УДК 539.3: 532.542

Научная статья

Исследование динамики упругого элемента вибрационного устройства

Вельмисов П. А., Анкилов А. В., Анкилов Г. А.

Ульяновский государственный технический университет, 432027,
г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32

E-mail: velmisov@ulstu.ru, ankil@ulstu.ru, ankilov1996@mail.ru

Исследуется динамика упругого элемента вибрационного устройства, моделируемого каналом, внутри которого протекает поток жидкости. Даны два подхода к решению аэрогидродинамической части задачи, основанные на методах теории функций комплексного переменного и методе Фурье. В результате применения каждого подхода решение исходной задачи сведено к исследованию дифференциального уравнения с частными производными для деформации элемента, позволяющего изучать его динамику. На основе метода Галеркина произведены численные эксперименты для конкретных примеров механической системы, подтверждающие идентичность решений, найденных для каждого дифференциального уравнения с частными производными.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, упругая пластина, динамика, метод Фурье, метод Галеркина, методы теории функций комплексного переменного.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-67-83

Поступила в редакцию: 22.10.2021

В окончательном варианте: 15.11.2021

Для цитирования. Вельмисов П. А., Анкилов А. В., Анкилов Г. А. Исследование динамики упругого элемента вибрационного устройства // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 37. № 4. С. 67-83. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-67-83

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Вельмисов П. А. и др., 2021

Введение

При проектировании и эксплуатации конструкций, приборов, устройств, установок различного назначения, взаимодействующих с потоком газа или жидкости, важной проблемой является обеспечение надежности их функционирования и увеличение сроков службы. Подобные проблемы присущи многим отраслям техники. В частности, такого рода задачи возникают в авиаракетостроении, приборостроении, при проектировании антенных установок, высоких наземных сооружений и т. д. Существенное значение при расчете конструкций, взаимодействующих с потоком

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований и Ульяновской области, проект № 18-41-730015.

газа, имеет исследование динамики деформируемых элементов, так как воздействие потока может приводить к увеличению амплитуды или скорости колебаний до критических значений.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике и используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий, в частности, устройства для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например [1]). Основной частью широкого класса подобных устройств является проточный канал, на стенках которого (или внутри него) расположены упругие элементы. Работа таких устройств основана на вибрации упругих элементов при протекании жидкости внутри каналов.

Таким образом, при проектировании конструкций и устройств, находящихся во взаимодействии с потоком газа, необходимо решать задачи, связанные с исследованием динамики их упругих элементов, и на основании полученных результатов делать вывод о надежности эксплуатации.

Устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком газа, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований. Среди исследований следует отметить работы [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] и многие другие. Среди работ авторов данной статьи по исследованию динамики и устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, отметим монографии и статьи [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

В данной работе исследуется задача о динамике упругого деформируемого элемента вибрационного устройства. Устройство представляет собой проточный канал с деформируемым элементом, моделируемым упругой пластиной, который располагается на стенке канала. Внутри канала протекает дозвуковой поток идеальной несжимаемой среды. Для исследования динамики упругого элемента используется линейное уравнение, описывающее поперечные колебания упругой пластины. Аэрогидродинамическая нагрузка определяется из линейных асимптотических уравнений аэрогидромеханики. На входе и выходе из канала заданы продольные составляющие скорости жидкости. На входе в канал скорость потока жидкости считается постоянной и направленной вдоль оси канала.

1. Постановка задачи

Рассматривается плоское движение жидкости в прямолинейном канале $G = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$. Скорость невозмущенного потока жидкости на входе в канал равна V и направлена вдоль оси Ox . Упругий деформируемый элемент занимает на стенке положение $y = y_0, x \in [b, c]$ (рис. 1).

Введем обозначения: $w(x, t)$ – перемещения точек элемента в направлении оси Oy ; $\phi(x, y, t)$ – потенциал скорости возмущенного потока; $P(x, t)$ – аэрогидродинамическое воздействие на пластину.

Соответствующую связанную начально-краевую задачу аэрогидроупругости для $\phi(x, y, t)$ и $w(x, t)$ условно можно разбить на две задачи:

Рис. 1. Канал, стенка которого содержит деформируемый элемент

1) аэрогидродинамическая задача (рассматривается одностороннее обтекание деформируемого элемента потоком идеальной несжимаемой жидкости)

$$\phi_{xx}(x, y, t) + \phi_{yy}(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in G, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\phi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$\phi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$\phi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$\phi_x(0, y, t) = 0, \quad \phi_x(x_0, y, t) = 0, \quad y \in [0, y_0], \quad t \geq 0; \quad (5)$$

2) задача о динамике упругого элемента (рассматриваются поперечные колебания деформируемой пластины)

$$Dw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + N(t)w''(x, t) + \beta_2 I \dot{w}''''(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t) = P(x, t), \quad (6)$$

$$P(x, t) = -\rho(\phi_t(x, y_0, t) + V\phi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (7)$$

$$w(b, t) = w'(b, t) = w(c, t) = w'(c, t) = 0, \quad (8)$$

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x). \quad (9)$$

Уравнение (6) предполагает использование линейной модели упругого тела. Индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t ; штрих обозначает производную по x , а точка – производную по t ; ρ – плотность жидкости; $I = h^3/(12(1 - \nu^2))$; $D = EI$ – изгибная жесткость элемента; h – толщина элемента; $M = h\rho_p$ – погонная масса элемента; E, ρ_p – модуль упругости и линейная плотность элемента; $N(t)$ – сжимающая (растягивающая) элемент сила; β_2, β_1 – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; β_0 – коэффициент жесткости обжимного слоя; ν – коэффициент Пуассона.

