

DOI: 10.18454/2079-6641-2014-8-1-33-48

УДК 517.956

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

О.Х. Абдуллаев

Национальный Университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. ВУЗ городок
E-mail: obidjon.mth@gmail.com

Мы изучаем существование и единственность решения одной краевой задачи для нагруженного эллиптического-гиперболического уравнения второго порядка с двумя линиями изменения типа в двусвязной области. Когда исследуемая область односвязна, аналогичные результаты были получены в работах Д.М. Курязова.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, эллиптического- гиперболический тип, двусвязная область, существование и единственность решения, принцип экстремума, интегральные уравнения

© Абдуллаев О.Х., 2014

MSC 35M10

**BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LOADED EQUATION
ELLIPTIC-HYPERBOLIC TYPE IN A DOUBLY CONNECTED DOMAIN**

O.Kh. Abdullaev

National University of Uzbekistan by Mirzo Ulugbeka, 100174, Uzbekistan,
Tashkent c., VUZ gorodok st.
E-mail: obidjon.mth@gmail.com

We study the existence and uniqueness of the solution of one boundary value problem for the loaded elliptic-hyperbolic equation of the second order with two lines of change of type in double-connected domain. Similar results have been received by D.M.Kuryhazov, when investigated domain is one-connected.

Key words: the loaded equation, elliptic - hyperbolic type, double-connected domain, existence and uniqueness of solution, an extremume principle, the integrated equations

© Abdullaev O.Kh., 2014

Введение

В последние годы в связи с интенсивным исследованием задач оптимального управления, долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод, почвенной влаги возникла необходимость в изучении нового класса дифференциальных уравнений, получивших название нагруженных уравнений. Отметим что, интересные результаты, посвященные краевым задачам для нагруженных уравнений гиперболического, параболического, эллиптического и смешанного типов второго порядка, была получена в работах А.М.Нахушева [1], В.А. Елеева [2], В.М. Казиева [3]-[4], И.Н. Ланина [5] Б.И. Исломова и Д.М. Курьязова [6], Д.М. Курьязова [7], М.И. Рамазанова [8] и К.У. Хубиева [9].

Насколько нам известно, краевые задачи для нагруженного уравнения эллиптико-гиперболического типа в двусвязной области не были исследованы.

В данной работе доказывается существование и единственность решения одной краевой задачи для нагруженного эллиптико-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа в двусвязной области.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + \operatorname{sgn}(xy)u_{yy} + \frac{1 - \operatorname{sgn}(xy)}{2} \left[\lambda_1 \frac{1 + \operatorname{sgn}x(x+y)}{2} u(x,0) - \lambda_2 \frac{1 + \operatorname{sgn}y(x+y)}{2} u(0,y) \right] = 0 \quad (1)$$

в конечной двусвязной области Ω , ограниченной линиями:

$$\sigma_1 : x^2 + y^2 = 1, x > 0, y > 0; \quad \sigma_2 : x^2 + y^2 = q^2, x > 0, y > 0;$$

$$\sigma_1^* : x^2 + y^2 = 1, x < 0, y < 0; \quad \sigma_2^* : x^2 + y^2 = q^2, x < 0, y < 0, (0 < q < 1)$$

и характеристиками:

$$A_j A_j^* : x - y = (-1)^{j+1}; \quad B_j B_j^* : x - y = (-1)^{j-1} \cdot q; \quad (0 < q < 1), (j = 1, 2)$$

уравнения (1).

Введем обозначения:

$$E_j \left(\frac{q - (-1)^j}{2}; \frac{q + (-1)^j}{2} \right), \quad E_j^* \left(\frac{(-1)^{j-1} - q}{2}; \frac{(-1)^j - q}{2} \right), \quad C_j^{((-1)^{j-1} \frac{q}{2}; (-1)^j \frac{q}{2})}, (j = 1, 2);$$

$$\Omega_0 = \Omega \cap (x > 0) \cap (y > 0), \quad \Omega_0^* = \Omega \cap (x < 0) \cap (y < 0);$$

$$\Delta_1 = \Omega \cap (x + y > q) \cap (y < 0), \quad \Delta_1^* = \Omega \cap (x + y < -q) \cap (x > 0);$$

$$\Delta_2 = \Omega \cap (x + y > q) \cap (x < 0), \quad \Delta_2^* = \Omega \cap (x + y < -q) \cap (y > 0);$$

$$D_1 = \Omega \cap (0 < x + y < q) \cap (y < 0), \quad D_1^* = \Omega \cap (-q < x + y < 0) \cap (x > 0);$$

$$D_2 = \Omega \cap (0 < x + y < q) \cap (y > 0), \quad D_2^* = \Omega \cap (-q < x + y < 0) \cap (x < 0);$$

$$\Omega_1 = \Omega_0 \cup \Omega_0^*, \quad D_0 = \Omega_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad D_0^* = \Omega_0^* \cup \Delta_1^* \cup \Delta_2^*,$$

$$D_3 = D_1 \cup D_1^*, \quad D_4 = D_2 \cup D_2^*,$$

$$I_j = \left\{ t : (-1)^{j-1} \frac{q}{2} < t < q(2-j) \right\}; I_j^* = \left\{ t : q(j-1) < t < (-1)^{j-1} \frac{q}{2} \right\};$$

$$I_{2+j} = \left\{ t : \frac{q + (-1)^{j-1}}{2} < t < 2-j \right\}; I_{4+j} = \left\{ t : 0 < (-1)^{j-1} t < 1 \right\}, (j = 1, 2),$$

где $t = \begin{cases} x & \text{при } j = 1, \\ y & \text{при } j = 2. \end{cases}$

$\Omega_0, \Delta_j, \sigma_j, D_j$ – геометрические фигуры, симметричны, соответственно, фигурам $\Omega_0^*, \Delta_j^*, \sigma_j^*, D_j^*$, ($j = 1, 2$) относительно прямой $x + y = 0$.

В области Ω исследуется следующая задача.

