УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

УДК 514.112.3

Научная статья

О некоторых неизвестных результатах, связанных с нетривиальными свойствами обычных треугольников. Ч. I

Б. П. Федоров, С. Б. Богданова, С. О. Гладков

Московский авиационный институт, 125993, г. Москва, Волоколамское ш, 4

E-mail: sonjaf@list.ru

В работе приведено подробное решение множества оригинальных задач, сформулированных в свое время Б.П. Федоровым, и относящихся к разнообразным нетривиальным свойствам евклидовых треугольников. При изложении материала используется некоторая общепринятая, но не слишком распространенная в современных учебниках по геометрии терминология, необходимая для понимания и более углубленного восприятия описанных в работе задач.

Ключевые слова: свойства треугольников, вписанная и описанная окружности, подобие.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-216-234

Поступила в редакцию: 10.11.2021

В окончательном варианте: 10.12.2021

Для цитирования. Федоров Б. П., Богданова С. Б., Гладков С. О. О некоторых неизвестных результатах, связанных с нетривиальными свойствами обычных треугольников. Ч. I // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 37. № 4. С. 216-234. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-216-234

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Федоров Б. П., Богданова С. Б., Гладков С. О., 2021

Введение

Общее знакомство с геометрией, как правило, начинается с подробного изучения свойств обычных евклидовых треугольников, как одной из, казалось бы, простейших геометрических фигур. При их поверхностном изучении весьма распространенным заблуждением довольно часто бытует представление о том, что треугольник это нечно тривиальное и простое по своим геометрическим свойствам. Ниже в тексте статьи это неверное представлние будет развеяно конкретными примерами и их подробными решениями. Более того, в процессе детального и более глубокого анализа выясняется, что внутренняя природа произвольного треугольника чрезвычайно богата: количество его «замечательных» точек на сегодняшний день исчисляются пятьюдесятью тысячами! Энциклопедия

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

таких замечательных точек [1], (Encyclopedia of Triangle Centers, ETS), в которой каждая точка нумеруется в формате $X(\text{No})$, где номер принимает значение от 1 до 50000, начата американским математиком Кларком Кимберлейком в 1994 году, и представляет собой систематизацию наработанных многими десятилетиями математических фактов. В настоящей работе, опираясь на огромный педагогический опыт работы Б.П. Федорова со студентами в Государственном гуманитарно – технологическом университете города Орехово – Зуева Московской области, а также учитывая опыт авторов статьи в работе со слушателями подготовительных курсов Московского авиационного института, хотелось бы вначале сконцентрировать особое внимание на трех хорошо известных в планиметрии (см. [2] - [6]) внутренних точках треугольника, порождаемых тремя чевианами. При этом наш нескрываемый интерес, возникший еще и под влиянием классических уже упомянутых монографий и учебников [2] - [6], будет состоять прежде всего в изучении свойств таких треугольников, которые самым естественным образом получаются с помощью соответствующих геометрических построений благодаря этим специфическим точкам. Вначале необходимо напомнить, что три прямые AA_1, BB_1, CC_1 называются чевианами треугольника [2], если они пересекаются в одной точке. Рис. 1 показывает, как с помощью точки пересечения Q чевиан AA_1, BB_1, CC_1 можно получить треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, самым простым образом связанными с исходным треугольником ABC .

Рис. 1. Произвольный треугольник ABC вписан в окружность. Точки пересечения продолжения чевиан с этой окружностью порождает треугольник $A_2B_2C_2$. Треугольник $A_1B_1C_1$ образован основаниями чевиан

С другой стороны, хорошо известно [3], что основания перпендикуляров, опущенных из внутренней точки Q , являются вершинами так называемого подерного (или педального) треугольника, показанного на рис.2.

Рис. 2. Показан подерный треугольник MNF точки Q - точки пересечения трех чевиан треугольника ABC

В процессе многолетнего изучения различных нетривиальных свойств обычных евклидовых треугольников (обозначенных на рис. 1, 2 как $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и MNF), одним из авторов настоящего сообщения (Б. П. Федоровым) был проделан огромный творческий труд по постановке и решению множества задач из области планиметрии, систематизация которых позволила получить таблицу.

Таблица

точка пересечения	$S_{A_1B_1C_1}$	S_{MNF}	$S_{A_2B_2C_2}$
биссектрис	$\frac{2abcS}{(a+b)(a+c)(c+b)}$	$\frac{S}{2} \cdot \frac{r}{R}$	$\frac{S}{2} \cdot \frac{R}{r}$
медиан	$\frac{S}{4}$	$\frac{S}{36} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{R^2}$	$\frac{S}{64} \cdot \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(m_a m_b m_c)^2}$
высот	$2S \cos A \cos B \cos C$	$2S \cos A \cos B \cos C$	$8S \cos A \cos B \cos C$

Поскольку в этой таблице представлены лишь окончательные результаты вычислений, то главной целью настоящей работы является их подробное доказательство, которое приводится нами ниже.