Сжимающая ($N(t) > 0$) или растягивающая ($N(t) < 0$) элемент сила $N(t)$ может зависеть от времени. Например, при изменении теплового воздействия на пластину с течением времени $N(t)$ имеет вид:

$$N(t) = N_0 + \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} T(z,t) dz,$$

где α_T – температурный коэффициент линейного расширения, $T(z,t)$ – закон изменения температуры по толщине элемента, N_0 – постоянная составляющая усилия, созданная при закреплении элемента.

Таким образом, имеет место начально-краевая задача (1)–(9) для определения двух неизвестных функций – деформации упругого элемента $w(x,t)$ и потенциала скорости жидкости $\phi(x,y,t)$.

2. Решение аэрогидродинамической части задачи методом Фурье

Для решения аэрогидродинамической части задачи (1)–(5) потенциал скорости, описывающий движение среды, представим функцией

$$\phi(x,y,t) = \Phi_0(t) + \Psi_0(t)y + \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_n(t)e^{\lambda_n y} + \Psi_n(t)e^{-\lambda_n y}] \cos(\lambda_n x), \quad (10)$$

являющейся решением уравнения Лапласа (1), где $\lambda_n = \frac{n\pi}{x_0}$, а $\Phi_n(t)$, $\Psi_n(t)$ – произвольные функции времени. Заметим, что функция $\phi(x,y,t)$ представлена в виде разложения по полной на отрезке $[0, x_0]$ системе функций $\{\cos \lambda_n x\}_{n=0}^{\infty}$.

Условия (5) выполняются. Подставляя (10) в (4), будем иметь

$$\phi_y(x, 0, t) = \Psi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n [\Phi_n(t) - \Psi_n(t)] \cos(\lambda_n x) = 0.$$

Используя линейную независимость системы функций $\{\cos \lambda_n x\}_{n=0}^{\infty}$, получим

$$\Psi_0(t) = 0, \Phi_n(t) = \Psi_n(t) \quad \forall n \in N. \quad (11)$$

Подставим (10) в условия (2), (3) с учетом (11). В результате получим невязку

$$\delta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\lambda_n \Phi_n(t) \operatorname{sh}(\lambda_n y_0) \cos(\lambda_n x) - \vartheta(x, t), \quad (12)$$

$$\vartheta(x, t) = \begin{cases} \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), & x \in (b, c), \\ 0, & x \in (0, b) \cup (c, x_0). \end{cases}$$

Из условия ортогональности невязки $\delta(x, t)$ к системе функций $\{\cos \lambda_m x\}_{m=1}^{\infty}$

$$\int_0^{x_0} \delta(x, t) \cos(\lambda_m x) dx = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (13)$$

следует

$$\Phi_n(t) = \Psi_n(t) = \frac{1}{\lambda_n x_0 \operatorname{sh}(\lambda_n y_0)} \int_b^c (\dot{w}(x, t) + V w'(x, t)) \cos(\lambda_n x) dx. \quad (14)$$

Подставляя в (10), получим

$$\phi(x, y, t) = \Phi_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{ch}(\lambda_n y) \cos(\lambda_n x)}{\lambda_n x_0 \operatorname{sh}(\lambda_n y_0)} \int_b^c (\dot{w}(x, t) + V w'(x, t)) \cos(\lambda_n x) dx. \quad (15)$$

Учитывая (15), найдем аэрогидродинамическую нагрузку (7):

$$P(x, t) = -\rho \left(\dot{\Phi}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{cth}(\lambda_n y_0) \cos(\lambda_n x)}{\lambda_n x_0} \int_b^c (\ddot{w}(x, t) + V \dot{w}'(x, t)) \cos(\lambda_n x) dx - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V \operatorname{cth}(\lambda_n y_0) \sin(\lambda_n x)}{x_0} \int_b^c (\dot{w}(x, t) + V w'(x, t)) \cos(\lambda_n x) dx \right), \quad x \in (b, c), t \geq 0, \quad (16)$$

где введено обозначение $\Phi(t) = \Phi_0(t) - \Phi_0(0)$, тогда справедливо условие

$$\Phi(0) = 0. \quad (17)$$

Так как используется модель несжимаемой среды, то поток жидкости через границу области G должен быть равен нулю. Следовательно, должно выполняться условие $\int_b^c (\dot{w} + V w') dx = 0$. Согласно граничным условиям (8) получим

$$\int_b^c \dot{w} dx = 0. \quad (18)$$

Таким образом, получена начально-краевая задача (6), (8), (9), (16)–(18) для определения двух неизвестных функций – деформации упругого элемента $w(x, t)$ и функции $\Phi(t)$.