Задача I. . Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$,
- 2) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega \setminus (xy = 0) \setminus (x + y = 0) \setminus (x + y = \pm q)$, кроме того, $u_y \in C(A_1 B_1 \cup A_2^* B_2^*)$, $u_x \in C(A_2 B_2 \cup A_1^* B_1^*)$, причем $u_x(0, t), u_y(t, 0)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $t \rightarrow \pm q$, а при $t \rightarrow \pm 1$ ограничены;

3) на линиях изменения типа выполняются условия склеивания

$$u_y(x, -0) = u_y(x, +0), (x, 0) \in A_1 B_1, \quad u_y(x, -0) = u_y(x, +0), (x, 0) \in A_2^* B_2^*, \quad (2)$$

$$u_x(-0, y) = u_x(+0, y), (0, y) \in A_2 B_2, \quad u_x(-0, y) = u_x(+0, y), (0, y) \in A_1^* B_1^*. \quad (3)$$

4) $u(x, y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x, y) \Big|_{\sigma_j} = \varphi_j(x, y); (x, y) \in \bar{\sigma}_j, \quad (4)$$

$$u(x, y) \Big|_{\sigma_j^*} = \varphi_j^*(x, y); (x, y) \in \bar{\sigma}_j^*, \quad (5)$$

$$u(x, y) \Big|_{A_j E_j} = \psi_j(t); t \in \bar{I}_{2+j}, \quad (6)$$

$$u(x, y) \Big|_{B_j C_j} = g_j(t); t \in \bar{I}_j, \quad (7)$$

$$u(x, y) \Big|_{B_j^* C_j^*} = g_j^*(t); t \in \bar{I}_j^*, \quad (8)$$

где $\varphi_j(x, y), \varphi_j^*(x, y), \psi_j(t), g_j(t), g_j^*(t), (j = 1, 2)$ – заданные функции, причем:

$$\left. \begin{aligned} g_j\left(\frac{q}{2}\right) = g_j^*\left(\frac{q}{2}\right), \varphi_1(1, 0) = \psi_1(1), \varphi_2(q, 0) = g_1(q), \varphi_2(0, q) = g_2(q), \\ \varphi_1^*(-1, 0) = \psi_2(-1), \varphi_2^*(0, -q) = g_1^*(0), \varphi_2^*(-q, 0) = g_2^*(0), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\varphi_j(x, y) = (xy)^\gamma \bar{\varphi}_j(x, y); \bar{\varphi}_j(x, y) \in C(\bar{\sigma}_j), \quad (10)$$

$$\varphi_j^*(x, y) = (xy)^\gamma \bar{\varphi}_j^*(x, y); \bar{\varphi}_j^*(x, y) \in C(\bar{\sigma}_j^*), 2 < \gamma < 3, \quad (11)$$

$$\psi_j(t) \in C(\bar{I}_{2+j}) \cap C^2(I_{2+j}), g_j(t) \in C(\bar{I}_j) \cap C^2(I_j), g_j^*(t) \in C(\bar{I}_j^*) \cap C^2(I_j^*), \quad (12)$$

ЛЕММА 1. Любое регулярное решение уравнения (1) при $xy \neq 0$, $x + y \neq 0$ представимо в виде

$$u(x, y) = z(x, y) + \frac{1 - \operatorname{sgn}(xy)}{2} \left[\frac{1 + \operatorname{sgn}x(x+y)}{2} \omega(x) + \frac{1 + \operatorname{sgn}y(x+y)}{2} \omega(y) \right], \quad (13)$$

где $z(x, y)$ – регулярное решение уравнения

$$Lz \equiv z_{xx} + \operatorname{sgn}(xy)z_{yy} = 0, \quad (14)$$

, а функции $\omega_j(t) = \begin{cases} \omega_1(x) & \text{при } j = 1 \\ \omega_2(y) & \text{при } j = 2 \end{cases}$ дважды непрерывно дифференцируемые решения уравнения

$$\omega_1''(x) + \lambda_1 \omega_1(x) + \lambda_1 z(x, 0) = 0, x \in \left[-1; -\frac{q}{2}\right] \cup \left[\frac{q}{2}; 1\right], \quad (15)$$

$$\omega_2''(y) + \lambda_2 \omega_2(y) + \lambda_2 z(0, y) = 0, y \in \left[-1; -\frac{q}{2}\right] \cup \left[\frac{q}{2}; 1\right],$$

соответственно.

Доказательство. Пусть функция вида (13), есть решение уравнения (1). Тогда, подставляя (13) в (1), при $x > 0$, $y < 0$ и $x + y > 0$ ($x < 0$, $y > 0$ и $x + y < 0$) имеем

$$u_{xx} - u_{yy} + \lambda_1 u(x, 0) = z_{xx} - z_{yy} + \omega_1''(x) + \lambda_1 \omega_1(x) + \lambda_1 z(x, 0) = 0,$$

т.е. в силу (15) получим, что функция (13) удовлетворяет уравнению (1).

Теперь докажем обратное, т.е. пусть $u(x, y)$ регулярное решение уравнения (1) при $x > 0$, $y < 0$ и $x + y > 0$ ($x < 0$, $y > 0$ и $x + y < 0$), а функция $\omega_1(x)$ некоторое решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\omega_1''(x) + \lambda_1 \omega_1(x) = 0. \quad (16)$$

Докажем справедливость соотношения (13). Учитывая, что функция

$$\omega_1(x) = -\lambda_1 \int_0^x (x-t)u(t, 0)dt$$

есть частное решение уравнения (16), получим, что функция

$$u(x, y) = z(x, y) - \lambda_1 \int_0^x (x-t)u(t, 0)dt$$

является решением уравнения (1) при $x > 0$, $y < 0$ и $x + y > 0$ ($x < 0$, $y > 0$ и $x + y < 0$), где $z(x, y)$ решение уравнения $z_{xx} - z_{yy} = 0$, а функция $u(x, y) = -\lambda_1 \int_0^x (x-t)u(t, 0)dt$ есть частное решение уравнения (1), следовательно, представление (13) верно.

Аналогично доказывается случай $x < 0$, $y > 0$ и $x + y > 0$ ($x > 0$, $y < 0$ и $x + y < 0$).

Лемма 1 доказана. \square

Учитывая, что функции $ax + b$ и $c + dy$ являются решениями уравнения (14), произвольные функции $\omega(x)$ и $\omega(y)$ можно подчинить условиям

$$\omega(1) = \omega'(1) = 0 \quad . \quad (17)$$

Решения задачи Коши (15), (16) и (17), соответственно имеют вид:

$$\omega_1(x) = -\sqrt{|\lambda_1|} \int_x^1 z(t,0)K(x,t)dt \quad (18)$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} sh\sqrt{-\lambda_1}(x-t) & \text{при } \lambda_1 < 0 \\ \sin\sqrt{\lambda_1}(x-t) & \text{при } \lambda_1 > 0 \end{cases},$$

и

$$\omega_2(y) = -\sqrt{|\lambda_2|} \int_y^1 z(0,t)K(y,t)dt \quad (19)$$

где

$$K(y,t) = \begin{cases} sh\sqrt{-\lambda_2}(y-t) & \text{при } \lambda_2 < 0 \\ \sin\sqrt{\lambda_2}(y-t) & \text{при } \lambda_2 > 0 \end{cases}.$$