Исследование треугольников, порожденных точкой пересечения биссектрис

В качестве первого примера мы рассмотрим треугольники, порождаемые точкой пересечения биссектрис. В энциклопедии центров треугольника (ЕТС) эта точка занимает почетное первое место, обозначаемое как $X(1)$, и называется инцентром. На чертежах ее принято обозначать буквой I .

Воспользуемся теперь тем свойством, что эта точка является центром вписанной окружности, т.е. точкой, равноудаленной от сторон треугольника. Однако это самое известное ее свойство проявляет себя лишь один раз, когда речь заходит о подерном треугольнике.

Например, при вычислении площади треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 3) потребуется знание свойства точки пересечения биссектрисы с противоположной стороной треугольника, теорема косинусов, формула площади треугольника и формула Герона, а также умение проводить преобразование громоздких рациональных алгебраических выражений.

Рис. 3. На рисунке показаны биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC , пересекающиеся в точке I . $AC = b, AB = c, BC = a$

Согласно рис. 3 площадь треугольника AA_1, BB_1, CC_1 найдем как разность

$$S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} - (S_{AB_1C_1} + S_{CB_1A_1} + S_{BA_1C_1}) \quad (1)$$

Вычислим значение каждого слагаемого в скобках. По свойству биссектрис треугольника ABC запишем:

$$AC_1 = \frac{cb}{a+b}, BC_1 = \frac{ca}{a+b}, AB_1 = \frac{ac}{c+b}, CA_1 = \frac{ab}{c+b}, AB_1 = \frac{cb}{a+c}, CB_1 = \frac{ab}{a+c}$$

Тогда

$$S_{AC_1B_1} = \frac{1}{2} AC_1 \cdot AB_1 \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{cb}{a+b} \cdot \frac{bc}{a+c} \cdot \sqrt{1 - \frac{(c^2 + b^2 - a^2)^2}{4c^2b^2}}$$

, т.к. $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$, а $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ по теореме косинусов из треугольника ABC . Поэтому

$$S_{AB_1C_1} = \frac{\sqrt{4c^2b^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2}}{4(a+b)(a+c)} \cdot bc \quad (2)$$

Преобразуем подкоренное выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} 4c^2b^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2 &= (2cb + c^2 + b^2 - a^2)(2cb - c^2 - b^2 + a^2) = \\ &= -((b+c)^2 - a^2)((b-c)^2 - a^2) = (b+c+a)(b+c-a)(b+a-c)(c+a-b) = \\ &= 2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c) = 16S^2, \end{aligned}$$

где в последней строке была учтена формула Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

В результате формула (2) примет вид:

$$S_{AB_1C_1} = \frac{bc \cdot 4S}{4(a+b)(a+c)} = S \frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Аналогичные рассуждения приведут нас и к двум аналогичным соотношениям:

$$S_{CA_1B_1} = \frac{Sba}{(c+b)(a+c)} \quad \text{и} \quad S_{BC_1A_1} = \frac{Sca}{(a+b)(b+c)}.$$

Складывая их все, имеем

$$\begin{aligned} S_{AB_1C_1} + S_{CB_1A_1} + S_{BA_1C_1} &= \\ &= S \cdot \left(\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ba}{(c+b)(a+c)} + \frac{ca}{(a+b)(b+c)} \right) = \\ &= S \cdot \frac{bc(c+b) + ab(a+b) + ac(a+c)}{(a+b)(a+c)(c+b)}. \end{aligned}$$

В итоге искомая площадь будет:

$$\begin{aligned} S_{A_1B_1C_1} &= S_{ABC} - (S_{AB_1C_1} + S_{CB_1A_1} + S_{BA_1C_1}) = \\ &= S \cdot \left(1 - \frac{bc(c+b) + ab(a+b) + ac(a+c)}{(a+b)(a+c)(c+b)} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Подробно покажем теперь, как можно преобразовать выражение в скобках. Имеем для него:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{bc(c+b) + ab(a+b) + ac(a+c)}{(a+b)(a+c)(c+b)} &= \frac{\overbrace{(a+b)(a+c)(c+b)} - \overbrace{bc(c+b)} - \overbrace{ab(a+b)} - \overbrace{ac(a+c)}}{(a+b)(a+c)(c+b)} = \\ &= \frac{(c+b)(a^2 + ab + ac) - a(ab + b^2 + ac + c^2)}{(a+b)(a+c)(c+b)} = a \cdot \frac{(c+b)(a^2 + ab + ac) - ab - b^2 - ac - c^2}{(a+b)(a+c)(c+b)}. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок в числителе и приведения подобных слагаемых, получим:

$$1 - \frac{bc(c+b) + ab(a+b) + ac(a+c)}{(a+b)(a+c)(c+b)} = \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(c+b)}.$$

Тогда формула (3) перепишется в виде:

$$S_{A_1B_1C_1} = S \cdot \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(c+b)},$$

что и требовалось показать.