3. Решение аэрогидродинамической части задачи методами ТФКП

Для определения аэрогидродинамической нагрузки (7) используем методы теории функций комплексного переменного. Для этого в области J введем комплексный потенциал $W = f(z, t) = \phi + i\psi$, $z = x + iy$, и рассмотрим аналитическую функцию $f_z(z, t) = \phi_x - i\phi_y$. При помощи функции

$$\zeta(z) = sn \frac{K(k)i(2z - 2x_0 - iy_0)}{y_0}, \quad (19)$$

где $\sinh$ – эллиптический синус, $K(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ – полный эллиптический интеграл первого рода, модуль k определяется из соотношения $K(\sqrt{1-k^2})y_0 = 2K(k)x_0$, конформно отображим прямоугольник G на верхнюю полуплоскость $H = \{\zeta : \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$. Граничным точкам $A(0, y_0)$, $B(x_0, y_0)$, $C(x_0, 0)$, $D(0, 0)$ прямоугольника в ζ -плоскости будут соответствовать точки вещественной оси ξ с абсциссами $-1/k$, -1 , 1 , $1/k$. Упругой пластине при этом отображении будет соответствовать отрезок $[-\beta, -\alpha]$ на вещественной оси, причем $\beta = \zeta(b)$, $\alpha = \zeta(c)$.

Согласно граничным условиям (2)–(5) для аналитической функции $if_z(z(\zeta), t)$ получим следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{if_z(z(\zeta), t)\} &= \phi_y = \begin{cases} 0, & \xi \in (-1/k, -\beta) \cup (-\alpha, -1) \cup (1, 1/k), \\ \bar{w}(x(\xi), t), & \xi \in [-\beta, -\alpha], \end{cases} \\ \operatorname{Im}\{if_z(z(\zeta), t)\} &= \phi_x = 0, \quad |\xi| > 1/k, |\xi| < 1, \\ \bar{w}(x, t) &= \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t). \end{aligned}$$

Зависимость

$$x(\xi) = \begin{cases} x_0 - \frac{y_0}{2K(k)} \int_{-1}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}}, & \xi \in (-1/k, -1), \\ x_0 + \frac{y_0}{2K(k)} \int_1^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}}, & \xi \in (1, 1/k) \end{cases}$$

определяется связью между z и ζ :

$$z = x_0 + \frac{iy_0}{2} - \frac{iy_0}{2K(k)} \int_0^{\zeta} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

где у функции $Q(\zeta) = \sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}$ рассматривается та ветвь корня, которая положительна в интервале $(-1, 1)$. Таким образом, для функции $if(\zeta, t)$ имеем смешанную краевую задачу в верхней полуплоскости. Решение этой задачи, ограниченное в точках $\xi = \pm 1, \xi = \pm 1/k$, дается формулой:

$$f_z(z(\zeta), t) = -\frac{Q(\zeta)}{i\pi} \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{\bar{w}(x(\tau), t) d\tau}{\sqrt{(\tau^2-1)(1-k^2\tau^2)}(\tau-\zeta)}. \quad (20)$$

При этом должно выполняться условие

$$\int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{\bar{w}(x(\tau), t) d\tau}{\sqrt{(\tau^2-1)(1-k^2\tau^2)}} = 0, \quad (21)$$

которое можно записать в виде (18).

Далее, поскольку

$$W_\zeta = f_z \frac{dz}{d\zeta} = \frac{y_0}{2\pi K(k)} \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{\bar{w}(x(\tau), t) d\tau}{\sqrt{(\tau^2-1)(1-k^2\tau^2)}(\tau-\zeta)},$$

то, интегрируя по ζ , получаем

$$f(z(\zeta), t) = -\frac{y_0}{2\pi K(k)} \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{\bar{w}(x(\tau), t) \ln(\tau - \zeta) d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - 1)(1 - k^2 \tau^2)}} + C(t), \quad (22)$$

где $C(t)$ – произвольная функция времени.

Перейдем к пределу в (20), (22) при $\zeta \rightarrow \xi \in (-\beta, -\alpha)$ (при этом $z \rightarrow x + iy_0$, $x \in (b, c)$). Приравняв вещественные части, по формуле Сохоцкого находим:

$$\phi_x(x(\xi), y_0, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - k^2 \xi^2)} \bar{w}(x(\tau), t) d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - 1)(1 - k^2 \tau^2)}(\tau - \xi)}, \quad \xi \in (-\beta, -\alpha), \quad (23)$$

$$\phi(x(\xi), y_0, t) = -\frac{y_0}{2\pi K(k)} \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{\bar{w}(x(\tau), t) \ln(\tau - \xi) d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - 1)(1 - k^2 \tau^2)}} + ReC(t), \quad \xi \in (-\beta, -\alpha). \quad (24)$$

Введем обозначение $X_0(t) = ReC(t)$, тогда, дифференцируя (24) по переменной t , запишем аэрогидродинамическое воздействие (7) в виде

$$P(x(\xi), t) = -\rho \dot{X}_0(t) + \frac{y_0 \rho}{2\pi K(k)} \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{\dot{\bar{w}}(x(\tau), t) \ln(\tau - \xi) d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - 1)(1 - k^2 \tau^2)}} + \\ + \frac{\rho V \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - k^2 \xi^2)}}{\pi} \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{\bar{w}(x(\tau), t) d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - 1)(1 - k^2 \tau^2)}(\tau - \xi)}, \quad \xi \in (-\beta, -\alpha), \quad t \geq 0. \quad (25)$$