В силу (13) и (17), задача I сведется к задаче I* для уравнения (14) с краевыми условиями:

$$z(x,y) \Big|_{\sigma_j} = \varphi_j(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\sigma_j}, \quad (20)$$

$$z(x,y) \Big|_{\sigma_j^*} = \varphi_j^*(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\sigma_j^*}, \quad (21)$$

$$z(x,y) \Big|_{A_j E_j} = \psi_j(t) - \omega_j(t), \quad t \in \overline{I_{2+j}}, \quad (22)$$

$$z(x,y) \Big|_{B_j C_j} = g_j(t) - \omega_j(t), \quad t \in \overline{I_j}, \quad (23)$$

$$z(x,y) \Big|_{B_j^* C_j^*} = g_j^*(t) - \omega_j(t), \quad t \in \overline{I_j^*}, \quad (24)$$

Единственность решения задачи

Единственность решения задачи I следует из единственности решения задачи I*. В силу решения задачи Коши-Гурса для уравнения (14) в области Δ_1 (Δ_2), удовлетворяющие условиям (22) и

$$z_y(x,0) = v_1(x), \quad x \in A_1 B_1 \quad (z_x(0,y) = v_2(y), \quad y \in A_2 B_2)$$

получим

$$\tau_j(t) = \int_t^1 v_j(s)ds + 2\psi_j\left(\frac{t+1}{2}\right) - 2\omega_j\left(\frac{t+1}{2}\right) - \psi_j(1), \quad (25)$$

где $\tau_1(x) = z(x,0) = u(x,0) - \omega_1(x)$, ($x \in A_1 B_1$) и $\tau_2(y) = z(0,y) = u(0,y) - \omega_2(y)$, ($y \in A_2 B_2$).

В силу (18) и (19) из (25) соответственно находим

$$v_j(t) = -\tau_j'(t) + \psi_j'\left(\frac{t+1}{2}\right) + \sqrt{|\lambda_j|} \int_{\frac{t+1}{2}}^1 \tau_j(s)K_j(t,s)ds, \quad (26)$$

$$K_j(t,s) = \begin{cases} \sqrt{-\lambda_j}ch\sqrt{-\lambda_j}\left(\frac{t+1}{2}-s\right) & \text{при } \lambda_j < 0 \\ \sqrt{\lambda_j}\cos\sqrt{\lambda_j}\left(\frac{t+1}{2}-s\right) & \text{при } \lambda_j > 0, \end{cases} \quad (27)$$

Теорема 1. Если

$$\lambda_j \leq \frac{\pi^2}{(1-q)^2} \quad (j=1,2) \quad (28)$$

то задача I^* не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть $\psi_1(x) \equiv \psi_2(y) \equiv 0$. Тогда, так как $\psi_1(1) = \omega(1) = 0$, то $\tau_1(1) = 0$. Отсюда следует, что $\tau_1(x)$ имеет хотя бы одну точку нуля в отрезке $[q, 1]$. Пусть $x_i (i = \overline{1, n})$ нули функции $\tau_1(x)$, тогда рассмотрим отрезок $[x_1, x_2] \subset \overline{AB}$. Так как $\tau_1(x_1) = \tau_1(x_2) = 0$, то функция $\tau_1(x) > 0$ или $\tau_1(x) < 0$ для всех $x \in [x_1; x_2]$. Предположим $\tau_1(x) > 0$ ($\tau_1(x) < 0$), тогда покажем что внутри этого интервала $\tau_1(x)$ не достигает положительного максимума (отрицательного минимума).

Пусть в точке $x_0 \in (x_1, x_2)$ функция $\tau_1(x)$ достигает свой положительный максимум (отрицательный минимум), тогда в силу (27), (28) с учетом $\psi_1(x) = 0$ из (26) получим $v_1(x_0) \geq 0$ ($v_1(x_0) \leq 0$), а это противоречит известному принципу Зарембо-Жиро [10], согласно которому в точке положительного максимума (отрицательного минимума) должно быть $v_1(x_0) < 0$ ($v_1(x_0) > 0$). Следовательно, $\tau_1(x)$ не достигает свой положительный максимум (отрицательный минимум) в точке $x_0 \in (x_2, x_1)$.

Таким образом,

$$\tau_1(x) = 0, \quad \forall x \in [x_1, x_2]. \quad (29)$$

Аналогично, выше изложенным методом доказывается, что

$$\tau_1(x) = 0, \quad \forall x \in [i, i+1] \quad (i = 2, 3, 4, \dots, n-1). \quad (30)$$

Если $x_1 = q$, т.е. $\tau(x_1) = \tau(q) = 0$, то из (29) и (30) следует $\tau_1(x) = 0, \forall x \in A_1B_1$, а при $x_1 \neq q$ функция $\tau_1(x)$ не может иметь экстремума в интервале (q, x_1) . Тогда функция $\tau_1(x)$ либо знакопостоянна в $[q, 1]$, либо $\tau_1(x) = 0, \forall x \in [q, x_1]$. В силу (18), (19) с учетом $\varphi_2(q; 0) = 0$ из (13) получим

$$\tau_1(q) = \sqrt{|\lambda_1|} \int_q^1 \tau_1(t)K(q,t)dt. \quad (31)$$

Пусть $\tau_1(x) > 0$ ($\tau_1(x) < 0$), $x \in [q, x_1]$, тогда учитывая $K(q,t) \leq 0$ из (31) имеем $\tau_1(q) \leq 0$ ($\tau_1(q) \geq 0$). Следовательно, функция $\tau_1(x)$ знакопостоянна в $[q, x_1]$. Отсюда, принимая во внимание $\tau_1(x_1) = 0$, заключаем, что

$$\tau_1(x) = 0, \quad \forall x \in [q, x_1]. \quad (32)$$

В силу (30) и (32) имеем

$$\tau_1(x) = 0, \quad \forall x \in [q, 1]. \quad (33)$$

Аналогичным образом доказывается что

$$\tau_2(y) = 0, \quad \forall y \in A_2B_2.$$

В силу (33) из (18) и (19) следует, что

$$\omega_1(x) \equiv \omega_2(y) \equiv 0. \quad (34)$$

В силу (33) и (34) с учетом принципа экстремума для уравнений смешанного типа [11], [12] краевая задача I^* с нулевыми данными не имеет отличного от нуля решения, т.е. $z(x,y) \equiv 0$ в области $\bar{\Omega}$. Следовательно, решение задачи I^* единственно. Теорема доказана.