Остановимся теперь подробно на вычислении площади подерного треугольника, получаемого в результате пересечения биссектрис относительно треугольника ABC (рис. 4).

Рис. 4. На рисунке показан подерный треугольник MNF точки пересечения биссектрис I относительно треугольника ABC . $IN = IM = IF = r$, где r - радиус вписанной окружности

Как мы уже упоминали, при выводе формулы $S_{MNF} = \frac{S}{2} \cdot \frac{r}{R}$ важную роль играет то обстоятельство, что эта точка равноудалена от всех сторон треугольника, а кроме этого воспользуемся свойствами внутренних углов треугольника (для евклидова треугольника их сумма составляет π) и четырехугольника (их сумма равна 2π), а также теоремой синусов и соотношением между периметром, радиусом вписанной окружности и площадью треугольника:

$$S = pr.$$

Площадь треугольника S_{MNF} можно найти как сумму площадей трех составляющих его треугольников:

$$S_{MNF} = S_{IMN} + S_{INF} + S_{IFM}.$$

Для этого удобно воспользоваться формулой:

$$S = ab \sin \widehat{a, b}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} S_{IMN} &= \frac{1}{2} r^2 \sin(\pi - A) = \frac{1}{2} r^2 \sin A, \\ S_{INF} &= \frac{1}{2} r^2 \sin(\pi - B) = \frac{1}{2} r^2 \sin B, \\ S_{IFM} &= \frac{1}{2} r^2 \sin(\pi - C) = \frac{1}{2} r^2 \sin C. \end{aligned}$$

При этом было учтено, что, во - первых, треугольники IMN, INF, IFM равнобедренные и $IN = IM = IF = r$. А, во - вторых, каждый из четырехугольников $MINA, NIFB, FIMC$ содержит по два прямых угла. Поэтому

$$S_{MNF} = S_{IMN} + S_{INF} + S_{IFM} = \frac{1}{2} r^2 (\sin A + \sin B + \sin C). \quad (4)$$

Заменяя теперь синусы в (4) согласно теореме синусов, а именно

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R},$$

в результате получим:

$$S_{MNF} = S_{IMN} + S_{INF} + S_{IFM} = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R}\right) = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{2p}{2R} = \frac{pr^2}{2R}. \quad (5)$$

Но поскольку периметр $p = \frac{S}{r}$, то из (5) окончательно следует:

$$S_{MNF} = S_{IMN} + S_{INF} + S_{IFM} = \frac{pr^2}{2R} = \frac{r^2 \cdot S}{2rR} = \frac{S}{2} \cdot \frac{r}{R}.$$

Что и требовалось доказать. С целью вычисления площади треугольника $A_2B_2C_2$ (см. рис. 5) наиболее удобным и рациональным методом решения задачи является теорема синусов. Ключевым моментом при решении этой задачи является равенство

Рис. 5. Вершины треугольника $A_2B_2C_2$ являются точками пересечения биссектрис AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC с описанной вокруг него окружностью. Отмечены равные дуги этой окружности, на которую опираются равные вписанные углы с использованием удобных сокращенных обозначений: $A_2C_2 = b_2$, $A_2B_2 = c_2$, $B_2C_2 = a_2$.

радиусов описанных окружностей для треугольников ABC и $A_2B_2C_2$:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a_2b_2c_2}{4S_2}.$$

Откуда следует, что

$$S_2 = \frac{S}{abc} \cdot a_2b_2c_2.$$

Поскольку $\frac{abc}{4S} = R$, можно переписать эту формулу в виде:

$$S_2 = \frac{a_2 b_2 c_2}{4R}. \quad (6)$$

Если теперь воспользоваться теоремой синусов для треугольника $A_2 B_2 C_2$ и учесть, что сумма углов треугольника равна π , т.е. $A + B + C = \pi$, найдем:

$$a_2 = 2R \sin A_2 = 2R \sin \left(\frac{B+C}{2} \right) = 2R \sin \left(\frac{\pi-A}{2} \right) = 2R \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = 2R \cos \frac{A}{2}.$$

Аналогично можно показать, что

$$b_2 = 2R \cos \frac{B}{2} \quad \text{и} \quad c_2 = 2R \cos \frac{C}{2}.$$

Подставляя эти результаты в общее соотношение (6), получим:

$$S_2 = \frac{a_2 b_2 c_2}{4R} = \frac{8R^3 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{4R} = 2R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \quad (7)$$

Результат

$$S_2 = \frac{S}{2} \cdot \frac{R}{r}$$

может быть легко найден из соотношения (7), если воспользоваться следующим симметричным, но пока что неочевидным тождеством

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{S}{4Rr},$$

вывод которого мы сейчас приведем.

