на поверхности Земли для случая действия трех двойных сил. Протяженность «пограничной» зоны дилатансии в зависимости от интенсивности и глубины источника может составлять до десятков километров. «Пограничная» и «очаговая» зоны дилатансии могут соединяться между собой или не соединяться в зависимости от параметров модели. При этом связь между размерами зон дилатансии и параметрами модели - глубиной и интенсивностью источника, является нелинейной. При незначительном изменении этих параметров области нелинейного разуплотнения в приповерхностном слое земной коры могут не возникать.

Математическое моделирование поля деформаций показывает, что зоны дилатансии формируются при относительных деформациях порядка 10^{-5} . При выбранных параметрах горных пород получено, что уровень сдвиговых деформаций равен $3 \cdot 10^{-5}$. Все это дает возможно с помощью инструментальных средств наблюдений, например лазерного деформографа, определять накопление напряжений в горных породах, формирующих области дилатансии в сейсмоактивных регионах.

Библиографический список

1. АЛЕКСЕЕВ А.С., БЕЛОНОСОВ А.С., ПЕТРЕНКО В.Е. О концепции многодисциплинарного прогноза землетрясений с использованием интегрального предвестника // Проблемы динамики литосферы и сейсмичности: Сб. науч. тр. ГЕОС. Вычислительная сейсмология. – 2001. – вып. 32. – С. 81–97.
2. НОВАЦКИЙ В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 302 с.
3. ПЕРЕЖОГИН А.С., ШЕВЦОВ Б.М. Модели напряженно-деформированного состояния горных пород при подготовке землетрясений и их связь с геоакустическими наблюдениями // Вычислительные технологии. – 2009. – Т. 14. – № 3. – С. 48–58.
4. MINDLIN R.D., CHENG D.H. Nuclei of Strain in the Semi-Infinite Solid // Journal of Applied Physics. – Vol. 21. – 1950. – P. 926–930.
5. OKADA Y. Internal deformation due to shear and tensile faults in a half-space // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1992. – Vol. 82. – № 2. – P. 1018–1040.
6. <http://www.gnuplot.info>
7. <http://maxima.sourceforge.net/ru>

Поступила в редакцию / Original article submitted: 25.01.11