В силу (34) с учетом $z(x,y) \equiv 0$ в области $\bar{\Omega}$ из (12) имеем, $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Единственность решения задачи I доказана. \square

Существование решения задачи I .

При доказательстве существования решения задачи I важную роль играют следующие вспомогательные задачи:

Задача I_1 . Найти функцию $z(x,y)$ со следующими свойствами:

- 1) $z(x,y) \in C(\bar{D}_0) \cap C^2(D_0 \setminus \{xy=0\}) \cap C^1(D_0)$ решение уравнения (14);
- 2) $z_y \in C(A_1B_1)$, $z_x \in C(A_2B_2)$, причем $z_x(0,t)$, $z_y(t,0)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $t \rightarrow q$ и при $t \rightarrow 1$ ограничены;
- 3) удовлетворяет краевым условиям (20) и (22).

Задача I_2 . Найти функцию $z(x,y)$ со следующими свойствами:

- 1) $z(x,y) \in C(\bar{D}_0^*) \cap C^2(D_0^* \setminus \{xy=0\}) \cap C^1(D_0^*)$ решение уравнения (14);
- 2) $z_y \in C(A_1^*B_1^*)$, $z_x \in C(A_2^*B_2^*)$, причем $z_x(0,t)$, $z_y(t,0)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы при $t \rightarrow -q$ и при $t \rightarrow -1$ ограничены;
- 3) удовлетворяет краевым условиям (21) и

$$z(x,y) \Big|_{A_j^*E_j^*} = \psi_j^*(t) - \omega_j(t)$$

где $\psi_j^*(t)$ – неизвестные функции, которые определяются далее, а $\omega_j(t)$ ($j=1,2$) определяются из (18) и (19).

Теорема 2. Если выполнены (9), (11) и (12), то решение задачи I_1 существует и единственно.

Доказательство. Единственность решения задачи I_1 доказывается с помощью следующего принципа экстремума: решение $z(x,y)$ задачи I_1 при $\varphi_j(x,y) \equiv \psi_j(x) \equiv 0$ своего положительного максимума и отрицательного минимума в замкнутой области \bar{D}_0 достигает лишь на $\bar{\sigma}_1 \cup \bar{\sigma}_2$.

В силу единственности решения задачи Коши-Гурса в областях Δ_1 и Δ_2 для уравнения (I^*), с учетом $\omega_j(t) \equiv 0$, ($j=1,2$) решение $z(x,y)$ задачи I_1 с нулевыми данными тождественно равно нулю, т.е. $z(x,y) \equiv 0$ в \bar{D}_0 . Единственность решение задачи $I_1(D_0)$ доказана.

Переходим к доказательству существование решения задачи $I_1(D_0)$.

Решение задачи N для уравнения (14) в области Ω_0 с краевыми условиями (20) и

$$z_y(x,+0) = v_1^+(x), (x,0) \in A_1B_1,$$

$$z_x(+0,y) = v_2^+(y), (0,y) \in A_2B_2$$

единственно и представимо в виде [12]

$$z(x,y) = \int_{\sigma_1} \varphi_1(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \eta; x, y) dS - \int_{\sigma_2} \varphi_2(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \eta; x, y) dS + \\ + \int_q^1 v_1^+(t) G(t, 0; x, y) dt + \int_q^1 v_1^+(t) G(0, t; x, y) dt, \quad (35)$$

где $G(\xi, \eta; x, y)$ – функция Грина задачи N для уравнения Лапласа в области Ω_0 , которая имеет следующий вид [12]

$$G(\xi, \eta; x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\theta_1 \left(\frac{\ln v + \ln \bar{\mu}}{2\pi i r} \right) \theta_1 \left(\frac{\ln \bar{v} + \ln \bar{\mu}}{2\pi i r} \right) \theta_1 \left(\frac{\ln(-v) + \ln \bar{\mu}}{2\pi i r} \right) \theta_1 \left(\frac{\ln(-\bar{v}) + \ln \bar{\mu}}{2\pi i r} \right)}{\theta_1 \left(\frac{\ln v - \ln \mu}{2\pi i r} \right) \theta_1 \left(\frac{\ln \bar{v} - \ln \mu}{2\pi i r} \right) \theta_1 \left(\frac{\ln(-v) - \ln \mu}{2\pi i r} \right) \theta_1 \left(\frac{\ln(-\bar{v}) - \ln \mu}{2\pi i r} \right)} \right|, \quad (36)$$

где $v = \xi + i\eta$, $\bar{v} = \xi - i\eta$, $\mu = x + iy$, $\bar{\mu} = x - iy$, $r = \frac{1}{\pi i} \ln q$, $i^2 = -1$, $\theta_1(\xi) = \theta_1 \left(\xi \mid -\frac{1}{r} \right)$ – тэта-функция.

Полагая в (35) $y = 0$ ($x = 0$), получим соотношение между $\tau_1^+(x)$ и $v_1^+(x)$ ($\tau_2^+(y)$ и $v_2^+(y)$) на $A_1 B_1$ ($A_2 B_2$) принесенное из области Ω_0

$$\tau_1^+(x) = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \int_{\sigma_k} \varphi_k(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \eta; x, 0) dS + \int_q^1 v_1^+(t) G(t, 0; x, 0) dt + \\ + \int_q^1 v_2^+(t) G(0, t; x, 0) dt, \quad (37)$$

$$\left(\tau_2^+(y) = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \int_{\sigma_k} \varphi_k(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \eta; 0, y) dS + \int_q^1 v_1^+(t) G(t, 0; 0, y) dt + \right. \\ \left. + \int_q^1 v_2^+(t) G(0, t; 0, y) dt \right).$$

Дифференцируя равенства (37) по x (а второе по y), получим

$$\tau_1^{\prime+}(x) = \int_q^1 v_1^+(t) \frac{\partial G(t, 0; x, 0)}{\partial x} dt + \int_q^1 v_2^+(t) \frac{\partial G(0, t; x, 0)}{\partial x} dt + F_1'(x) \\ F_1(x) = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \int_{\sigma_k} \varphi_k(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \eta; x, 0) dS. \quad (38)$$

$$\left(\tau_2^{\prime+}(y) = \int_q^1 v_1^+(t) \frac{\partial G(t, 0; 0, y)}{\partial y} dt + \int_q^1 v_2^+(t) \frac{\partial G(0, t; 0, y)}{\partial y} dt + F_2'(y) \right),$$

$$\left(\text{где } F_2(y) = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \int_{\sigma_k} \varphi_k(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \eta; 0, y) dS \right).$$