Положив $K(\tau, \xi) = \ln \left| \frac{2\xi(b)}{\tau - \xi} \right|$, учитывая равенство

$$\frac{\partial K(\tau, \xi)}{\partial x} = \frac{\partial K(\tau, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{2K(k)}{y_0} \frac{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - k^2 \xi^2)}}{\tau - \xi}, & \xi \in (-1/k, -1), \\ \frac{2K(k)}{y_0} \frac{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - k^2 \xi^2)}}{\tau - \xi}, & \xi \in (1, 1/k), \end{cases}$$

и условие (21), запишем выражение (25) в виде:

$$P(x(\xi), t) = -\rho \dot{X}_0(t) - \frac{y_0 \rho}{2\pi K(k)} \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{\dot{\bar{w}}(x(\tau), t) K(\tau, \xi) d\tau}{\sqrt{(\tau^2 - 1)(1 - k^2 \tau^2)}} + \\ - \frac{y_0 \rho V}{2K(k)\pi} \int_{-\beta}^{-\alpha} \frac{\bar{w}(x(\tau), t)}{\sqrt{(\tau^2 - 1)(1 - k^2 \tau^2)}} \frac{\partial K(\tau, \xi)}{\partial x} d\tau, \quad \xi \in (-\beta, -\alpha), \quad t \geq 0. \quad (26)$$

Подставляя выражения $|\xi| = cd \frac{2K(k)i(x_0-x)}{y_0}$, $|\tau| = cd \frac{2K(k)i(x_0-\tau_1)}{y_0}$, где $cdx = -sn(x - K(k))$, и заменяя затем τ_1 на τ , из (26) получим

$$P(x, t) = -\rho \dot{X}_0(t) - \frac{\rho}{\pi} \int_b^c \dot{w}(\tau, t) K(\tau, x) d\tau - \frac{\rho V}{\pi} \int_b^c \bar{w}(\tau, t) \frac{\partial K(\tau, x)}{\partial x} d\tau, \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (27)$$

где

$$K(\tau, x) = \ln \left| \frac{2cd(2K(k)i(x_0-b)y_0^{-1})}{cd(2K(k)i(x_0-\tau)y_0^{-1}) - cd(2K(k)i(x_0-x)y_0^{-1})} \right|. \quad (28)$$

Заметим, что $K(\tau, x) = K(x, \tau)$, т. е. ядро симметричное. Кроме того $K(\tau, x) \geq 0$. Подставляя $\bar{w}(\tau, t) = \dot{w}(\tau, t) + Vw'(\tau, t)$, из (27) получим

$$P(x, t) = -\rho \dot{X}(t) - \frac{\rho}{\pi} \int_b^c (\ddot{w}(\tau, t) + V\dot{w}'(\tau, t)) K(\tau, x) d\tau - \frac{\rho V}{\pi} \int_b^c (\dot{w}(\tau, t) + Vw'(\tau, t)) \frac{\partial K(\tau, x)}{\partial x} d\tau, \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0. \quad (29)$$

В (29) введено обозначение $X(t) = X_0(t) - X_0(0)$, тогда справедливо условие

$$X(0) = 0. \quad (30)$$

Таким образом, получена начально-краевая задача (6), (8), (9), (18), (29), (30) для определения двух неизвестных функций – деформации упругого элемента $w(x, t)$ и функции $X(t)$.

4. Решение задачи методом Галеркина

Решение уравнения (6) будем искать методом Галеркина, подчинив искомую функцию $w(x, t)$ крайевым условиям (8). Согласно методу Галеркина, решение уравнения (6) ищется в виде

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t) g_k(x), \quad (31)$$

где $g_k(x) \in C^4[b, c]$ – четырежды непрерывно-дифференцируемые на отрезке $[b, c]$ базисные функции, подобранные так, чтобы выполнялись заданные краевые условия (8), а дважды непрерывно-дифференцируемые по переменной t при $t \geq 0$ функции $a_k(t) \in C^2[0, +\infty)$ определяются из условия ортогональности невязки уравнения к системе непрерывных поверочных функций $\{h_k(x) \in C[b, c]\}$, в частности, в качестве поверочных можно выбрать базисные функции.

В качестве базисных возьмем функции

$$g_k(x) = A_k \cos \gamma_k(x-b) + B_k \sin \gamma_k(x-b) + C_k \operatorname{ch} \gamma_k(x-b) + D_k \operatorname{sh} \gamma_k(x-b), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

Коэффициенты A_k, B_k, C_k, D_k и параметр γ_k выберем так, чтобы на концах отрезка $[b, c]$ выполнялись условия, соответствующие (8):

$$g_k(b) = g'_k(b) = g_k(c) = g'_k(c) = 0. \quad (33)$$

Тогда функция $w(x, t)$ в виде (31) будет удовлетворять условиям (8). Заметим, что γ_k и $g_k(x)$ – собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$g_k^{IV}(x) = \gamma_k^4 g_k(x) \quad (34)$$

с граничными условиями (33). Задача (34), (33) самосопряженная и полностью определенная, следовательно, система функций $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортогональна на $[b, c]$, т. е. справедливы равенства

$$\int_b^c g_k(x) g_j(x) dx = 0, \quad \int_b^c g_k(x) g_j^{IV}(x) dx = 0, \quad k \neq j. \quad (35)$$

В этом случае согласно теореме о разложении любую функцию $U(x)$, четырехкратно непрерывно дифференцируемую в (b, c) и удовлетворяющую соответствующим краевым условиям, можно разложить в ряд $U(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k^{(1)}(x)$, абсолютно и равномерно сходящийся в (b, c) .