Действительно, благодаря следующей цепочке преобразований имеем:

$$\begin{aligned} S &= pr = \frac{r}{2}(a+b+c) = \frac{r}{2}(2R \sin A + 2R \sin B + 2R \sin C) = \\ &= rR(\sin A + \sin B + \sin C) = rR(\sin A + \sin B + \sin(\pi - (A+B))) = \\ &= rR(\sin A + \sin B + \sin(A+B)) = rR\left(\overbrace{\sin A} + \underbrace{\sin B}_{\sin A \cos B} + \underbrace{\cos A \sin B}_{\cos A \sin B}\right) = \\ &= rR(\sin A \cdot (1 + \cos B) + \sin B \cdot (1 + \cos A)) = rR\left(\sin A \cdot 2\cos^2 \frac{B}{2} + \sin B \cdot 2\cos^2 \frac{A}{2}\right) = \\ &= 4rR\left(\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{A}{2}\right) = \\ &= 4rR \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \left(\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}\right) = \\ &= 4rR \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A+B}{2} = 4rR \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{\pi-C}{2} = 4rR \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

И, следовательно,

$$S_2 = \frac{S}{2} \cdot \frac{R}{r},$$

что и требовалось показать.

Некоторые свойства треугольников, порожденные точкой пересечения медиан

Рассмотрим теперь в подробностях некоторые свойства треугольников, порожденных точкой пересечения медиан. В классификации ЕТС это точка $X(2)$ сразу следует за инцентром, и традиционно обозначается на чертежах буквой M . Она называется центроидом (барицентром, а также центром тяжести треугольника).

Наиболее «простым» среди изучаемых является треугольник $A_1B_1C_1$ (см. рис. 6).

Рис. 6. На рисунке показаны медианы AA_1, BB_1, CC_1 и точка M - центроид треугольника ABC

Вычисление площади этого треугольника базируется на свойстве площадей подобных фигур. В самом деле, если A_1, B_1, C_1 середины сторон треугольника ABC , то каждый из треугольников BA_1C_1, CB_1A_1 и AC_1B_1 , должен быть подобен данному ABC с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$, а поэтому их площади равны, причем

$$S_{BA_1C_1} = S_{CB_1A_1} = S_{AC_1B_1} = k^2 S = \frac{1}{4} S$$

И, следовательно,

$$S_{A_1B_1C_1} = S - \frac{3}{4} S = \frac{1}{4} S.$$

Нахождение площади подерного треугольника LNF относительно точки пересечения медиан M (см. рис.7) оказывается весьма поучительным, поскольку требует знания таких понятий, как подобие треугольников, теоремы синусов, а также свойств внутренних углов четырехугольника.

Как видно из рис. 7, площадь треугольника LNF удобно искать в виде суммы

$$S_{LNF} = S_{MNF} + S_{MLN} + S_{MLF}. \quad (8)$$

Рис. 7. Из точки пересечения медиан M опущены перпендикуляры ML, MN, MF на стороны треугольника. Показано, что $ML \parallel CC_h, MF \parallel AA_h, MN \parallel BB_h$, где AA_h, BB_h, CC_h высоты треугольника ABC

В качестве примера вычислим площадь треугольника MNF . Вполне понятно, что угол $M = \pi - C$, поскольку в четырехугольнике $MNCF$ два угла прямые по построению. Из подобия же треугольников B_1MN и B_1BB_h с коэффициентом подобия $\frac{MB_1}{BB_1} = \frac{1}{3}$ (по свойству точки пересечения медиан треугольника) следует, что

$$MN = \frac{1}{3}BB_h = \frac{1}{3} \cdot \frac{2S}{b}.$$

Вполне аналогично получается и такое равенство

$$MF = \frac{1}{3}AA_h = \frac{1}{3} \cdot \frac{2S}{a}.$$

В результате интересующую нас площадь треугольника MNF можно вычислить с помощью формулы

$$S_{MNF} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot MF \cdot \sin(\pi - C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2S}{b} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2S}{a} \cdot \sin C = \frac{2S^2}{9ab} \cdot \sin C. \quad (9)$$

Те же рассуждения приводят нас к подобным соотношениям:

$$S_{MLF} = \frac{1}{2} \cdot MF \cdot ML \cdot \sin(\pi - B) = \frac{2S^2}{9ac} \cdot \sin B. \quad (10)$$

$$S_{MNL} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot ML \cdot \sin(\pi - A) = \frac{2S^2}{9bc} \cdot \sin A. \quad (11)$$