Исключив $\tau_j^{\prime-}(t)$ ($j = 1, 2$) из соотношений (26) и (38) получим систему интегральных уравнений

$$\begin{cases} v_1^+(x) + \int_q^1 v_1^+(t) \bar{K}_1(x, t) dt = \Phi_1(x) - \int_q^1 v_2^+(t) \bar{K}_2(x, t) dt \\ v_2^+(y) + \int_q^1 v_2^+(t) \bar{K}_2(t, y) dt = \Phi_2(y) - \int_q^1 v_1^+(t) \bar{K}_2(y, t) dt, \end{cases} \quad (39)$$

где

$$\Phi_1(x) = \psi_1' \left(\frac{x+1}{2} \right) + \sqrt{|\lambda_1|} \int_{\frac{x+1}{2}}^1 \tau_1(t) K_1(x, t) dt - F_1'(x), \quad (40)$$

$$\Phi_2(y) = \psi_2' \left(\frac{y+1}{2} \right) + \sqrt{|\lambda_2|} \int_{\frac{y+1}{2}}^1 \tau_2(t) K_2(y, t) dt - F_2'(y).$$

$$\bar{K}_1(x, t) = \frac{2 \ln |t|}{x \ln q} + K(x, t) + K(x, -t), \quad (41)$$

$$\bar{K}_2(x, t) = \bar{K}_1(x, -it), \quad (42)$$

$$K(x, t) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-tx} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q^{2n}}{t-q^{2n}x} - \frac{q^{2n}t}{1-q^{2n}tx} - \frac{q^{-2n}t}{1-q^{-2n}tx} + \frac{q^{-2n}}{t-q^{2n}x} \right) \right]. \quad (43)$$

Исследуем правую часть интегрального уравнения (39):

$$\begin{aligned} \Phi_1^*(x) &= \Phi_1(x) - \int_q^1 v_2^+(t) \bar{K}_2(x, t) dt = \\ &= \int_{\sigma_2} \varphi_2(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial \xi} \right) d\eta - \int_{\sigma_2} \varphi_2(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial \eta} \right) d\xi - \\ &- \int_{\sigma_1} \varphi_1(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial \xi} \right) d\eta + \int_{\sigma_1} \varphi_1(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial \eta} \right) d\xi - \\ &- \psi_1' \left(\frac{x+1}{2} \right) - \sqrt{|\lambda_1|} \int_{\frac{x+1}{2}}^1 \tau_1(t) K_1(x, t) dt - \int_q^1 v_2^+(t) \bar{K}_2(x, t) dt = \\ &= 2 \int_0^1 \varphi_1(\xi, \eta) \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial \xi} \right) d\xi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \varphi_1(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial \eta} \right) d\xi - 2 \int_0^q \varphi_2(\xi, \eta) \frac{\xi}{\sqrt{q^2 - \xi^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial \xi} \right) d\xi - \\
& - \int_0^q \varphi_1(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G(\xi, \eta; x, 0)}{\partial \eta} \right) d\xi - \psi_1' \left(\frac{x+1}{2} \right) - \\
& - \sqrt{|\lambda_1|} \int_{\frac{x+1}{2}}^1 \tau_1(t) K_1(x, t) dt - \int_q^1 v_2(t) \bar{K}_2(x, t) dt = \\
& = R_1(x) + R_2(x) + R_3(x) + R_4(x) + R_5(x). \tag{44}
\end{aligned}$$

Исследуем функцию $R_1(x)$ при $x \rightarrow 1$ ($x \rightarrow q$).

В силу (10) учетом вида σ_1 из (44) имеем

$$\begin{aligned}
R_1(x) = & -\frac{2}{\pi} \int_0^1 \bar{\varphi}_1 \left(\xi, \sqrt{1 - \xi^2} \right) \xi^{\gamma+2} (1 - \xi^2)^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1 - x^2}{x^2 - 2\xi x + 1} + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - x^2 q^{4n}}{x^2 q^{4n} - 2q^{2n} \xi x + 1} - \frac{x^2 - q^{4n}}{x^2 - 2q^{2n} \xi x + q^{4n}} \right) \left. \right] d\xi + \\
& + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \bar{\varphi}_1 \left(\xi, \sqrt{1 - \xi^2} \right) \xi^{\gamma+2} (1 - \xi^2)^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1 - x^2}{x^2 + 2\xi x + 1} + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - x^2 q^{4n}}{x^2 q^{4n} + 2q^{2n} \xi x + 1} - \frac{x^2 - q^{4n}}{x^2 + 2q^{2n} \xi x + q^{4n}} \right) \left. \right] d\xi - \\
& - \frac{8}{\pi} \int_0^1 \bar{\varphi}_1 \left(\xi, \sqrt{1 - \xi^2} \right) \frac{\xi^{\gamma+2} (1 - \xi^2)^{\frac{\gamma-1}{2}}}{x \ln q} d\xi = R_{11}(x) + R_{12}(x) + R_{13}(x). \tag{45}
\end{aligned}$$

Исследуем функцию $R_{11}(x)$ при $x \rightarrow 1$ ($x \rightarrow q$). В силу (10) из (45) имеем

$$\begin{aligned}
|R_{11}(x)| \leq & \text{const} \cdot \frac{\Gamma(\gamma+3)\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\gamma+5}{2}\right)} \frac{x}{x^2+1} F\left(\gamma+3; 1; \frac{3-\gamma}{2}; \frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right) + \\
& + \text{const} \cdot \Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \frac{x(1-x)^{\gamma-1}}{(x^2+1)^{\frac{\gamma+1}{2}}} F\left(\frac{1+\gamma}{2}; \frac{3\gamma+5}{2}; \frac{1+\gamma}{2}; \frac{(1-x)^2}{1+x^2}\right) + \\
& + \text{const} \cdot \frac{\Gamma(\gamma+3)\Gamma\left(\frac{\gamma-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\gamma+3}{2}\right)} \frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} F\left(\gamma+3; 2; \frac{5-\gamma}{2}; \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}\right) + \\
& + \text{const} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3-\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma(2)} \frac{x(1+x)(1-x)^{\gamma-2}}{(1+x^2)^{\frac{\gamma+1}{2}}} F\left(\frac{\gamma+1}{2}; \frac{3\gamma+3}{2}; \frac{\gamma-1}{2}; \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}\right) + \\
& + \text{const} \cdot \int_0^1 \xi^{\gamma+2} (1 - \xi)^{\frac{\gamma-1}{2}} |L_{11}(x, \xi)| d\xi.
\end{aligned}$$

$$\text{где } L_{11}(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x \cdot q}{x^2 q^{4n} + 1} \left(1 - \frac{2q^{-2n} \xi x}{q^{4n} x^2 + 1} \right)^{-1} + \frac{q^{4n} x (1 - x^2 q^{4n})}{(q^{4n} x^2 + 1)^2} \left(1 - \frac{2q^{-2n} \xi x}{q^{4n} x^2 + 1} \right)^{-2} + \right. \\ \left. + \frac{x}{x^2 + q^{4n}} \left(1 - \frac{2q^{2n} \xi x}{x^2 + q^{4n}} \right)^{-1} - \frac{x (x^2 - q^{4n})^2}{(x^2 + q^{4n})^2} \left(1 - \frac{2q^{2n} \xi x}{x^2 + q^{4n}} \right)^{-2} \right].$$