Подставляя $w(x, t)$ в виде (31) в уравнение (6), получим

$$\begin{aligned} M \sum_{k=1}^m a_k''(t) g_k(x) + D \sum_{k=1}^m a_k(t) g_k^{IV}(x) + N(t) \sum_{k=1}^m a_k(t) g_k''(x) + \beta_0 \sum_{k=1}^m a_k(t) g_k(x) + \\ + \beta_1 \sum_{k=1}^m a_k'(t) g_k(x) + \beta_2 I \sum_{k=1}^m a_k'(t) g_k^{IV}(x) = P(x, t), \quad x \in (b, c). \end{aligned} \quad (36)$$

Согласно методу Галеркина-Петрова, условия ортогональности невязки уравнения (36) к базисным функциям $\{g_j(x)\}_{j=1}^m$ позволяют записать систему уравнений

$$\begin{aligned} M \sum_{k=1}^m a_k''(t) \int_b^c g_k(x) g_j(x) dx + D \sum_{k=1}^m a_k(t) \int_b^c g_k^{IV}(x) g_j(x) dx + N(t) \sum_{k=1}^m a_k(t) \int_b^c g_k''(x) g_j(x) dx + \\ + \beta_0 \sum_{k=1}^m a_k(t) \int_b^c g_k(x) g_j(x) dx + \beta_1 \sum_{k=1}^m a_k'(t) \int_b^c g_k(x) g_j(x) dx + \\ + \beta_2 I \sum_{k=1}^m a_k'(t) \int_{b_m}^{c_m} g_k^{IV}(x) g_j(x) dx = \int_b^c P(x, t) g_j(x) dx, \quad j = 1 \div m, x \in (b, c). \end{aligned} \quad (37)$$

Учитывая (35), запишем систему уравнений (37) в виде:

$$\begin{aligned} [D \gamma_j^4 a_j(t) + M a_j''(t) + \beta_2 I \gamma_j^4 a_j'(t) + \beta_1 a_j'(t) + \beta_0 a_j(t)] \delta_j + N(t) \sum_{k=1}^m a_k(t) \int_b^c g_k''(x) g_j(x) dx = \\ = \int_b^c P(x, t) g_j(x) dx, \quad \delta_j = \int_b^c g_j^2(x) dx, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (38)$$

Запишем систему (38) в матричном виде:

$$AW''(t) + BW'(t) + C(t)W(t) = L(t), \quad (39)$$

где

$$W_j(t) = a_j(t), \quad L_j(t) = \int_b^c P(x, t) g_j(x) dx,$$

$$C_{jj}(t) = (D\gamma_j^4 + \beta_0) \delta_j + N(t) \int_b^c g_j''(x) g_j(x) dx, \quad C_{kj}(t) = N(t) \int_b^c g_k''(x) g_j(x) dx, \quad k \neq j,$$

$$A_{jj} = M\delta_j, \quad A_{kj} = 0, \quad k \neq j, \quad B_{jj} = (\beta_2 I \gamma_j^4 + \beta_1) \delta_j, \quad B_{kj} = 0, \quad k \neq j, \quad k, j = \overline{1, m}.$$

Подставляя $w(x, t)$ в виде (31) в условие (18), получим

$$\sum_{k=1}^m a_k'(t) \int_b^c g_k(\tau) d\tau = 0. \quad (40)$$

Если начальные функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ в условиях (9) удовлетворяют условиям

$$\int_b^c f_1(x) dx = 0, \quad \int_b^c f_2(x) dx = 0, \quad (41)$$

то условие (40) можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^m a_k(t) \int_b^c g_k(\tau) d\tau = 0. \quad (42)$$

Из условий ортогональности невязки начальных условий (9) к базисным функциям $\{g_j(x)\}_{j=1}^m$ получим

$$\sum_{k=1}^m a_k(0) \cdot \int_b^c g_k(x) g_j(x) dx = \int_b^c f_1(x) g_j(x) dx,$$

$$\sum_{k=1}^m a_k'(0) \cdot \int_b^c g_k(x) g_j(x) dx = \int_b^c f_2(x) g_j(x) dx.$$

Учитывая (35), найдем начальные значения $a_j(0)$, $\dot{a}_j(0)$:

$$a_j(0) = \frac{1}{\delta_j} \int_b^c f_1(x) g_j(x) dx, \quad \dot{a}_j(0) = \frac{1}{\delta_j} \int_b^c f_2(x) g_j(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (43)$$