В результате с учетом равенств (9) – (11) формула (8) примет вид:

$$\begin{aligned}
S_{LNF} &= S_{MNF} + S_{MLN} + S_{MLF} = \frac{2S^2}{9ab} \cdot \sin C + \frac{2S^2}{9ac} \cdot \sin B + \frac{2S^2}{9bc} \cdot \sin A = \\
&= \frac{2}{9}S^2 \left(\frac{\sin C}{ab} + \frac{\sin B}{cb} + \frac{\sin A}{cb} \right) = \frac{2}{9}S^2 \left(\frac{c}{ab} \cdot \frac{\sin C}{c} + \frac{b}{ac} \cdot \frac{\sin B}{b} + \frac{a}{cb} \cdot \frac{\sin A}{a} \right) = \\
&= \frac{2}{9}S^2 \cdot \frac{1}{2R} \cdot \left(\frac{c}{ab} + \frac{b}{ac} + \frac{a}{cb} \right) = \frac{S^2}{9R} \cdot \frac{c^2 + b^2 + a^2}{abc} = \frac{S}{9R} \cdot \frac{S}{abc} \cdot (c^2 + b^2 + a^2) = \\
&= \frac{S}{36R^2} \cdot (c^2 + b^2 + a^2).
\end{aligned}$$

При получении этого соотношения мы воспользовались здесь теоремой синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

а также учли формулу $\frac{abc}{4S} = R$.

Чтобы теперь вычислить площадь треугольника $A_2B_2C_2$ (см. рис. 8), который образован пересечениями продолжений медиан треугольника ABC с описанной вокруг него окружностью, то для решения этой задачи нам необходимо воспользоваться признаками и свойствами подобных треугольников, а также свойством хорд окружности, проходящих через данную точку и признаками равенства вписанных углов. Помимо этого необходимо будет воспользоваться общим выражением для длины медианы треугольника, а также уметь проводить сложные алгебраические преобразования.

Рис. 8. Треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ вписаны в одну окружность. На рисунке показаны равные вписанные углы, опирающиеся на одинаковые дуги этой окружности.

Решение поставленной задачи мы начнем с такого ключевого момента, как равенство радиусов описанных окружностей для обоих треугольников ABC и $A_2B_2C_2$:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a_2b_2c_2}{4S_2}. \text{ Откуда следует, что}$$

$$S_2 = S \cdot \frac{a_2b_2c_2}{abc}. \quad (12)$$

Что касается нахождения отношения сторон $\frac{a_2}{a}, \frac{b_2}{b}, \frac{c_2}{c}$, то их можно найти, если воспользоваться подобием следующих треугольников: $BCM \sim B_2C_2M$, $ACM \sim A_2C_2M$ и $ABM \sim A_2B_2M$ (по двум углам: из которых одна пара вертикальных углов, а вторая пара углов, опирающихся на одну и ту же дугу окружности). Исходя из подобия треугольников $BCM \sim B_2C_2M_2$, можно записать, что:

$$\frac{a_2}{a} = \frac{C_2M}{BM} = \frac{B_2M}{CM},$$

или

$$\frac{a_2}{a} = \frac{C_2M}{\frac{2}{3}m_b} = \frac{B_2M}{\frac{2}{3}m_c}. \quad (13)$$

А из подобия треугольников $ACM \sim A_2C_2M$ следует:

$$\frac{b_2}{b} = \frac{C_2M}{AM} = \frac{A_2M}{CM},$$

или

$$\frac{b_2}{b} = \frac{C_2M}{\frac{2}{3}m_a} = \frac{A_2M}{\frac{2}{3}m_c}. \quad (14)$$

Вполне аналогично из подобия треугольников $ABM \sim A_2B_2M$ получим:

$$\frac{c_2}{c} = \frac{A_2M}{BM} = \frac{B_2M}{AM},$$

или

$$\frac{c_2}{c} = \frac{A_2M}{\frac{2}{3}m_b} = \frac{B_2M}{\frac{2}{3}m_a}. \quad (15)$$

В результате с учетом полученных соотношений (13) – (15) произведение дробей $\frac{a_2}{a} \cdot \frac{b_2}{b} \cdot \frac{c_2}{c}$ можно представить в виде:

$$\frac{a_2}{a} \cdot \frac{b_2}{b} \cdot \frac{c_2}{c} = \frac{27}{8} \cdot \frac{C_2M \cdot A_2M \cdot B_2M}{m_b \cdot m_c \cdot m_a}.$$

Для вычисления числителя этой дроби, найдем для примера длину отрезка C_2M . Для него имеем:

$$C_2M = C_2C_1 + C_1M = \frac{c^2}{4m_c} + \frac{m_c}{3} = \frac{3c^2 + 4m_c^2}{12m_c}.$$

Действительно, если воспользоваться свойством точки пересечения медиан треугольника ABC , то найдем, что $C_1M = \frac{m_c}{3}$. Что касается соотношения $C_2C_1 = \frac{c^2}{4m_c}$, то его можно получить, если вспомнить свойство хорд окружности, пересекающихся в точке C_1 , а именно:

$$CC_1 \cdot C_1C_2 = AC_1 \cdot C_1B.$$

Откуда следует, что

$$C_1C_2 = \frac{AC_1 \cdot C_1B}{CC_1} = \frac{\frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}}{\frac{m_c}{3}} = \frac{c^2}{4m_c}.$$