Очевидно что, функция $L_{11}(x, \xi) \in C([q, 1] \times [0, 1])$, т.е. $|L_{11}(x, t)| \leq const$, следовательно, в силу свойств гипергеометрических функций имеем

$$|R_{11}(x)| \leq const. \tag{46}$$

Аналогично доказывается, что

$$|R_{12}(x)| \leq const \text{ и } |R_{13}(x)| \leq const. \tag{47}$$

Следовательно, из (46), (47) и (45) получим, что

$$|R_1(x)| \leq const \tag{48}$$

Точно так же находится оценка для функции $R_2(x)$, т.е.

$$|R_2(x)| \leq const. \tag{49}$$

Теперь исследуем функцию $R_3(x)$. В силу (44) с учетом вида σ_2 имеем

$$R_3(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^q \overline{\varphi}_2(\xi, \eta) (\xi \eta)^\gamma \frac{\xi}{\sqrt{q^2 - \xi^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x - \xi}{x^2 - 2\xi x + q^2} - \frac{x - \xi q^2 x^2}{1 - 2\xi x + q^2 x^2} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2 \xi - q^{2n} x}{q^2 x^2 - 2q^{2n} \xi x + q^{4n}} - \frac{\xi - q^{2n} x}{q^2 - 2q^{2n} \xi x + q^{4n} x^2} + \frac{q^{2n} x - q^{4n} \xi}{x^2 - 2q^{2n} \xi + q^{4n+2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{x q^{2n} - q^{4n} \xi x^2}{1 - 2q^{2n} \xi x + q^{4n+2} x^2} \right) d\xi + \frac{2}{\pi} \int_0^q \overline{\varphi}_2(\xi, \eta) (\xi \eta)^\gamma \frac{\xi}{\sqrt{q^2 - \xi^2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x + \xi}{x^2 + 2\xi x + q^2} - \frac{x + \xi x^2 q^2}{1 + 2\xi x + q^2 x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2 \xi - q^{2n} x}{q^2 x^2 + 2q^{2n} \xi x + q^{4n}} - \frac{\xi + q^{2n} x}{q^2 + 2q^{2n} \xi x + q^{4n} x^2} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{q^{2n} x + q^{4n} \xi}{x^2 + 2q^{2n} \xi x + q^{4n+2}} + \frac{x q^{2n} + q^{4n} x^2}{1 + 2q^{2n} \xi x + q^{4n+2} x^2} \right) \right] d\xi - \frac{4}{\pi q} \int_0^q \overline{\varphi}_2(\xi, \eta) \times \\ \times \frac{\xi^{\gamma+1} \eta^{\gamma-1} (\xi + \eta)}{x \ln q} d\xi = R_{31} + R_{32} + R_{33}. \tag{50}$$

Исследуем функцию $R_{31}(x)$. Выполнив замену $\xi = qt$ из (50) получим

$$|R_{31}(x)| \leq const \cdot \frac{\Gamma(\gamma+2) \Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\gamma+3}{2}\right)} \frac{1}{x^2 + q^2} F\left(\gamma+2; 1; \frac{3-\gamma}{2}; \frac{(x-q)^2}{x^2 + q^2}\right) +$$

$$\begin{aligned}
& +const \cdot \frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma\left(\frac{\gamma-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+3\gamma}{2}\right)} \frac{x^2}{(x^2+q^2)^2} F\left(\gamma+2; 2; \frac{5-\gamma}{2}; \frac{(x-q)^2}{x^2+q^2}\right) + \\
& +const \cdot \frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\gamma+3}{2}\right)} \frac{1}{1+q^2x^2} F\left(\gamma+2; 1; \frac{3-\gamma}{2}; \frac{(1-xq)^2}{1+q^2x^2}\right) + \\
& +const \cdot \frac{\Gamma(\gamma+2)\Gamma\left(\frac{\gamma-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\gamma+1}{2}\right)} \frac{x^2}{(1+q^2x^2)^2} F\left(\gamma+2; 2; \frac{5-\gamma}{2}; \frac{(1-xq)^2}{1+x^2q^2}\right) + \\
& +const \cdot \Gamma\left(\frac{1-\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \frac{(x-q)^{\gamma-1}}{(x^2+q^2)^{\frac{1+\gamma}{2}}} F\left(\frac{\gamma+1}{2}; \frac{3\gamma+3}{2}; \frac{\gamma+1}{2}; \frac{(x-q)^2}{x^2+q^2}\right) + \\
& +const \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3-\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}{\Gamma(2)} \frac{x^2(x-q)^{\gamma-3}}{(x^2+q^2)^{\frac{\gamma+1}{2}}} F\left(\frac{\gamma+1}{2}; \frac{3\gamma+1}{2}; \frac{\gamma-1}{2}; \frac{(x-q)^2}{x^2+q^2}\right) + \\
& +const \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3-\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)}{\Gamma(2)} \frac{x^2(1-xq)^{\gamma-3}}{(1+q^2x^2)^{\frac{\gamma+1}{2}}} F\left(\frac{\gamma+1}{2}; \frac{3\gamma+1}{2}; \frac{\gamma-1}{2}; \frac{(1-xq)^2}{1+x^2q^2}\right) + \quad (51) \\
& +const \cdot \int_0^1 t^{\gamma+1} (1-t)^{\frac{\gamma-1}{2}} |L_{31}(x,t)| dt.
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
L_{31}(x,t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2xqt - q^{2n}}{q^2x^2 + q^{4n}} \left(1 - \frac{2q^{2n+1}tx}{q^2x^2 + q^{4n}}\right)^{-1} + \frac{2qx(q^{2n} - 2qtx)(qx - q^{2n}t)}{(q^2x^2 + q^{4n})^2} \times \right. \\
& \times \left(1 - \frac{2q^{2n+1}tx}{q^2x^2 + q^{4n}}\right)^{-2} + \frac{q^{2n}}{q^2 + q^{4n}x^2} \left(1 - \frac{2q^{2n+1}tx}{q^2 + q^{4n}x^2}\right)^{-1} - \\
& - \frac{2q^{4n}x(xq^{2n} - qt)}{(q^2 + q^{4n}x^2)^2} \left(1 - \frac{2q^{2n+1}tx}{q^2 + q^{4n}x^2}\right)^{-2} + \frac{q^{2n}}{x^2 + q^{4n+2}} \left(1 - \frac{2q^{2n+1}tx}{x^2 + q^{4n+2}}\right)^{-1} - \\
& - \frac{2q^{2n}(x - q^{2n+1}t)^2}{x^2 + q^{4n+2}} \left(1 - \frac{2q^{2n+1}tx}{x^2 + q^{4n+2}}\right)^{-2} - \frac{q^{2n}(1 - 2q^{2n+1}tx)}{1 + q^{4n+2}x^2} \left(1 - \frac{2q^{2n+1}tx}{1 + q^{4n+2}x^2}\right)^{-1} + \\
& \left. + \frac{2q^{4n}(1 - q^{2n+1}tx)(xq^{2n+2} - qt)}{(1 + q^{4n+2}x^2)^2} \left(1 - \frac{2q^{2n+1}tx}{(1 + q^{4n+2}x^2)}\right)^{-2} \right],
\end{aligned}$$