5. Численный эксперимент при использовании метода Фурье

Подставляя $w(x, t)$ в виде (31) в (16), получим аэрогидродинамическое воздействие

$$P(x, t) = -\rho \left(\Phi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{cth}(\lambda_n y_0) \cos(\lambda_n x)}{\lambda_n x_0} \left(\sum_{k=1}^m a_k''(t) \int_b^c g_k(\tau) \cos(\lambda_n \tau) d\tau + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + V \sum_{k=1}^m a'_k(t) \int_b^c g'_k(\tau) \cos(\lambda_n \tau) d\tau \Big) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V \operatorname{cth}(\lambda_n y_0) \sin(\lambda_n x)}{x_0} \times \\
& \times \left(\sum_{k=1}^m a'_k(t) \int_b^c g_k(\tau) \cos(\lambda_n \tau) d\tau + V \sum_{k=1}^m a_k(t) \int_b^c g'_k(\tau) \cos(\lambda_n \tau) d\tau \right) \Big), \quad x \in (b, c).
\end{aligned} \tag{44}$$

Найдем правые части уравнений (38)

$$\begin{aligned}
& \int_b^c P(x, t) g_j(x) dx = -\rho \left(\Phi(t) \int_b^c g_j(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{ch}(\lambda_n y_0)}{\lambda_n x_0} \times \right. \\
& \times \left(\sum_{k=1}^m a''_k(t) \int_b^c g_k(\tau) \cos(\lambda_n \tau) d\tau + V \sum_{k=1}^m a'_k(t) \int_b^c g'_k(\tau) \cos(\lambda_n \tau) d\tau \right) \int_b^c g_j(x) \cos(\lambda_n x) dx - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V \operatorname{cth}(\lambda_n y_0)}{x_0} \left(\sum_{k=1}^m a'_k(t) \int_b^c g_k(\tau) \cos(\lambda_n \tau) d\tau + V \sum_{k=1}^m a_k(t) \int_b^c g'_k(\tau) \cos(\lambda_n \tau) d\tau \right) \times \\
& \left. \int_b^c g_j(x) \sin(\lambda_n x) dx \right), \quad j = 1 \div m.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $g_j(b) = 0$, $g_j(c) = 0$, получим

$$\int_b^c g_j(x) \sin(\lambda_n x) dx = \frac{1}{\lambda_n} \int_b^c g'_j(x) \cos(\lambda_n x) dx.$$

Тогда правые части уравнений (38) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
& \int_b^c P(x, t) g_j(x) dx = -\rho \left(\Phi(t) \int_b^c g_j(x) dx + \sum_{k=1}^m a''_k(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{cth}(\lambda_n y_0)}{\lambda_n x_0} \int_b^c g_k(\tau) \cos(\lambda_n \tau) d\tau \times \right. \\
& \times \int_b^c g_j(x) \cos(\lambda_n x) dx + \sum_{k=1}^m a'_k(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V \operatorname{cth}(\lambda_n y_0)}{\lambda_n x_0} \left(\int_b^c g'_k(\tau) \cos(\lambda_n \tau) d\tau \int_b^c g_j(x) \cos(\lambda_n x) dx - \right. \\
& - \int_b^c g_k(\tau) \cos(\lambda_n \tau) d\tau \int_b^c g'_j(x) \cos(\lambda_n x) dx \Big) - \sum_{k=1}^m a_k(t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V^2 \operatorname{cth}(\lambda_n y_0)}{\lambda_n x_0} \int_b^c g'_k(\tau) \cos(\lambda_n \tau) d\tau \times \\
& \left. \times \int_b^c g'_j(x) \cos(\lambda_n x) dx \right), \quad j = 1 \div m,
\end{aligned} \tag{45}$$

Таким образом, получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений (38), (42), (45) с начальными условиями (17), (43) для определения $m+1$ неизвестной функции $a_k(t)$, $k = 1 \div m$

и $\Phi(t)$. Решая эту задачу численно в любой программе компьютерной алгебры, например, MathCAD, Mathematica, найдем искомые функции $a_k(t)$, $k = 1 \div m$ на отрезке $t \in [0, T]$. Следовательно, будет найдено приближенное решение $w^{\{m\}}(x, t) = \sum_{k=1}^m a_k(t)g_k(x)$, $t \in [0, T]$, $x \in (b, c)$.

Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда с плотностью $\rho = 1000$, пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho = 8480$). Другие параметры механической системы: $x_0 = 2$, $y_0 = 0.5$, $b = 0.5$, $c = 1.5$, $h = 0.005$, $\nu = 0.31$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \approx 806.7$, $N(t) = -500$, $M = \rho_p h = 42.4$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0.7$, $V = 20$. Решая задачу Коши для системы обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений (38), (42), (45) с начальными условиями (17), (43) в программе Mathematica, получим трехмерные графики деформации упругого элемента (рис. 2), плоские графики деформации элемента (рис.3) и скорости колебаний элемента (рис.4) в конкретной точке x , плоские графики деформации элемента (рис.5) в конкретный момент времени t .