Рассуждая аналогично, получим еще два равенства:

$$\begin{aligned} A_2M &= A_2A_1 + A_1M = \frac{a^2}{4m_a} + \frac{m_a}{3} = \frac{3a^2 + 4m_a^2}{12m_a}, \\ B_2M &= B_2B_1 + B_1M = \frac{b^2}{4m_b} + \frac{m_b}{3} = \frac{3b^2 + 4m_b^2}{12m_b}. \end{aligned}$$

И, таким образом, произведение $\frac{a_2}{a} \cdot \frac{b_2}{b} \cdot \frac{c_2}{c}$ теперь можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a} \cdot \frac{b_2}{b} \cdot \frac{c_2}{c} &= \frac{27}{8} \cdot \frac{C_2M \cdot A_2M \cdot B_2M}{m_b \cdot m_c \cdot m_a} = \\ &= \frac{27}{8} \cdot \frac{1}{m_b \cdot m_c \cdot m_a} \cdot \frac{3c^2 + 4m_c^2}{12m_c} \cdot \frac{3a^2 + 4m_a^2}{12m_a} \cdot \frac{3b^2 + 4m_b^2}{12m_b} = \\ &= \frac{27}{8 \cdot 12^3} \cdot \frac{1}{m_b \cdot m_c \cdot m_a} \cdot (3c^2 + 4m_c^2) \cdot (3a^2 + 4m_a^2) \cdot (3b^2 + 4m_b^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Если учесть теперь известные соотношения для квадрата длины медианы, а именно:

$$\begin{aligned} 4m_a^2 &= 2(b^2 + c^2) - a^2, \\ 4m_b^2 &= 2(a^2 + c^2) - b^2, \\ 4m_c^2 &= 2(b^2 + a^2) - c^2. \end{aligned}$$

то после их подстановки в равенство (16), найдем:

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a} \cdot \frac{b_2}{b} \cdot \frac{c_2}{c} &= \frac{27}{8 \cdot 12^3} \cdot \frac{1}{m_b \cdot m_c \cdot m_a} \cdot (2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)) \cdot (2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)) \cdot (2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)) = \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{64 \cdot m_b \cdot m_c \cdot m_a}. \end{aligned}$$

Таким образом, исходя из формулы (12) площадь треугольника $A_2B_2C_2$ может быть записана в виде следующего симметричного выражения:

$$S_2 = S \cdot \frac{a_2 b_2 c_2}{abc} = \frac{S}{64} \cdot \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^3}{m_b^2 \cdot m_c^2 \cdot m_a^2}$$

Переходим теперь к последнему, но также весьма важному разделу, касающемуся свойств внутренних точек треугольника.

Исследование треугольников, порожденных точкой пересечения высот

Используя опять – таки классификацию ETS, по которой точка пересечения высот занимает четвертое место $X(4)$, и называется ортоцентром, а на чертежах обозначается буквой H .

Рис. 9. На рисунке показан треугольник $A_1B_1C_1$, образованный основаниями высот треугольника ABC . Причем $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$

Согласно рис. 9 можно вполне определенно утверждать, что треугольники AA_1C и BB_1C , AA_1B и CC_1B , BB_1A и CC_1A подобны. При более внимательном анализе этого рисунка мы видим также, что $AHB_1 \sim BHA_1$, $BHC_1 \sim CHB_1$ и $AHC_1 \sim CHA_1$. При нахождении площади треугольника $A_1B_1C_1$, совпадающему с подерным треугольником ортоцентра, выясняется, что «угловые» треугольники AC_1B_1 , BC_1A_1 , CB_1A_1 также будут подобны данному треугольнику ABC !

Чтобы вычислить площадь треугольника $A_1B_1C_1$, воспользуемся формулой:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin \widehat{C_1B_1A_1} \quad (17)$$

Для вычисления фигурирующих в формуле (17) сторон треугольника $A_1B_1C_1$ воспользуемся следующими соотношениями:

$$A_1C = b \cdot \cos C,$$

которое следует из треугольника AA_1C и

$$B_1C = a \cdot \cos C,$$

которое следует из треугольника BB_1C . Применяя теперь теорему косинусов для треугольника A_1B_1C , то есть:

$$\begin{aligned} A_1B_1^2 &= A_1C^2 + B_1C^2 - 2A_1C \cdot B_1C \cdot \cos C = \\ &= a^2 \cos^2 C + b^2 \cos^2 C - 2ab \cos^3 C = (a^2 + b^2 - 2ab \cos C) \cos^2 C = c^2 \cos^2 C \end{aligned}$$