причем

$$|L_{31}(x,t)| \leq const.$$

Отсюда в силу свойств гипергеометрических функций из (51) имеем

$$|R_{31}(x)| \leq const(x-q)^{\gamma-3} \quad (2 < \gamma < 3). \quad (52)$$

Точно также, оценивая функцию $R_{32}(x)$, получим

$$|R_{32}(x)| \leq const. \quad (53)$$

$$|R_3(x)| \leq \text{const}(x - q)^{\gamma-3} \quad (2 < \gamma < 3). \tag{54}$$

Аналогично выше изложенным методом можно оценить $R_4(x)$:

$$|R_4(x)| \leq \text{const}(x - q)^{\gamma-3} \quad (2 < \gamma < 3). \tag{55}$$

Нетрудно заметить, что $R_3(x)$ и $R_4(x)$ при $x \rightarrow 1$ ограничены.

Рассмотрим функцию $R_5(x)$. В силу (43) из (44) имеем

$$R_5(x) = - \int_q^1 v_2^+(t) K_2(x, t) dt, \tag{56}$$

где

$$K_2(x, t) = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{it+x} + \frac{it}{1+itx} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{q^{2n}}{it+q^{2n}x} + \frac{q^{2n}it}{1+q^{2n}itx} + \frac{q^{-2n}it}{1+q^{-2n}itx} - \frac{q^{-2n}}{it+q^{2n}x} \right) - \frac{1}{it-x} + \frac{it}{1-itx} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q^{2n}}{it-q^{2n}x} - \frac{q^{2n}it}{1-q^{2n}itx} - \frac{q^{-2n}it}{1-q^{-2n}itx} + \frac{q^{-2n}}{it-q^{2n}x} \right) \right] + \frac{2 \ln |it|}{x \ln q}.$$

причем $K_2(x, t) \in C([q, 1] \times [q, 1])$, т.е.

$$|K_2(x, t)| \leq \text{const}. \tag{57}$$

В силу (57) с учетом класса функции $v_2(t) \in C^2(q, 1)$ из (56) следует, что

$$|R_5(x)| \leq \text{const}. \tag{58}$$

Таким образом, в силу (48), (49), (54), (55) и (56) с учетом (10), (12), имеем, что $\Phi_1^*(x) \in C^2(q, 1)$, причем $\Phi_1^*(x)$ может иметь особенность порядка меньше единицы при $x \rightarrow q$, а при $x \rightarrow 1$ ограничена.

Аналогичным образом доказывается, что $\Phi_2^*(y) \in C^2(q, 1)$, причем может иметь особенность порядка меньше единицы при $y \rightarrow q$, а при $y \rightarrow 1$ ограничена.

Система сингулярных интегральных уравнений (44) точно так, как и в [11]-[13], известным методом Карлемана-Векуа [14] сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, разрешимость, которой следует из единственности решения задачи I_1 .

Решая первое уравнение системы (39), находим

$$v_1^+(x) = \Phi_1^*(x) + \int_q^1 \Phi_1^*(t) \bar{R}_1(x, t) dt = \Phi_1^*(x) - \int_q^1 v_2^+(t) \bar{K}_2(x, t) dt + \int_q^1 \left(\Phi_1^*(t) - \int_q^1 v_2^+(s) \bar{K}_2(t, s) ds \right) \bar{R}_1(x, t) dt,$$

т.е.

$$v_1^{(x)} = \Phi_1^{(x)} + \int_q^1 \Phi_1^{(t)} \bar{R}_1(x, t) dt - \int_q^1 v_2^{(t)} K^*(x, t) dt \quad (59)$$

где $\bar{R}_1(x, t)$ - резольвента ядра $\bar{K}_1(x, t)$, а

$$K^*(x, t) = \bar{K}_2(x, t) + \int_q^1 \bar{K}_2(x, t) \bar{R}_1(x, t) dt$$

причем $|\bar{R}_1(x, t)| \leq const$, $|K^*(x, t)| \leq const$.

Подставляя найденные значение $v_1^{(x)}$ (т.е (59)) во второе уравнение системы (39) получим интегральное уравнение относительно $v_2^{(y)}$:

$$v_2^{(y)} + \int_q^1 v_2^{(t)} K_2^*(t, y) dt = \bar{\Phi}_2^*(y) \quad (60)$$

где

$$K_2^*(t, y) = \bar{K}_2(t, y) - \int_q^1 K^*(t, s) \bar{K}_2(y, s) ds \bar{\Phi}_2^*(y) = \Phi_2(y) - \int_q^1 \left(\Phi_1^{(t)} + \int_q^1 \Phi_1^{(s)} \bar{R}_1(t, s) ds \right) \bar{K}_2(y, t) dt$$

причем $|\bar{\Phi}_2^*(y)| \leq const$, $|K_2^*(x, t)| \leq const$

Известно, что решение интегрального уравнения (60) имеет вид [14]:

$$v_2^{(y)} = \bar{\Phi}_2^*(y) + \int_q^1 \bar{\Phi}_2^*(t) R_2^*(t, y) dt \quad (61)$$

где $R_2^*(x, t)$ - резольвента ядра $K_2^*(x, t)$,

$$\bar{\Phi}_2^*(y) = A(y) + \sqrt{|\lambda_2|} \int_{\frac{t+1}{2}}^1 \tau_2(t) K_2(y, t) dt - \int_q^1 \left(\sqrt{|\lambda_1|} \int_{\frac{t+1}{2}}^1 \tau_1(s) K_1(t, s) ds + \int_q^1 \sqrt{|\lambda_1|} \int_{\frac{t+1}{2}}^1 \tau_1(s) K_1(t, s) \bar{R}_1(s, z) dz ds \right) \bar{K}_2(t, y) dt, \quad (62)$$

здесь $A(y)$ известная функция, которая зависит от заданных функций.