Рис. 2. Деформация элемента $w(x, t)$ (слева $t \in [0; 5]$, справа $t \in [0; 0.5]$)

Рис. 3. Деформация элемента $w(1, t)$ (слева $t \in [0; 0.1]$, справа $t \in [0; 1]$)

Рис. 4. Скорость деформации элемента $\dot{w}(1, t)$ (слева $t \in [0; 0.1]$, справа $t \in [0; 1]$) Рис. 5. Деформация элемента $w(x, 0)$ и $w(x, 5)$

6. Численный эксперимент при использовании методов ТФКП

Подставляя $w(x, t)$ в виде (31) в (29), для аэрогидродинамического воздействия получим

$$P(x, t) = -\rho \dot{X}(t) - \frac{\rho}{\pi} \left(\sum_{k=1}^m a_k''(t) \int_b^c g_k(\tau) K(\tau, x) d\tau + V \sum_{k=1}^m a_k'(t) \int_b^c g_k'(\tau) K(\tau, x) d\tau + \right. \\ \left. + V \int_b^c \left(\sum_{k=1}^m (a_k'(t) g_k(\tau) + V a_k(t) g_k'(\tau)) K_x'(\tau, x) \right) d\tau \right), \quad x \in (b, c). \quad (46)$$

Найдем правые части уравнений (38)

$$\int_b^c P(x, t) g_j(x) dx = -\rho \dot{X}(t) \int_b^c g_j(x) dx - \frac{\rho}{\pi} \left(\sum_{k=1}^m a_k''(t) \int_b^c dx \int_b^c g_k(\tau) g_j(x) K(\tau, x) d\tau + \right. \\ \left. + V \sum_{k=1}^m a_k'(t) \int_b^c dx \int_b^c g_k'(\tau) g_j(x) K(\tau, x) d\tau + V \sum_{k=1}^m a_k(t) \int_b^c dx \int_b^c g_k(\tau) g_j(x) K_x'(\tau, x) d\tau + \right. \\ \left. + V^2 \sum_{k=1}^m a_k(t) \int_b^c dx \int_b^c g_k'(\tau) g_j(x) K_x'(\tau, x) d\tau \right), \quad j = 1 \div m. \quad (47)$$

Интегрируя предпоследние два повторных интеграла по частям по переменной x , учитывая, что $g_j(b) = 0$, $g_j(c) = 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_b^c P(x,t)g_j(x)dx = & -\rho\dot{X}(t)\int_b^c g_j(x)dx - \frac{\rho}{\pi} \left(\sum_{k=1}^m a_k''(t) \int_b^c dx \int_b^c g_k(\tau)g_j(x)K(\tau,x)d\tau - \right. \\ & -V^2 \sum_{k=1}^m a_k(t) \int_b^c dx \int_b^c g_k'(\tau)g_j'(x)K(\tau,x)d\tau + V \sum_{k=1}^m a_k'(t) \int_b^c dx \int_b^c (g_k'(\tau)g_j(x) - \\ & \left. -g_k(\tau)g_j'(x))K(\tau,x)d\tau \right), \quad j = \overline{1,m}. \end{aligned} \quad (48)$$

Таким образом, получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений (38), (42), (48) с начальными условиями (30), (43) для определения $m+1$ неизвестной функции $a_k(t)$, $k = 1 \div m$ и $X(t)$.

Решая задачу Коши для системы обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений (38), (42), (48) с начальными условиями (30), (43) в программе Mathematica, получим трехмерные графики деформации упругого элемента, плоские графики деформации элемента и скорости колебаний элемента в конкретной точке x , плоские графики деформации элемента в конкретный момент времени t .

7. Сравнение результатов численных экспериментов

Проведем сравнение полученных решений задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (38), (42), (45) с начальными условиями (17), (43) и уравнений (38), (42), (48) с начальными условиями (30), (43) для примера механической системы из раздела 6. Введем обозначения: $w_1(x,t)$ – решение системы (38), (42), (45), $w_2(x,t)$ – решение системы (38), (42), (48).

Рис. 6. Графики функции $w_1(x,t) - w_2(x,t)$ (слева $t \in [0; 5]$, справа $t \in [0; 0.5]$)

Как показывают графики на рисунке 6, относительная погрешность полученных решений не превосходит 0,05% при $t \in [0; 0.5]$ и 0,5% при $t \in [0; 5]$, что говорит о достоверности полученных результатов.

Заключение

Предложена математическая модель вибрационного устройства, представляющего собой проточный канал с упругим элементом. На основе метода Галеркина произведен сравнительный анализ решений дифференциальных уравнений с частными производными для деформаций элемента, полученных при решении аэрогидродинамической части задачи методами теории функций комплексного переменного и методом Фурье. Полученные результаты численных расчетов предназначены для использования на этапе проектирования вибрационных устройств, применяемых для интенсификации технологических процессов.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Список литературы/References