мы имеем право записать, что

$$A_1B_1 = c \cos C, A_1C_1 = b \cos B, C_1B_1 = a \cos A. \quad (18)$$

Чтобы найти угол $\widehat{C_1B_1A_1}$, нам необходимо вначале показать, что треугольники AC_1B_1 , BC_1A_1 , CB_1A_1 подобны данному треугольнику ABC . Докажем это, выбрав для определенности, например, треугольники ABC и A_1B_1C . Действительно, из подобия треугольников $AA_1C \sim BB_1C$ (по двум углам) следует, что

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C}{A_1C}.$$

Рассматривая эту конкретную пару треугольников, заметим, что они имеют общий угол C и пропорциональные стороны, прилежащие этому углу. Следовательно, $A_1B_1C \sim ABC$ (см. рис.10), что, в свою очередь, приводит к равенству соответствующих углов в этих треугольниках, а точнее угол $\hat{A} = \hat{A_1}$ и угол $\hat{B} = \hat{B_1}$.

Рис. 10. На рисунке показано, что треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC

Рис. 11. Анализ рисунка показывает, что высоты треугольника ABC являются биссектрисами подерного треугольника $A_1B_1C_1$ ортоцентра H относительно треугольника ABC

Из простого геометрического анализа рис. 11, на котором указаны все равные углы в подобных треугольниках: AC_1B_1 , BC_1A_1 , CB_1A_1 и ABC , можно сделать следующие вполне очевидные выводы:

- 1) BB_1 – это биссектриса угла $C_1B_1A_1$, т.к. $\widehat{C_1B_1A} = \widehat{A_1B_1C}$.
- 2) AA_1 – это биссектриса угла $C_1A_1B_1$, т.к. $\widehat{BA_1C_1} = \widehat{CA_1B_1}$.
- 3) CC_1 – это биссектриса угла $A_1C_1B_1$, т.к. $\widehat{BC_1A_1} = \widehat{B_1C_1A}$.

Суммируя все вышесказанное, можно теперь вполне однозначно утверждать, что угол $\angle A_1B_1C_1 = \pi - 2B$. Принимая во внимание это строго доказанное равенство, а также формулу (18) и выражение (17) для площади треугольника $A_1B_1C_1$ мы имеем право записать следующую цепочку тождественных преобразований:

$$\begin{aligned}
 S_{A_1B_1C_1} &= \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot B_1C_1 \sin B_1 = \frac{1}{2} \cdot c \cos C \cdot a \cos A \cdot \sin(\pi - 2B) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot c \cos C \cdot a \cos A \cdot \sin 2B = ac \cdot \sin B \cdot \cos C \cdot \cos A \cdot \cos B = \\
 &= 2S \cos C \cdot \cos A \cdot \cos B.
 \end{aligned}$$

Стоит в заключение еще раз подчеркнуть, что подерный треугольник, построенный от точки пересечения высот относительно треугольника ABC естественным образом представляет собой треугольник $A_1B_1C_1$. С целью вычисления площади треугольника $A_2B_2C_2$ (см. рис. 12) нам вновь необходимо обратиться к исследованию вопроса о подобии треугольников.

Рис. 12. Продолжение высот AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются с описанной окружностью в точках A_2, B_2, C_2 . Соответствующие стороны треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ оказываются при этом параллельными

Докажем, что треугольник $A_2B_2C_2$ будет подобен треугольнику $A_1B_1C_1$. Для этого покажем вначале, что точка A_1 является серединой отрезка HA_2 . С этой целью проведем дополнительно (см. работу [7]) отрезок A_2B , и обратим внимание на то, что треугольник HA_2B является равнобедренным. Действительно, в нем $A_1B \perp HA_2$ (т.к.

AA_1 высота треугольника ABC) и $\widehat{HBA_1} = \widehat{A_2BC}$. Последнее следует из цепочки равных углов: $\widehat{AA_1C} = \widehat{HBA_1}$, поскольку треугольники A_1AC и B_1BC подобны, и $\widehat{A_2AC} = \widehat{A_2BC}$, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу (см. рис. 13):

Рис. 13. Равенство углов $\widehat{A_1AC} = \widehat{B_1BA_1} = \widehat{A_2BC}$ приводит к тому, что треугольник HBA_2 является равнобедренным

Вполне аналогичные рассуждения приводят к тому, что точка C_1 является серединой отрезка HC_2 , а точка B_1 представляет собой середину отрезка HB_2 . Это означает, что:

- 1) A_1C_1 –это средняя линия треугольника HA_2C_2 и поэтому $A_1C_1 = \frac{1}{2}A_2C_2$.
- 2) A_1B_1 –это средняя линия треугольника HA_2B_2 и поэтому $A_1B_1 = \frac{1}{2}A_2B_2$.
- 3) B_1C_1 –это средняя линия треугольника HB_2C_2 и поэтому $B_1C_1 = \frac{1}{2}B_2C_2$.