Подставляя (61) в (59) находим

$$v_1^{(x)} = \bar{\Phi}_1^*(x) - \int_q^1 K^*(x, t) dt \int_q^1 \bar{\Phi}_2^*(s) R_2^*(s, t) ds$$

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_1^*(x) = & \psi_1' \left(\frac{x+1}{2} \right) - F_1'(x) + \sqrt{|\lambda_1|} \int_{\frac{x+1}{2}}^1 \tau_1(t) K_1(x,t) dt + \\ & + \sqrt{|\lambda_1|} \int_q^1 \bar{R}_1(x,t) dt \int_{\frac{t+1}{2}}^1 \tau_1(s) K_1(t,s) ds + \int_q^1 \left[\psi_1' \left(\frac{x+1}{2} \right) - F_1'(t) \right] \bar{R}_1(x,t) dt - \\ & - \int_q^1 \bar{\Phi}_2^*(t) K^*(x,t) dt \end{aligned}$$

Далее, исключив $v_2(y)$ из (26) и (61) с учетом (62) получим:

$$\sqrt{|\lambda_2|} \int_q^1 R_2^*(t,y) dt \int_{\frac{t+1}{2}}^1 \tau_2(s) K_2(t,s) ds + \tau_2'(y) - \psi_2' \left(\frac{y+1}{2} \right) = A_1(y)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(y) = & B(y) - A(y) + \int_q^1 (B(t) - A(t)) R_2^*(t,y) dt \\ B(y) = & \sqrt{|\lambda_1|} \int_q^1 \left(\int_{\frac{t+1}{2}}^1 \tau_1(s) K_1(t,s) ds + \int_q^1 ds \int_{\frac{t+1}{2}}^1 \tau_1(s) K_1(t,s) \bar{R}_1(s,z) dz \right) \bar{K}_2(y,t) dt \end{aligned}$$

Интегрируя обе части полученного равенства от y до 1 и учитывая, что $\tau_2(1) = \psi_2(1)$ получим следующее интегральное уравнение для определения $\tau_2(y)$:

$$\tau_2(y) - \sqrt{|\lambda_2|} \int_y^1 dt \int_{\frac{q+1}{2}}^1 \tau_2(s) ds \int_{2s-1}^1 R_2^*(z,t) K_2(z,s) dz = 2\psi_2 \left(\frac{y+1}{2} \right) - \int_y^1 A_1(t) dt - \psi_2(1)$$

т.е.

$$\tau_2(y) - \sqrt{|\lambda_2|} \int_{\frac{q+1}{2}}^1 \tau_2(s) N(s,y) ds = 2\psi_2 \left(\frac{y+1}{2} \right) - \int_y^1 A_1(t) dt - \psi_2(1)$$

где $N(s,y) = \int_y^1 dt \int_{2s-1}^1 R_2^*(z,t) K_2(z,s) dz$

После того как найдены $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$, $\tau_2(y)$ и $v_2(y)$, решение задачи I_1 можно восстановить в области Ω_0 как решение задачи N (35), а в областях $\Delta_j (j = 1, 2)$ как решение задачи Коши-Гурса. **Теорема 2 доказана.** \square

Теорема 3. Если выполнены (9), (11 и (12), то решение задачи I_2 существует и единственно.

Доказательство. Теорема 3 доказывается аналогично как теорема 2.

Пусть $z(x,y)$ – решение задачи I^* , тогда однозначная разрешимость задачи I^* эквивалентно сведется к однозначной разрешимости задач I_1 и I_2 , где неизвестную

функцию $\psi_j^*(x)$ ($j = 1, 2$) можно определить, склеивая на линии $x + y = 0$ решение задачи Гурса в областях D_j и D_j^* с краевыми условиями (7),

$$z(x, y) \Big|_{B_j E_j} = h_j(x) - \omega_j(x)$$

и (8),

$$z(x, y) \Big|_{B_j^* E_j^*} = h_j^*(x) - \omega_j(x),$$

соответственно, где $h_j(x)$ и $h_j^*(x)$ являются следами на $x + y = q$ и $x + y = -q$ решения задач I_1 и I_2 в областях Δ_j и Δ_j^* , соответственно.

Следовательно, в силу (13), (17), (18) и (19) задача I однозначно разрешима. \square

Библиографический список

1. Нахушев. А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифф. уравнения. 1976. Т.12. №1. С.103-108.
2. Елеев В.А. О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных уравнений второго и третьего порядка // Дифф. уравнения. 1994. Т. 30. №2. С. 230-237.
3. Казиев В.М. О задаче Дарбу для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифф. уравнения. 1978. Т. 14. №1. С.181-184.
4. Казиев В.М. Задача Гурса для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения // Дифф. уравнения. 1981. Т.17. №2. С.313-319.
5. Ланин И.Н. Краевая задача для одного нагруженного гипербола-параболического уравнения третьего порядка // Дифф. уравнения. 1981. Т.17. №1. С.97-106.
6. Исломов Б.И., Курьязов Д.М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения второго порядка // ДАН РУз. 1996. №1. С.3-6.
7. Курьязов Д.М. Краевая задача для нагруженного уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. // УзМЖ. 1999. №5. С. 40-46.
8. Рамазанов М.И. О нелокальной задаче для нагруженного уравнения гипербола-эллиптического типа в прямоугольной области // Сибирский математический журнал. 2002. Т.2. № 4. С. 75-81.
9. Хубиев.К.У. Об одной задаче для нагруженного уравнения смешанного гипербола-параболического типа // Доклады АМАН. 2005. Т. 7. №2. С.74-77.
10. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 204 с.
11. Бицадзе А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Тр. Матем. Института АН СССР. 1953. Т.41.
12. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Нелокальная краевая задача в двусвязной области для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения // Доклады АН СССР. 1988. Т. 299. №1. С.63-66.
13. Исломов Б., Абдуллаев О.Х. Краевая задача типа задачи Бицадзе для уравнения третьего порядка эллипτικο-гиперболического типа в двусвязной области // Доклады АМАН. 2004. Т. 7. №1. С.42-46.
14. Мухелешвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с

Поступила в редакцию / Original article submitted: 24.04.2014