1. Патент РФ No 5038746/28, 27.06.1996. Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К. Гидродинамический излучатель. Патент России No 2062662. 1996. Бюл. No 18 [Patent RF No 5038746/28, 27.06.1996. Vel'misov P. A., Gorshkov G. M., Ryabov G. K. *Gidrodinamicheskiy izluchatel*'. Patent Rossii No 2062662. 1996. Byul. No 18].
2. Abdelbaki A. R., Paidoussis M. P., Misra A. K. A nonlinear model for a hanging tubular cantilever simultaneously subjected to internal and confined external axial flows // *Journal of Sound and Vibration*, 2019. vol. 449, pp. 349–367.
3. Butt M. F. J., Paidoussis M. P., Nahon M. Dynamics of a confined pipe aspirating fluid and concurrently subjected to external axial flow: A theoretical investigation // *Journal of Sound and Vibration*, 2021. vol. 509, pp. 116148.
4. Chehrehghani M., Abdelbaki A. R., Misra A. K., Paidoussis M. P. Experiments on the dynamics of a cantilevered pipe conveying fluid and subjected to reverse annular flow // *Journal of Sound and Vibration*, 2021. vol. 515, pp. 116480.
5. Giacobbi D. B., Semler C., Paidoussis M. P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density // *Journal of Sound and Vibration*, 2020. vol. 473.
6. Mogilevich L. I., Popov V. S., Popova A. A. Longitudinal and transverse oscillations of an elastically fixed wall of a wedge-shaped channel installed on a vibrating foundation // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2018. vol. 47, no. 3, pp. 227–234.
7. Mogilevich L., Ivanov S. Waves in two coaxial elastic cubically nonlinear shells with structural damping and viscous fluid between them // *Symmetry*, 2020. vol. 12, no. 3.
8. Могилевич Л. И., Блинков Ю. А., Иванов С. В. Волны деформации в нелинейных соосных оболочках, заполненных вязкой несжимаемой жидкостью // *Акустический журнал*, 2021. Т. 67, № 5, С. 467–474. [Mogilevich L. I., Blinkov YU. A., Ivanov S. V. Volny deformatsii v nelineynykh soosnykh obolochkakh, zapolnennykh vyazkoy neshimayemoy zhidkost'yu // *Akusticheskiy zhurnal*, 2021. vol. 67, no. 5, pp. 467–474 (In Russian)].
9. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2013. 322 с. [Ankilov A. V., Vel'misov P. A. *Matematicheskoye modelirovaniye v zadachakh dinamicheskoy ustoychivosti deformiruyemykh elementov konstruktсий pri aerogidrodinamicheskom vozdeystvii*. Ul'yanovsk: UIGTU, 2013. 322 pp. (In Russian)].
10. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Program complex for solving of some classes of aerohydroelasticity problems // *Journal of Physics: Conference Series*, 2021. vol. 1847, no. 1, pp. 012036.
11. Ankilov A. V., Velmisov P. A. Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem // *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 2016. vol. 219, no. 1, pp. 14–26.
12. Velmisov P. A., Ankilov A. V. Dynamic stability of plate interacting with viscous fluid // *Cybernetics and physics*, 2017. vol. 6, no. 4, pp. 262–270.

13. Velmisov P. A., Ankilov A. V. Stability of solutions of initial boundary-value problems of aerohydroelasticity // *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 2018. vol. 233, no. 6, pp. 958–974.
14. Вельмисов П. А., Анкилов А. В. Динамическая устойчивость деформируемых элементов конструкций при сверхзвуковом режиме обтекания // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.*, 2018. Т. 22, № 1, С. 96–115. [Vel'misov P. A., Ankilov A. V. Dinamicheskaya ustoychivost' deformiruyemykh elementov konstruktsiy pri sverkhzvukovom rezhime obtekaniya // *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki.*, 2018. vol. 22, no. 1, pp. 96–115 (In Russian)].
15. Velmisov P. A., Ankilov A. V. About dynamic stability of deformable elements of vibration systems // *Cybernetics and physics*, 2019. vol. 8, no. 3, pp. 175–184.
16. Вельмисов П. А., Анкилов А. В., Покладова Ю. В. Математическое моделирование динамики и устойчивости аэроупругих систем // *Вестник РАЕН*, 2019. Т. 19, № 2, С. 48–52. [Vel'misov P. A., Ankilov A. V., Pokladova YU. V. Matematicheskoye modelirovaniye dinamiki i ustoychivosti aerouprugikh sistem // *Vestnik RAYEN*, 2019. vol. 19, no. 2, pp. 48–52 (In Russian)].

MSC 74F10

Research Article

Investigation of dynamics of elastic element of vibration device

P. A. Velmisov, A. V. Ankilov, G. A. Ankilov

Ulyanovsk State Technical University, 432027, Ulyanovsk, st. Severny Venets,
32, Russia

E-mail: velmisov@ulstu.ru, ankil@ulstu.ru, ankilov1996@mail.ru

The dynamics of an elastic element of a vibration device, simulated by a channel, inside which a stream of a liquid flows, is investigated. Two approaches to solving the aerohydrodynamic part of the problem, based on the methods of the theory of functions of a complex variable and the Fourier method, are given. As a result of applying each approach, the solution to the original problem is reduced to the study of a partial differential equation for the deformation of an element, which makes it possible to study its dynamics. Based on the Galerkin method, the numerical experiments were carried out for specific examples of mechanical system, confirming the identity of the solutions found for each partial differential equation.

Keywords: aerohydroelasticity, elastic plate, dynamics, Fourier method, Galerkin method, methods of the theory of functions of a complex variable.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-67-83

Original article submitted: 22.10.2021

Revision submitted: 15.11.2021

For citation. Velmisov P. A., Ankilov A. V., Ankilov G. A. Investigation of dynamics of elastic element of vibration device. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **37**: 4, 67-83. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-67-83

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Velmisov P. A., et al., 2021

Funding. This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Ulyanovsk region, project № 18-41-730015.