Таким образом, показано, что треугольники $A_2B_2C_2$ и $A_1B_1C_1$ являются подобными с коэффициентом подобия $k = \frac{A_2B_2}{A_1B_1} = 2$, а потому площадь треугольника $A_2B_2C_2$ должны быть в четыре раза больше площади треугольника $A_1B_1C_1$, т.е.:

$$S_{A_2B_2C_2} = 4S_{A_1B_1C_1} = 8S \cos A \cos B \cos C.$$

Что и требовалось доказать.

Заключение

В заключении работы необходимо отметить, что:

- 1) При изучении подобия треугольников всегда полезно вспомнить порожденные ортоцентром подерный треугольник и треугольник.
- 2) В вопросах изучения вписанных углов в качестве примера можно обратиться к треугольникам, порождаемые инцентром, центроидом и ортоцентром.
- 3) Теорему синусов вполне можно проиллюстрировать подерными треугольниками инцентра и центроида.
- 4) Использование математического аппарата тригонометрии в планиметрических задачах всегда можно показать на примере треугольника $A_2B_2C_2$, порожденного инцентром.

Благодарности

Авторы считают своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность и признательность доценту Государственного гуманитарно – технологического университета города Орехово – Зуево Московской области Воробьевой Надежде Георгиевне за большую часть предоставленных материалов, оставленных ей на сохранение Борисом Павловичем Федоровым.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Список литературы/References

1. *Encyclopedia of Triangle Center*, ETS. <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/etc.html>.
2. Понарин Я. П. *Элементарная геометрия: В 2 т*, Планиметрия, преобразования плоскости, Т. 1. Москва: МЦНМО, 2004. 312 с. [Ponarin YA. P. *Elementarnaya geometriya: V 2 t*, Planimetriya, preobrazovaniya ploskosti, vol. 1. Moskva: MTSNMO, 2004. 312 pp. (In Russian)]
3. Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии*, В 2 ч. Москва: Наука, 1991. 320 с. [Prasolov V. V. *Zadachi po planimetrii*, V 2 ch. Moskva: Nauka, 1991. 320 pp. (In Russian)]
4. Ефремов Д. Д. *Новая геометрия треугольника*. Москва: URSS, 2015. 352 с. [Yefremov D. D. *Novaya geometriya treugol'nika*. Moskva: URSS, 2015. 352 pp. (In Russian)]
5. Шарыгин И. Ф. *Решение задач*, Учеб. пособие для 10 кл. Москва: Просвещение, 1994. 252 с. [Sharygin I. F. *Resheniye zadach.*, Ucheb. posobiye dlya 10 kl. Moskva: Prosveshcheniye, 1994. 252 pp. (In Russian)]
6. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. *Факультативный курс по математике. Решение задач*, Учебное пособие для 11 кл. Москва: Просвещение, 1991. 384 с. [Sharygin I. F., Golubev V. I. *Fakul'tativnyy kurs po matematike. Resheniye zadach*, Uchebnoye posobiye dlya 11 kl. Moskva: Prosveshcheniye, 1991. 384 pp. (In Russian)]
7. Воробьева Н. Г. Дополнительные построения в процессе поиска решения геометрических задач / Сборник трудов "Математика и математическое образование" IX Международной научной конференции "Математика. Образование. Культура", 2019, С. 198–202. [Vorob'yeva N. G. *Dopolnitel'nyye postroyeniya v protsesse poiska resheniya geometricheskikh zadach / Sbornik trudov "Matematika i matematicheskoye obrazovaniye" IX Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Matematika. Obrazovaniye. Kul'tura"*, 2019, pp. 198–202 (In Russian)].

On some unknown results related to the nontrivial properties of ordinary triangles. Part 1

B. P. Fedorov, **S. B. Bogdanova**, **S. O. Gladkov**

Moscow Aviation Institute, 125993, Moscow, Volokolamskoe sh., 4, Russia

E-mail: sonjaf@list.ru

In this paper, it was given a detailed solution of many original problems, formulated by Fedorov B. P. some time ago. These problems belong to the various nontrivial properties of Euclidean triangles. When presenting the material, it has been used some universally accepted, but not very popular in modern textbooks on geometry terminology, which is necessary for understanding and in-depth perception of the problems described in the paper.

Keywords: properties of triangles, incircle and circumscribed circle, conformity.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-216-234

Original article submitted: 10.11.2021

Revision submitted: 10.12.2021

For citation. [Fedorov B. P.], Bogdanova S. B., Gladkov S. O. On some unknown results related to the nontrivial properties of ordinary triangles. Part 1. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **37**: 4, 216-234. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-216-234

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© [Fedorov B. P.], Bogdanova S. B., Gladkov S. O., 2021

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.